# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO



PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

---

VOLUME TRENTATREESIMO
1897-98

---

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1897

# ELENCO

DEGLI

# ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI

# STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 21 NOVEMBRE MDCCCXCVII.

---

## PRESIDENTE

CARLE (Giuseppe), Dottore aggregato, Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, ✠, Comm. ✪.

## VICE-PRESIDENTE

COSSA (Alfonso), Dottore in Medicina, Direttore della Regia Scuola d'Applicazione degli Ingegneri in Torino, Professore di Chimica docimastica nella medesima Scuola e di Chimica minerale presso il R. Museo Industriale Italiano, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Berlino, Socio ordinario non residente dell'Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali di Napoli, Presidente della Reale Accademia di Agricoltura di Torino e Socio dell'Accademia Gioenia di Catania, Socio onorario dell'Accademia Olimpica di Vicenza, Socio effettivo della Società Imperiale Mineralogica di Pietroburgo, Comm. ✠, ✪, e dell'O. d'Is. Catt. di Sp.

## Tesoriere

Camerano (Lorenzo), Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Anatomia comparata e di Zoologia e Direttore dei Musei relativi nella R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro della Società Zoologica di Francia, Membro corrispondente della Società Scientifica del Chilì e della Società Zoologica di Londra.

---

# CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

### *Direttore*

D'Ovidio (Enrico), Dottore in Matematica, Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica, incaricato di Analisi superiore e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Torino; Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Napoli e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio dell'Accademia Pontaniana, delle Società matematiche di Parigi e Praga, ecc., Uffiz. ✻, Comm. ⚭.

### *Segretario*

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, Socio Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e dell'Accademia Pontaniana, Uffiz. ✻, ⚭.

## ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo *Cavour* di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze Naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro Corrispondente della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze Naturali delle Indie Neerlandesi e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio Straniero della *British Ornithological Union*, Socio Straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio Straniero dell'*American Ornithologist's Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Uffiz. ♔, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo).

Cossa (Alfonso), *predetto*.

Berruti (Giacinto), Direttore del R. Museo Industriale Italiano e dell'Officina governativa delle Carte-Valori, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Vice-Presidente del Consiglio Superiore delle Miniere, Gr. Uffiz. ♔; Comm. ✱, dell'O. di Francesco Giuseppe d'Austria, della L. d'O. di Francia, e della Repubblica di S. Marino.

D'Ovidio (Enrico), *predetto*.

Bizzozero (Giulio), Senatore del Regno, Professore e Direttore del Laboratorio di Patologia generale nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e delle RR. Accademie di Medicina e di Agricoltura di Torino, Socio Straniero dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum*, Socio Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze,

Lettere ed Arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro del Consiglio Superiore di Sanità, ecc., Uffiz. ✠ e Gr. Uffiz. ♔.

Naccari (Andrea), *predetto.*

Mosso (Angelo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Fisiologia nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia di Medicina di Torino, Uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Socio onorario della R. Accademia medica di Roma, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, della R. Accademia medica di Genova, Socio dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum*, della Società Reale di Scienze mediche e naturali di Bruxelles, della Società fisico-medica di Erlangen, Socio straniero della R. Accademia delle Scienze di Svezia, ecc. ecc., ✠, Comm. ♔.

Spezia (Giorgio), Ingegnere, Professore di Mineralogia e Direttore del Museo mineralogico della Regia Università di Torino, ♔.

Gibelli (Giuseppe), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Botanica e Direttore dell'Orto botanico della R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, ✠, ♔.

Giacomini (Carlo), Dottore aggregato in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia umana, descrittiva, topografica ed Istologia, Corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio della R. Accademia di Medicina di Torino e Direttore dell'Istituto Anatomico della Regia Università di Torino, ✠, ♔.

Camerano (Lorenzo), *predetto.*

Segre (Corrado), Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, .

Peano (Giuseppe), Dottore in Matematica, Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Socio della “ *Sociedad Cientifica* „ del Messico, Socio del Circolo Matematico di Palermo.

Volterra (Vito), Dottore in Fisica, Professore di Meccanica razionale nella R. Università di Torino, .

Jadanza (Nicodemo), Dottore in Matematica, Professore di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino e di Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri, Socio dell'Accademia Pontaniana di Napoli, .

Foà (Pio), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Comm. .

Guareschi (Icilio), Dottore in Scienze Naturali, Professore e Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica nella R. Università di Torino, Direttore della Scuola di Farmacia, Socio della R. Accademia di Medicina di Torino, Socio della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena, Membro della Società Chimica di Berlino, ecc., .

Guidi (Camillo), Ingegnere, Professore di Statica grafica e scienza delle costruzioni nella R. Scuola di Applicazione per gl'Ingegneri in Torino, .

Fileti (Michele), Dottore in Chimica, Professore ordinario di Chimica generale nella R. Università di Torino, .

## ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Brioschi (Francesco), Senatore del Regno, Direttore del R. Istituto tecnico superiore di Milano, Presidente della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della Reale Accademia delle Scienze di Napoli, dell'Istituto di Bologna, ecc., Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Geometria), e delle Reali Accademie delle Scienze di Berlino, di Gottinga, di Pietroburgo, del Belgio, di Praga, di Erlangen, ecc., Dottore *ad honorem* delle Università di Heidelberg e di Dublino, Membro delle Società Matematiche di Parigi e di Londra e delle Filosofiche di Cambridge e di Manchester, Gr. Cord. ✠, della Legion d'Onore; ✠, ✠, Comm. dell'O. di Cr. di Port.

Cannizzaro (Stanislao), Senatore del Regno, Professore di Chimica generale nella R. Università di Roma, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Reale di Napoli, Socio Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Socio Corrispondente dell'Istituto di Francia, Socio Corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Berlino, di Vienna e di Pietroburgo, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze di Baviera, della Società Reale di Londra, della Società Reale di Edimburgo e della Società letteraria e filosofica di Manchester, Socio onorario della Società chimica tedesca, di Londra e Americana, Comm. ✠, Gr. Uffiz. ✠, ✠.

Schiaparelli (Giovanni), Direttore del R. Osservatorio astronomico di Milano, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia Reale di Napoli e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Astronomia), delle Accademie di Monaco, di Vienna,

di Berlino, di Pietroburgo, di Stockolma, di Upsala, di Cracovia, della Società de' Naturalisti di Mosca, della Società Reale e della Società astronomica di Londra, Gr. Cord. ☙, Comm. ✠; ☩.

Siacci (Francesco), Senatore del Regno, Colonnello d'Artiglieria nella Riserva, Professore onorario della R. Università di Torino, Professore ordinario di Meccanica razionale ed Incaricato della Meccanica superiore nella R. Università di Napoli, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, e dell'Accademia Pontaniana, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Uff. ✠, Comm. ☙.

Cremona (Luigi), Senatore del Regno, Professore di Matematica superiore nella R. Università di Roma, Direttore della Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri, Membro del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione, Presidente della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio del R. Istituto Lombardo, del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, delle Società Reali di Londra, di Edimburgo, di Gottinga, di Praga, di Liegi e di Copenaghen, delle Società matematiche di Londra, di Praga e di Parigi, delle Reali Accademie di Napoli, di Amsterdam e di Monaco, Membro onorario dell'Insigne Accademia romana di Belle Arti detta di San Luca, della Società Fisico-medica di Erlangen, della Società Filosofica di Cambridge e dell'Associazione britannica pel progresso delle Scienze, Membro Straniero della Società delle Scienze di Harlem, Socio Corrispondente delle Reali Accademie di Berlino e di Lisbona, e dell'Accademia Pontaniana in Napoli, Dottore (LL. D.) dell'Università di Edimburgo, Dottore (D. Sc.) dell'Università di Dublino, Professore emerito nell'Università di Bologna, Gr. Uffiz. ✠, Gr. Cord. ☙, Cav. e Cons. ☩.

Beltrami (Eugenio), Professore di Fisica matematica nella R. Università di Roma, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze,

Socio effettivo del R. Istituto Lombardo e della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio estero della R. Accademia di Gottinga, Socio Corrispondente della R. Accademia di Berlino, della Società Reale di Napoli, dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Meccanica), della Società Matematica di Londra, della Reale Accademia di Bruxelles, Comm. ✻; ⚭, ✠.

Fergola (Emanuele), Professore di Astronomia nella R. Università di Napoli, Socio ordinario residente della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, Membro della Società italiana dei XL, Socio della R. Accademia dei Lincei, Socio residente dell'Accademia Pontaniana, Socio ordinario del R. Istituto d'incoraggiamento alle Scienze naturali, Socio Corrispondente del R. Istituto Veneto, Comm. ✻, ⚭.

Felici (Riccardo), Professore Emerito della R. Università di Pisa, Socio ordinario della Società italiana delle Scienze detta dei XL e della R. Accademia dei Lincei, Socio Corrispondente della Società Fisico-medica di Würzburg, del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere in Milano, della R. Accademia Lucchese di scienze, lettere ed arti, della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, ✻, Gr. Uff. ⚭, ✠.

## ACCADEMICI STRANIERI

Hermite (Carlo), Professore nella Facoltà di Scienze, Parigi.

Kelvin (Guglielmo Thomson, Lord), Professore nell'Università di Glasgow.

Gegenbaur (Carlo), Professore nell'Università di Heidelberg.

Virchow (Rodolfo), Professore nell'Università di Berlino.

Koelliker (Alberto von), Professore nell' Università di Würzburg.

Bertrand (Giuseppe Luigi), Professore nel Collegio di Francia, membro dell'Istituto, Parigi.

Klein (Felice), Professore nell'Università di Gottinga.

# CORRISPONDENTI

## SEZIONE
### DI MATEMATICHE PURE

TARDY (Placido), Professore emerito della R. Università di Genova . . . . . . . . . *Firenze*

CANTOR (Maurizio), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . . . . *Heidelberg*

SCHWARZ (Ermanno A.), Professore nella Università di . . . . . . . . . . . . . *Berlino*

DINI (Ulisse), Professore di Analisi superiore nella R. Università di . . . . . . . . . . *Pisa*

BERTINI (Eugenio), Professore nella Regia Università di . . . . . . . . . . . . . *Pisa*

DARBOUX (G. Gastone), dell'Istituto di Francia *Parigi*

POINCARÉ (G. Enrico), dell'Istituto di Francia *Parigi*

NOETHER (Massimiliano), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . . . *Erlangen*

BIANCHI (Luigi), Professore nella R. Università di . . . . . . . . . . . . . . . *Pisa*

LIE (Sophus), Professore nell'Università di *Lipsia*

JORDAN (Camillo), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto . . . . . . *Parigi*

Mittag-Leffler (Gustavo), Professore a . *Stoccolma*

Picard (Emilio), Professore alla Sorbonne, Membro dell'Istituto di Francia . . . . . . . *Parigi*

## SEZIONE

### DI MATEMATICHE APPLICATE, ASTRONOMIA E SCIENZA DELL'INGEGNERE CIVILE E MILITARE

Tacchini (Pietro), Direttore dell'Osservatorio del Collegio Romano . . . . . . . . *Roma*

Fasella (Felice), Direttore della Scuola navale superiore di . . . . . . . . . . . *Genova*

Hopkinson (Giovanni), della Società Reale di *Londra*

Zeuner (Gustavo), Professore nel Politecnico di . . . . . . . . . . . . . . *Dresda*

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . *Cambridge*

Lorenzoni (Giuseppe), Professore nella Regia Università di . . . . . . . . . . . . *Padova*

Celoria (Giovanni), Astronomo all'Osservatorio di . . . . . . . . . . . . . *Milano*

Helmert (F. Roberto), Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia . . . . . . . . *Potsdam*

Fiorini (Matteo), Professore della R. Università di . . . . . . . . . . . . . *Bologna*

Favero (Giambattista), Professore nella R. Scuola di Applicazione degli Ingegneri in . *Roma*

## SEZIONE

### DI FISICA GENERALE E SPERIMENTALE

Blaserna (Pietro), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . . . . *Roma*

Kohlrausch (Federico), Presidente dell'Istituto Fisico-Tecnico in . . . . . . . . . . *Charlottenburg*

Cornu (Maria Alfredo), dell'Istituto di Francia *Parigi*

Villari (Emilio), Professore nella R. Università di . . . . . . . . . . . . . . . *Napoli*

Roiti (Antonio), Professore nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in *Firenze*

Wiedemann (Gustavo), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . . . *Lipsia*

Righi (Augusto), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . . . *Bologna*

Lippmann (Gabriele), dell'Istituto di Francia *Parigi*

Rayleigh (Lord Giovanni Guglielmo), Professore nella “ *Royal Institution* „ di . . . . *Londra*

Thomson (Giuseppe Giovanni), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . *Cambridge*

Boltzmann (Luigi), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . . . *Vienna*

Mascart (Eleuterio), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto . . . *Parigi*

## SEZIONE

### DI CHIMICA GENERALE ED APPLICATA

PLANTAMOUR (Filippo), Professore di Chimica *Ginevra*

BUNSEN (Roberto Guglielmo), Professore di Chimica . . . . . . . . . . . . . . . . *Heidelberg*

BERTHELOT (Marcellino), dello Istituto di Francia . . . . . . . . . . . . . . . . *Parigi*

PATERNÒ (Emanuele), Professore di Chimica applicata nella R. Università di . . . . . . *Roma*

KÖRNER (Guglielmo), Professore di Chimica organica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in *Milano*

FRIEDEL (Carlo), dell'Istituto di Francia . *Parigi*

BAEYER (Adolfo von), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . . . *Monaco* (Baviera)

WILLIAMSON (Alessandro Guglielmo), della R. Società di . . . . . . . . . . . . *Londra*

THOMSEN (Giulio), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . . . *Copenaghen*

LIEBEN (Adolfo), Professore nell'Università di *Vienna*

MENDELEJEFF (Demetrio), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . *Pietroburgo*

HOFF (Giacomo Enrico van't), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . *Berlino*

FISCHER (Emilio), Professore nell' Università di . . . . . . . . . . . . . . . *Berlino*

RAMSAY (Guglielmo), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . . *Londra*

## SEZIONE

### DI MINERALOGIA, GEOLOGIA E PALEONTOLOGIA

Strüver (Giovanni), Professore di Mineralogia nella R. Università di . . . . . . . . *Roma*

Rosenbusch (Enrico), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . *Heidelberg*

Nordenskiöld (Adolfo Enrico), della R. Accademia delle Scienze di . . . . . . . . *Stoccolma*

Zirkel (Ferdinando), Professore nell' Università di . . . . . . . . . . . . . *Lipsia*

Capellini (Giovanni), Professore nella Regia Università di . . . . . . . . . . . . *Bologna*

Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . *Vienna*

Arzruni (Andrea), Professore nella Scuola tecnica superiore . . . . . . . . . . . *Aquisgrana*

Klein (Carlo), Professore nell'Università di *Berlino*

Geikie (Arcibaldo), Direttore del Museo di Geologia pratica . . . . . . . . . . . *Londra*

Fouqué (Ferdinando Andrea), Professore nel Collegio di Francia, membro dell'Istituto . . *Parigi*

Rammelsberg (Carlo Federico), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . *Berlino*

Schrauf (Alberto), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . . *Vienna*

## SEZIONE
### DI BOTANICA E FISIOLOGIA VEGETALE

CARUEL (Teodoro), Professore di Botanica *Firenze*

ARDISSONE (Francesco), Professore di Botanica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in *Milano*

SACCARDO (Andrea), Professore di Botanica nella R. Università di . . . . . . . . . *Padova*

HOOKER (Giuseppe DALTON), Direttore del Giardino Reale di Kew . . . . . . . . . *Londra*

DELPINO (Federico), Professore nella R. Università di . . . . . . . . . . . . . *Napoli*

PIROTTA (Romualdo), Professore nella Regia Università di . . . . . . . . . . . *Roma*

STRASBURGER (Edoardo), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . *Bonn*

MATTIROLO (Oreste), Professore di Botanica nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento . . . . . . . . . . . . *Firenze*

## SEZIONE
### DI ZOOLOGIA, ANATOMIA E FISIOLOGIA COMPARATA

DE SELYS LONGCHAMPS (Edmondo) . . . *Liegi*

PHILIPPI (Rodolfo Armando) . . . . . *Santiago* (Chilì)

GOLGI (Camillo), Professore nella R. Università di. . . . . . . . . . . . . . . *Pavia*

HAECKEL (Ernesto), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . . *Jena*

SCLATER (Filippo LUTLEY), Segretario della Società Zoologica di . . . . . . . . . . *Londra*

FATIO (Vittore), Dottore . . . . . . . . *Ginevra*

KOVALEWSKI (Alessandro), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . *Odessa*

LOCARD (Arnould), dell' Accademia delle Scienze di . . . . . . . . . . . . . *Lione*

CHAUVEAU (G. B. Augusto), Membro dell'Istituto di Francia, Professore alla Scuola di Medicina di . . . . . . . . . . . . . . *Parigi*

FOSTER (Michele), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . . *Cambridge*

WALDEYER (Guglielmo), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . *Berlino*

GUENTHER (Alberto) . . . . . . . . *Londra*

FLOWER (Guglielmo Enrico), Direttore del Museo di Storia naturale . . . . . . . . *Londra*

EDWARDS (Alfonso Milne), Membro dell'Istituto di Francia . . . . . . . . . . . *Parigi*

---

# CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

---

*Direttore*

Claretta (Barone Gaudenzio), Dottore in Leggi, Socio e Segretario della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Presidente della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Membro della Commissione conservatrice dei monumenti di antichità e belle arti della Provincia ecc., Comm. ✻, Gr. Uffiz. ♔.

*Segretario*

Nani (Cesare), Dottore aggregato, Professore ordinario di Storia del Diritto italiano e Preside della Facoltà di Giurisprudenza nella R. Università di Torino, Membro della R. Deputazione sopra gli studi di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Uff. ✻, Comm. ♔.

## ACCADEMICI RESIDENTI

Peyron (Bernardino), Professore di Lettere, Bibliotecario Onorario della Biblioteca Nazionale di Torino, Socio Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Gr. Uffiz. ✻, Uffiz. ♔.

Claretta (Barone Gaudenzio), *predetto.*

Rossi (Francesco), Dottore in Filosofia, Professore d'Egittologia nella R. Università di Torino, Vice-Direttore del R. Museo di Antichità a riposo, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei e della Società per gli Studi biblici in Roma, ♔.

Manno (Barone D. Antonio), Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Comm. ✠, Gr. Uffiz. ♕, Cav. d'on. e devoz. del S. O. M. di Malta.

Bollati di Saint-Pierre (Barone Federigo Emanuele), Dottore in Leggi, Soprintendente agli Archivi Piemontesi e Direttore dell'Archivio di Stato in Torino, Membro del Consiglio d'Amministrazione presso il R. Economato generale delle antiche Provincie, Corrispondente della Consulta araldica, Vice-Presidente della Commissione araldica per il Piemonte, Membro della R. Deputazione sopra gli studi di storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia e della Società Accademica d'Aosta, Socio corrispondente della Società Ligure di Storia patria, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, della Società Colombaria Fiorentina, della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie della Romagna, della nuova Società per la Storia di Sicilia e della Società di Storia e di Archeologia di Ginevra, Membro onorario della Società di Storia della Svizzera Romanza, dell'Accademia del Chablais, e della Società Savoina di Storia e di Archeologia ecc., Uffiz. ✠, Comm. ♕.

Pezzi (Domenico), Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia, Professore di Storia comparata delle lingue classiche e neo-latine nella R. Università di Torino, ♕.

Ferrero (Ermanno), Dottore in Giurisprudenza, Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia e Professore di Archeologia nella R. Università di Torino, Professore di Storia militare nell'Accademia Militare, R. Ispettore per gli scavi e le scoperte di antichità nel Circondario di Torino, Consigliere della Giunta Superiore per la Storia e l'Archeologia, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le antiche Provincie e la Lombardia, Membro e Segretario della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Socio Corrispondente della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie di Romagna, dell'Imp. Instituto Archeologico Germanico

e della Società Nazionale degli Antiquarii di Francia, fregiato della Medaglia del merito civile di 1ª cl. della Repubblica di S. Marino, ✻, ▭.

Carle (Giuseppe), *predetto.*

Nani (Cesare), *predetto.*

Cognetti De Martiis (Salvatore), Professore ordinario di Economia politica nella R. Università di Torino, Incaricato per l'Economia e Legislazione industriale nel Museo Industriale Italiano, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia dei Georgofili e della Società Reale di Napoli (Accademia di Scienze morali e politiche), ✻, Comm. ▭.

Graf (Arturo), Professore di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Membro della Società romana di Storia patria, Uffiz. ✻ e ▭.

Boselli (Paolo), Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Professore Onorario della R. Università di Bologna, Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio Corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia patria di Savona, Socio onorario della Società Ligure di Storia Patria, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Deputato al Parlamento nazionale, Presidente del Consiglio provinciale di Torino, Gr. Uffiz. ✻, Gr. Cord. ▭, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia, dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), e dell'Ordine del Sole Levante del Giappone, Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo.

Cipolla (Conte Carlo), Dottore in Filosofia, Professore di Storia moderna nella R. Università di Torino, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio effettivo della R. Deputazione

Veneta di Storia patria, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio Corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Monaco (Baviera), e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Uffiz. ✠.

Brusa (Emilio), Dottore in Leggi, Professore di Diritto e Procedura Penale nella R. Università di Torino, Consigliere superiore della Pubblica Istruzione, Socio Corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), Presidente dell' Istituto di Diritto internazionale, Socio Onorario della Società dei Giuristi Svizzeri e Corrispondente della R. Accademia di Giurisprudenza e Legislazione di Madrid, di quella di Barcellona, della Società Generale delle Prigioni di Francia, di quella di Spagna, della R. Accademia Peloritana, della R. Accademia di Scienze Morali e Politiche di Napoli, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e di altre, Comm. ✠ e dell'Ordine di San Stanislao di Russia, *Officier d'Académie* della Repubblica francese, ✻.

Perrero (Domenico), Dottore in Leggi, Membro della R. Deputazione sovra gli Studi di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia.

Allievo (Giuseppe), Dottore in Filosofia, Professore di Pedagogia e Antropologia nella R. Università di Torino, Socio Onorario della R. Accademia delle Scienze di Palermo, della Accademia di S. Anselmo di Aosta, dell'Accademia dafnica di Acireale, della Regia Imperiale Accademia degli Agiati di Rovereto e dell'Accademia cattolica panormitana, Comm. ✠, ✻.

## ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Carutti di Cantogno (Barone Domenico), Senatore del Regno, Presidente della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e Lombardia, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Membro dell'Istituto Storico Italiano, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze Neerlan-

dese, e della Savoia, Socio Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco in Baviera, ecc. ecc., Gr. Uffiz. ✠ e ♕, Cav. e Cons. ⚜, Gr. Cord. dell'O. del Leone Neerlandese e dell'O. d'Is. la Catt. di Spagna, ecc.

Reymond (Gian Giacomo), già Professore di Economia politica nella Regia Università di Torino, ✠.

Canonico (Tancredi), Vice Presidente del Senato del Regno, Professore, Presidente di Sezione della Corte di Cassazione di Roma, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accad. delle Scienze del Belgio, di quella di Palermo, della Società Generale delle Carceri di Parigi, Consigliere del Contenzioso Diplomatico, Comm. ✠, e Gr. Croce ♕, Cav. ⚜, Comm. dell'Ord. di Carlo III di Spagna, Gr. Uffiz. dell'Ord. di Sant'Olaf di Norvegia, Gr. Cord. dell'O. di S. Stanislao di Russia.

Villari (Pasquale), Senatore del Regno, Vice Presidente del Senato, Professore di Storia moderna e Presidente della Sezione di Filosofia e Lettere nell' Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia di Napoli, della R. Accademia dei Georgofili, Vice-presidente della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana, l'Umbria e le Marche, Socio di quella per le provincie di Romagna, Socio Straordinario della R. Accademia di Baviera, Socio Straniero dell'Accademia di Scienze di Gottinga, della R. Accademia Ungherese, Dott. On. in Legge della Università di Edimburgo, di Halle, Dott. On. in Filosofia dell'Università di Budapest, Professore emerito della R. Università di Pisa, Gr. Uffiz. ✠ e ♕, Cav. ⚜, Cav. del Merito di Prussia, ecc., ecc.

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e dell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, dell'Accademia della Crusca, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio straniero dell'Istituto

di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) e corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco, di Vienna, di Copenhagen, Uff. ✻, Comm. ✻, Cav. ✻.

## ACCADEMICI STRANIERI

Mommsen (Teodoro), Professore nella Regia Università di Berlino.

Müller (Massimiliano), Professore nell'Università di Oxford.

Meyer (Paolo), Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell'*Écoles des Chartes*, Parigi.

Paris (Gastone), Professore nel Collegio di Francia, Parigi.

Böhtlingk (Ottone), Professore nell'Università di Lipsia.

Tobler (Adolfo), Professore nell'Università di Berlino.

Maspero (Gastone), Professore nel Collegio di Francia, Parigi.

Wallon (Enrico Alessandro), Segretario perpetuo dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere).

Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia.

---

# CORRISPONDENTI

## SEZIONE
## DI SCIENZE FILOSOFICHE

Rendu (Eugenio) . . . . . . . . . . *Brécourt*

Bonatelli (Francesco), Professore nella Regia Università di . . . . . . . . . . *Padova*

Pinloche (Augusto), Professore nella Università di . . . . . . . . . . . . . *Lilla*

Tocco (Felice), Professore nel R. Istituto di Studi Superiori pratici e di perfezionamento di *Firenze*

Cantoni (Carlo), Professore nella R. Università di . . . . . . . . . . . . . *Pavia*

Chiappelli (Alessandro), Professore nella R. Università di . . . . . . . . . . . *Napoli*

## SEZIONE
## DI SCIENZE GIURIDICHE E SOCIALI

Lampertico (Fedele), Senatore del Regno . *Vicenza*

Serpa Pimentel (Antonio di), Consigliere di Stato . . . . . . . . . . . . . . *Lisbona*

Rodriguez de Berlanga (Manuel) . . . *Malaga*

Schupfer (Francesco), Professore nella Regia Università di . . . . . . . . . . . . . *Roma*

Gabba (Carlo Francesco), Professore nella R. Università di . . . . . . . . . . . *Pisa*

Buonamici (Francesco), Professore nella R. Università di . . . . . . . . . . . *Pisa*

Dareste (Rodolfo), dell'Istituto di Francia *Parigi*

## SEZIONE

### DI SCIENZE STORICHE

Adriani (P. Giambattista), della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria . . . *Cherasco*

Perrens (Francesco), dell'Istituto di Francia *Parigi*

Haulleville (Prospero de) . . . . . . *Bruxelles*

Willems (Pietro), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . . *Lovanio*

Birch (Walter de Gray), del Museo Britannico di . . . . . . . . . . . . . *Londra*

Capasso (Bartolomeo), Sovrintendente degli Archivi Napoletani . . . . . . . . . . *Napoli*

Chevalier (Canonico Ulisse) . . . . . *Romans*

De Simoni (Cornelio), Direttore del R. Archivio di Stato in . . . . . . . . . . *Genova*

Duchesne (Luigi), Direttore della Scuola Francese in . . . . . . . . . . . . *Roma*

Bryce (Giacomo) . . . . . . . . . . . *Londra*

Patetta (Federico), Professore nella R. Università di . . . . . . . . . . . . . *Siena*

## SEZIONE
### DI ARCHEOLOGIA

Palma di Cesnola (Conte Luigi), Direttore del Museo Metropolitano di Arti a . . . . *New-York*

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere . . . . . . . *Milano*

Poggi (Vittorio), Bibliotecario e Archivista civico a . . . . . . . . . . . . . . *Savona*

Pleyte (Guglielmo), Conservatore del Museo Egizio a . . . . . . . . . . . . . . *Leida*

Palma di Cesnola (Cav. Alessandro), Membro della Società degli Antiquarii di Londra . . *Firenze*

Mowat (Roberto), Membro della Società degli Antiquari di Francia . . . . . . . *Parigi*

Nadaillac (Marchese I. F. Alberto de) . *Parigi*

Brizio (Eduardo), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . . *Bologna*

Barnabei (Felice), Direttore del Museo Nazionale Romano . . . . . . . . . . *Roma*

Gatti (Giuseppe) . . . . . . . . . . . *Roma*

## SEZIONE
### DI GEOGRAFIA ED ETNOGRAFIA

KIEPERT (Enrico), Professore nell' Università di . . . . . . . . . . . . . . . . *Berlino*

PIGORINI (Luigi), Professore nella R. Università di . . . . . . . . . . . . . . . *Roma*

DALLA VEDOVA (Giuseppe), Professore nella R. Università di . . . . . . . . . . . *Roma*

MARINELLI (Giovanni), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . . . . . . . . . . . *Firenze*

## SEZIONE
### DI LINGUISTICA E FILOLOGIA ORIENTALE

KREHL (Ludolfo), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . . . . *Dresda*

SOURINDRO MOHUN TAGORE . . . . . . *Calcutta*

ASCOLI (Graziadio), Senatore del Regno, Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di *Milano*

WEBER (Alberto), Professore nell' Università di . . . . . . . . . . . . . . . . *Berlino*

KERBAKER (Michele), Professore nella R. Università di . . . . . . . . . . . . . . . *Napoli*

MARRE (Aristide) . . . . . . . . . . *Vaucresson* (Francia)

Oppert (Giulio), Professore nel Collegio di Francia . . . . . . . . . . . . . . . . *Parigi*.

Guidi (Ignazio), Professore nella R. Università di . . . . . . . . . . . . . . . *Roma*

Amelineau (Emilio), Professore nella " *École des Hautes Études* „ di . . . . . . . . . *Parigi*

Foerster (Wendelin), Professore nell'Università di . . . . . . . . . . . . . . . *Bonn*

## SEZIONE

## DI FILOLOGIA, STORIA LETTERARIA E BIBLIOGRAFIA

Bréal (Michele), Professore nel Collegio di Francia . . . . . . . . . . . . . . . . *Parigi*

D'Ancona (Alessandro), Professore nella R. Università di . . . . . . . . . . . *Pisa*

Nigra (S. E. Conte Costantino), Ambasciatore d'Italia a . . . . . . . . . . . . . *Vienna*

Rajna (Pio), Professore nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in . . *Firenze*

Del Lungo (Isidoro), Socio residente della R. Accademia della Crusca . . . . . . . . *Firenze*

# MUTAZIONI

AVVENUTE

*nel Corpo Accademico dal 30 Novembre 1896*
*al 21 Novembre 1897.*

## ELEZIONI

### SOCI

KLEIN (Felice), Professore nella R. Università di Gottinga, eletto Socio Straniero della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza del 10 gennaio 1897 ed approvato con R. Decreto 24 gennaio 1897.

PICARD (Emilio), Professore alla Sorbonne e Membro dell'Istituto di Francia a Parigi, eletto Socio Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Matematiche pure) nell'adunanza del 10 gennaio 1897.

FIORINI (Matteo), Professore nella R. Università di Bologna, id. id. (Sezione di Matematiche applicate, astronomia e scienza dell'ingenere civile e militare), id. id.

FAVERO (Giambattista), Professore nella R. Scuola di Applicazione per gl'Ingegneri in Roma, id. id.

MASCART (Eleuterio), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto a Parigi, id. id. (Sezione di Fisica generale e sperimentale), id. id.

Fischer (Emilio), Professore nell' Università di Berlino, eletto Socio Corrispondente (Sezione di Chimica generale e applicata), nell'adunanza del 24 gennaio 1897.

Ramsay (Guglielmo), Professore nella Università di Londra, id. id.

Rammelsberg (Carlo Federico), Professore nell'Università di Berlino, id. id. (Sezione di Mineralogia, geologia e paleontologia), id. id.

Schrauf (Alberto), Professore nella Università di Vienna, id. id.

Wallon (Enrico Alessandro), Segretario perpetuo dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), eletto Socio Straniero della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 31 gennaio 1897 ed approvato con R. Decreto del 14 febbraio 1897.

Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia, id. id.

Nani (Cesare), eletto alla carica triennale di Segretario della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche nell' adunanza del 20 giugno 1897, ed approvato con R. Decreto del 20 luglio 1897.

---

# MORTI

10 Luglio 1896.

Bonjean (Giuseppe), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Chimica generale ed applicata).

1 Febbraio 1897.

Gennari (Patrizio), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale).

7 Febbraio 1897.

Ferraris (Galileo), Socio residente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

19 Febbraio 1897.

Schiaparelli (Luigi), Socio residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

19 Febbraio 1897.

Weierstrass (Carlo), Socio straniero della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

15 Marzo 1897.

Sylvester (Giacomo Giuseppe), Socio straniero della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

8 Aprile 1897.

Trévisan de Saint-Léon (Vittore), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale).

22 Aprile 1897.

Berti (Domenico), Socio nazionale non residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

8 Maggio 1897.

Des Cloizeaux (Alfredo Luigi Oliviero Legrand), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia).

15 Maggio 1897.

Serafini (Filippo), Socio corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze giuridiche e sociali).

29 Maggio 1897.

Sachs (Giulio von), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale).

11 Giugno 1897.

Fresenius (Carlo Remigio), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Chimica generale ed applicata).

30 Luglio 1897.

Arneth (Alfredo von), Socio straniero della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

2 Settembre 1897.

Vallauri (Tommaso), Socio nazionale residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

20 Settembre 1897.

Wattenbach (Guglielmo), Socio corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze storiche).

24 Settembre 1897.

Tosti (Luigi), Socio nazionale non residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

13 Ottobre 1897.

Heidenhain (Rodolfo), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata).

---

# PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

**Dal 13 Giugno al 21 Novembre 1897.**

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

**NB. Le pubblicazioni notate con * si hanno in cambio; quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.**

* **Abhandlungen** der k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1896; 4°.
** **Abhandlungen** der k. Preussischen geologischen Landesanstalt. N. F., Heft 22, 28. Berlin, 1897; 8°.
* **Abhandlungen** herausg. von der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft. Bd. XX, Heft I; XXIII, III, IV. Frankfurt a. M., 1897; 4°.
* **Abhandlungen** der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. N. F. Bd. I. Nro 1. Göttingen, 1897; 4°.
* **Acta** Societatis scientiarum Fennicae. T. XXI. Helsingforsiae, 1896; 4°.
* **Acta** et **Commentationes** Imp. Universitatis Jurievensis (olim Dorpatensis), vol. 5°, n. 2. Juriew (Dorpat), 1897; 8°.
** **Allgemeine** Deutsche Biographie. Bd. XLII, Lfg. 209-211. Leipzig, 1896; 8°.
* **American** Chemical Journal. Vol. XVIII, n. 7-10; XIX, n. 1-3. Baltimore, 1896-97; 8° (*dall'Università John Hopkins di Baltimora*).
* **American** Journal of Mathem. Vol. XVIII, n. 3-4; XIX, n. 1-3. Baltimore, 1896-97; 4° (*Id.*).
* **Anales** de la Sociedad Científica Argentina. Entrega V, VI, t. XLIII; I-IV, t. XLIV. Buenos Aires, 1897; 8°.
* **Anales** del Museo Nacional de Buenos Aires. 2ª Ser., t. II. Buenos Aires, 1896-97; 8°.
**Anales** del Museo Nacional de Montevideo, VI. 1897; 4°.
* **Annales** de la Société d'Agriculture, Sciences et Industrie de Lyon. 7ème série, t. IV, 1896. Lyon, 1897; 8°.
* **Annales** de la Société Linnéenne de Lyon. Nouvelle sér., t. 43e. Lyon, 1896; 8°.
* **Annales** des Mines. 9e série, t. XI, livr. 4e-6e; t. XII, livr. 7e, 8e. Paris, 1897,
* **Annales** de l'Observatoire Météorologique du Mont-Blanc. T. I. Paris. 1893; 4° (*dal Direttore Mr J. Vallot*).

* **Annales** de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. XI, année 1897. Paris, 1897; 4°.

* **Annali** dell'Ufficio centrale meteorologico e geodinamico italiano. Serie 2ª, v. XIV, p. II; v. XVI, p. I, 1894. Roma, 1896; f°.

* **Annals** of the New York Academy of Science late Lyceum of Natural history. IX, n. 4 and 5. New York, 1897; 8°.

* **Annual** Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution .....for the year ending june 30, 1894; Report of the U. S. National Museum. Washington, 1896; 8°.

* **Archives** Néerlandaises des sciences exactes et naturelles publiées par la Société hollandaise des sciences à Harlem. Serie II, t. I, 1 livr. Harlem, 1897; 8°.

* **Atti** della Società Italiana di Scienze naturali, vol. XXXVII, fasc. 1°. Milano, 1897; 8°.

* **Atti** della Società dei Naturalisti di Modena; serie III, vol. XIV, anno XXIX. Modena, 1897; 8°.

* **Atti** della R. Accademia medico-chirurgica di Napoli. Anno LI; N. S., n. 3, 4. Napoli, 1897; 8°.

* **Atti** e **Rendiconti** dell'Acc. Medico-chir. di Perugia; vol. IX, f. 2°. 1897; 8°.

* **Atti** della Società toscana di Scienze naturali residente in Pisa; Memorie, vol. XV. Processi verbali, vol. X, 14 marzo al 9 maggio 1897; 8°.

* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Rendiconto dell'Adunanza solenne del 7 giugno 1897; 4°.

* **Atti** dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Anno L, sess. V e VI. Roma, 1897; 4°.

* **Atti** del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; t. LV, disp. 7ª-10ª. Venezia, 1896-97; 8°.

**Australian Museum.** Report of Trustees for the year 1896. Sydney, 1897; 4°.

* **Bericht** über die Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt am Mein, 1897; 8°.

* **Berichte** über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-Phys. Classe. 1897, I-III. Leipzig, 1897; 8°.

* **Berichte** der Bayer. Botanischen Gesellsch. Bd. V. München, 1897; 8°.

**Bibliographie** des Travaux scientifiques (Sciences mathématiques, physiques et naturelles) publiés par les Sociétés Savantes de la France, dressée sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique par J. Deniker. Tome Ir, 2e livr. Paris, 1897 (*dono del Governo Francese*).

* **Bihang** till Kongl. Svenska- Vetenskaps- Akademiens Handlingar. Bd. 22. Afdelning I-IV. Stockholm, 1896-97; 8°.

**Boletin** de la Academia Nacional de Ciencias en Cordoba. T. XV, entr. 2ª y 3ª. Buenos-Aires, 1897; 8°.

* **Boletin** del Istituto Geológico de México. N. 7-9. México, 1897; 4°.

* **Bollettino** del R. Orto Botanico di Palermo. Anno I, fasc. II, 1897; 8°.

**Bollettino** della Associazione " Mathesis „ fra gl'Insegnanti di matematica delle scuole medie. Anno II, n. 1. Torino, 1897; 8°.

* **British-Museum** (Natural History):
Catalogue of Welwitsch'Africa Plants, Pt. I; Catalogue Fossil Cephalopoda, Pt. III; Catalogue of Tertiary Mollusca, Pt. I.
Guide to Fossil Manuals and Birds; Guide to Fossil Reptiles and Fisches; Guide to Fossil Invertebrates and Plants. London, 1896-97; 6 vol. 8°.

* **Bulletin** de la Société d'études scientifiques d'Angers. XXV$^{e}$ année, 1895. Angers, 1896; 8°.

* **Bulletin** de la Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Tom. IX; X, fasc. 1. Bruxelles, 1895-96; 8°.

* **Bulletin** de la Société Belge de Microscopie. XXIII$^{e}$ an., 1896-97, n. V-X. Bruxelles, 1897; 8°.

* **Bulletin** of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XXXI, n. 1-3. Cambridge, 1897; 8°.

* **Bulletin** de l'Académie Royale des sciences et des lettres de Danemark. Copenhague, 1897, n. 2, 3; 8°.

* **Bulletin** of the Scientific Laboratories of Denison University. Vol. IX, part 1. Granville, Ohio, 1895; 8°.

* **Bulletin** de la Société des Sciences naturelles de l'Ouest de la France. T. VI, 4$^{e}$ trimestre 1896; VII, 1$^{er}$ trimestre 1897. Nantes; 8°.

**Bulletin** of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. Vol. IX, n. 47-49. Lincoln Nebraska, 1897; 8° (*dall'Univ. di Nebraska*).

* **Bulletin** du Muséum d'histoire naturelle. Année 1896, n. 7, 8; 1897, n. 1-3. Paris, 8°.

* **Bulletin** de la Société géologique de France. 3$^{e}$ série, t. XXIV$^{e}$, 1896, n. 8-9; XXV$^{e}$, 1897, n. 1-3. Paris, 1897; 8°.

**Bulletin** de la Société Philomatique de Paris. 8$^{e}$ série, t. VIII, 1895-1896, 2, 4; 1896-1897, 1; 8°.

* **Bulletin** de la Société zoologique de France pour l'année 1896. T. XXI. Paris; 8°.

* **Bulletin** de l'Académie Imp. des Sciences de St-Pétersbourg. V$^{e}$ sér., T. III, n. 2-5; IV, n. 1-5; V, n. 1-5; VI, n. 3. St-Pétersbourg, 1897; 8°.

* **Bulletin** on the United States National Museum, n. 47. Washington, 1896; 8° (*dalla Smithsonian Institution*).

* **Bulletins** du Comité géologique de St-Pétersbourg, 1896; t. XV, n. 5; suppl. au t. XV. St-Pétersbourg, 1896; 8°.

* **Bullettino** delle sedute dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania. 1897; fasc. 47-49. Catania; 8°.

* **Catalogus** der Bibliothek van de K. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandisch-Indié. Batavia, 1884; 8°.

* **Česká Akademie Císaře Františka Josefa** pro vědy, slovesnost a Umění.
III. Bulletin international. Résumé des travaux présentés. Sciences mathématiques et naturelles. 1896; 8°.
Rozpravy. Třída II (Mathematiko-Přírodnická). 1896; 8°.
Foraminifery vrstev bělohorských. Sepsal D$^{r}$ Jaroslav Perner. Třída II. 1897; 4°.
Vyšší geodesie. Napsal D$^{r}$ V. Láska. 1896; 8°.
Věstník. Ročník V. 1896. Praze.

**Chicago** (The) **Academy** of Sciences.
Bulletin No. I of the Geological and Natural History Survey.
Thirty-Ninth Annual Report for the year 1896. Chicago, 1896-1897; 8°.

**Coasts** and Geodetic Survey of the United States. Bulletin No. 36. Washington, 1897; 4°.

**Colorado College Studies.** Vol. VI. Colorado Springs, 1896; 8°.

* **Comité international** des Poids et Mesures. Procès-Verbaux des Séances de 1875-76 à 1892, 1894, 1895. Paris, 1876-1896, 19 vol. 8°.

* **Compte-Rendu** des séances de la Société géologique de France. An. 1896, 3e sér., t. XXIV, n. 1-19. Lille; 8°.

* **Comptes-rendus** de l'Académie des Sciences de Cracovie. Avril. Cracovie, 1897; 8°.

* **Denkschriften** der k. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-natur.-wissenschaftliche Classe. Bd. 63. Wien, 1896; 4°.

**Den Norske** Nordhavs-Expedition 1876-1878. XXIV. Botanik: Protophyta: Diatomacae, Silicoflagellata og Cilioflagellata. Christiania, 1897; 4° (*dal Meteorologiske Institut*).

* **Documents & Rapports** de la Société Paléontologique et Archéologique de l'Arrondissement judiciaire de Charleroi. T. XX, 2e liv. Maline, 1895; 8°.

* **Field Columbian** Museum.
Report series, vol. I, n. 2; Anthropological series, vol. I, No. 1; Botanical series, vol. I, No. 3; Geological series, vol. I, No. 2; Ornithological series, vol. I, No. 2; Zoological series, vol. I, No. 6-7. Second annual exchange catalogue for the year 1897-98. Chicago, 1896-97; 8°.

* **Földtani** Közlöny kiadja a Magyarhoni Földtani Társulat. Vol. XXVII, n. 5-7. Budapest, 1896; 8°.

** **Fortschritte** der Physik im Jahre 1891, XLVII Bd., 2, 3 Abt., LII (1896), I u. III Abt. Namenregister, Bd. XXI (1865) bis XLIII (1887); I. Hälfte. Braunschweig, 1897; 8°.

* **Giornale** della R. Accademia di Medicina. A. LX, n. 5-9. Torino, 1897; 8°.

**Informe** del Museo Nacional de Costa Rica 1896-97. San José, 1897; 8° (*dal Governo della Rep.*).

**Internationale Erdmessung.** Das Schweizerische Dreiecknetz herausg. von der Schweizerischen geodätischen Kommission. Siebenter Bd. I Teil. Zürich, 1897; 4°.

* **Jahrbuch** über die Fortschritte der Mathematik. Bd. XXVI, Heft 1, 2. Berlin, 1897; 8°.

* **Jahrbuch** der k. k. geologischen Reichsanstalt zu Wien. Jahrg. 1897. XLVII, 1-2 Heft. Wien, 1897; 8°.

**Jahresbericht** des Direktors des k. Geodätischen Instituts für die Zeit von April 1896 bis April 1897. Potsdam, 1897; 8° (*dal sig. Dr. Helmert Direttore dell'Istituto*).

* **Jahreshefte** des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg. 53 Jahrgang. Stuttgart, 1897; 8°.

* **Jenaische** Zeitschrift für Naturwissenschaft herausg. von der medizinisch-naturw. Gesellschaft zu Jena. N. F. Bd. XXIV, Heft I-II. Jena, 1897; 8°.

* **Journal** of the Asiatic Society of Bengal. Vol. LVI, Part II, Natural Science, n. 1. Calcutta, 1897; 8°.

* **Journal** of Morphology. Edited by C. O. Whitman, .....with the co-operation of Ed. Ph. Allis. Vol. XII, n. 3; XIII, n. 1-3. Boston, 1897; 8°.

* **Journal** of the College of Science Imperial University Japan. Vol. X, part II. Tokio, 1897; 4°.

* **Journal** of the R. Microscopical Society, 1897, part 3-5. London, 1897; 8°.

* **Journal** of Linnean Society. Botany, vol. XXXI, n. 218, 219; XXXII, 220-227; XXXIII, 228. Zoology, vol. XXV, n. 164, 165; XXVI, n. 166, 167. London, 1896-97; 8°.

* **Journal** and **Proceedings** of the R. Society of New South Wales. Vol. XXX, 1896. Sydney, 1897; 8°.

* **Kongligà-Svenska** Vetenskaps-Akademiens. Handlingar Ny Följd. Bd. 28. Stockholm, 1895-96; 4°.

* **List** of Linnean Society of London, 1896-97. London, 1896; 8°.

* **List** (A) of the Fellows and honorary, foreign, and corresponding Members and Medallist of the Zoological Society of London. London, 1897; 8°.

**Magnetische** und Meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1896. Prag, 1897; 4°.

* **Memorias** y Revista de la Sociedad Científica " Antonio Alzate ". T. X (1896-97), N. 1 y 4. Mexico, 1897; 8°.

* **Mémoires** de la Société Royale des Sciences de Liège. 2me série, t. 19e. Bruxelles, 1892, 95; 8°.

* **Mémoires** de l'Académie des Sciences et des Lettres de Danemark. 6e sér. Section des sciences, t. VIII, n. 4. Copenhague, 1897; 4°.

* **Mémoires** de l'Académie des sciences, arts et belles-lettres de Lyon. Sciences et Lettres, 3ème série, t. IV. Lyon, 1896; 8°.

* **Memoires** de l'Académie des sciences et lettres de Montpellier: Section des sciences, 2e sér., t. II, n. 3, 4. Procès-verbaux pour 1894, 2e sér., t. II, n. 2. Montpellier, 1895-96; 8°.

* **Mémoires** de la Société zoologique de France pour l'année 1896. Tome IX. Paris; 8°.

* **Mémoires** de l'Académie Imp. des Sciences de St-Pétersbourg. Classe physico-mathématique. VIIIe série, vol. III, n. 7-10; IV, n. 2-4; V, n. 1-2. St-Pétersbourg, 1896; 4°.

* **Mémoires** du Comité Géologique de Russie. T. XIV, n. 2, 4. St-Pétersbourg, 1896; 4°.

* **Memoirs** of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. XII, n. II, III. Cambridge, 1896; 4°.

* **Memoirs** of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XIX, No. 2; XX, XX and XXI (Plates) XXI. Cambridge U. S. A., 1896; 3 vol. 4°.

* **Memorie** della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Serie V, tomo V, 1895-96; t. VI, fasc. 1, 2; 4°.

**Memorie** del Museo civico di storia naturale di Milano e Società italiana di scienze naturali. T. VI (II della N. S.). Fasc. I. Milano, 1897; 4°.

**Memorie** della Società degli Spettroscopisti italiani. Vol. XXVI, disp. 3ª-9ª. Roma, 1897; 4°.

* **Memorie** del R. Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Vol. XXVI, n. 1, 2. Venezia, 1897; 4°.

**Minnesota** Botanical Studies.
Bulletin N. 9, Part II-XI, 9 fasc. Minneapolis, Minn. 1894-97; 8° (*dal Geological and Natural History Survey of Minnesota*).

* **Mittheilungen** aus dem Jahrbuche der kön. ungar. geologischen Anstalt. Bd. XI, Heft 4, 5. Budapest, 1897; 8°.

* **Mittheilungen** aus der Zoologischen Station zu Neapel. 12 Bd. 4 Heft. Berlin, 1897; 8°.

* **Monthly Notices** of the Royal Astronomical Society. Vol. LVII, n. 7-9. London, 1897; 8°.

* **Nachrichten** von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physik. Klasse, 1897, n. 1. Geschäftliche Mittheilungen, 1897, n. 1. Göttingen; 8°.

* **Natuurkundig** Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië uitgegeven door de k. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indié. N. S. Deel III, Afl. I-VI; IX, Afl. V et VI; Derde Serie, Deel IV; Vijfde Serie, Deel V. Batavia, 1854-1863; 8°.

**North American Fauna**. N° 13. Revision of the North American Bats of the family Vespertilionidae by Gerrit S. Miller. Washington, 1897; 8° (*dall'U. S. Department of Agriculture, Divis. of Biological Survey*).

* **Nouvelles** Archives du Muséum d'histoire naturelle. 3me série, tome VIIIe, 1er, 2e fasc. Paris, 1896; 4°.

* **Nova Acta** Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae, vol. XVII, fasc. 1°. 1896; 4°.

* **Observations** made at the magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Vol. XVIII, 1895. Batavia, 1896; f°.

* **Observations** météorologiques suédoises publiées par l'Acad. R. des Sciences de Suède. Vol. 34 (1892). Stockholm, 1897; 4°.

**Œuvres** complètes d'Augustin Cauchy publiées sous la direction scientifique et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction Publique. 1ère série, t. IX. Paris, 1896; 4° (*dono del Governo francese*).

* **Œuvres** complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société hollandaise des sciences. Vol. VII. La Haye, 1897.

* **Ofversigt** af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar, XXXVIII, 1895-1896. Helsingfors, 1896; 8°.

* **Ofversigt** of Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar. Vol. 53, 1896. Stockholm, 1897; 8°.

** **Palaeontographica.** Beiträge zur Naturgeschichte der Vorwelt. Suppl. II, Sechste-Achte Abth. Stuttgart, 1897; 1 fasc. 8° con 1 Atl. in f°.

**Peabody Institute**, of the city of Baltimore. Thirtieth Annual Report. June 1, 1897. Baltimore, 1897; 8°.

* **Philosophical** Transactions of the Royal Society of London, 1893. Vol. 186, A, part 1ª e 2ª; B, part 1ª e 2ª; Ser. A e B, vol. 187: Ser. A, 188. London, 1895; 4°.

** **Poggendorff's** biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. III Bd., Lief. 10 u. 13. Leipzig, 1897; 8°.
* **Prace** matematyczno-Fizyczne. T. VIII. Warszawa, 1897; 8° (*dalla Società di scienze matematiche e fisiche*).
* **Proceedings** of the Asiatic Society of Bengal. N. I-IV, 1897. Calcutta; 8°.
* **Proceedings** of the American Academy of Arts and Sciences. New Series, vol. XXXII, No. 5-15; XXXIII, No. 1-4. Boston, 1896; 8°.
* **Proceedings** of the Boston Society of Natural history. Vol. XXVII, pag. 75-330; XXVIII, pag. 1-115. Boston, 1897; 8°.
* **Proceedings** of the Cambridge philosophical Society; vol. IX, p. 5a, 6a, 1897.
* **Proceedings** of the Royal Irish Academy. Third series, vol. IV, n. 2, 3. Dublin, 1897; 8°.
**Proceedings** and Transactions of the Nova Scotian Institute of Science. Session of 1895-96, 2e series, vol. II, part 2a. Halifax N. S., 1896; 8°.
* **Proceedings** of the Linnean Society of London. From November 1895 to June 1896. London, 1896; 8°.
* **Proceedings** of the Royal Society. Vol. LX, n. 368; LXI, 375-380. London, 1897; 8°.
* **Proceedings** of the Zoological Society of London for the year 1897. Part I, III. London; 8°.
* **Proceedings** of the Academy of Natural Science of Philadelphia. Part III, 1896. Part I, 1897. Philadelphia; 8°.
* **Proceedings** of the American Philosophical Society held at Philadelphia. Vol. XXXV, No. 152; XXXVI, No. 154. Philadelphia, 1896; 8°.
**Proceedings** of the American Association for the Advancement of Science for the forty-fifth Meeting held at Buffalo, N. Y. August, 1896. Vol. 44. Salem, 1897; 8°.
* **Programm** der Grossherzoglich Badischen Technischen Hochschule zu Karlsruhe für das Studienjahr 1897/98; 8°.
* **Programmi** dei Concorsi scientifici e dei premii d'incoraggiamento proposti dal R. Istituto Veneto e dalle fondazioni Querini-Stampalia, Cavalli e Balbi-Valier per gli anni 1897, 1898, 1899, 1900. Venezia, 1897; 8°.
* **Quarterly** Journal of Geological Society. Vol. LIII, Part 3, n. 211. London, 1897; 8°.
* **Records** of the Geological Survey of India. Vol. XXX, p. 2, 3. Calcutta, 1897; 8°.
* **Register** (Alphabetisch) op Deel I-L van het Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch Indie. 'Sgravenhage, 1871-91. Idem. Naamregister. Deel I-XXX. 'Sgravenhage, 1871; 8°.
* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Vol. XXX, fasc. 12-16. Milano, 1897; 8°.
* **Rendiconti** del Circolo matematico di Palermo. Tom. XI, fasc. IV, V. Palermo, 1897; 8°.
* **Rendiconto** delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. N. S., vol. I (1896-97), fasc. 3°, 4°. 1894; 8°.

* **Rendiconto** dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli. Serie 3ª, vol. III, fasc. 5°, 7°. Napoli, 1897; 8°.

**Report** (17° Annual) of the United States Geological Survey to the Secretary of the Interior 1895-96 (In three parts). P. III. Washington, 1896; 2 vol. 8° gr.

**Report** of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey showing the Progress of the Work during the fiscal Year ending with June, 1895. Washington, 1896; 4°.

**Reports** of the Survey Botanical serie, I. Minneapolis, Minn. 1892; 8° (*dal Geological and Natural History Survey of Minnesota*).

* **Revue** sémestrielle des publications mathématiques redigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam. Tables des matières contenues dans les cinq volumes 1893-1897. Amsterdam, 1897; 8°.

* **Rozprawy** Akademii Umiejętności wydziat Matematyczno-Przyrodniczy. Ser. II, t. X. Krakowie, 1896; 8°.

* **Sitzungsberichte** der k. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. XXVI, 13 Mai-XXXIX, 28 Juli, 1897; 8°.

* **Sitzungsberichte** der physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen. 27 Heft, 1895; 28 Heft, 1896. Erlangen, 1896-1897; 8°.

* **Sitzungsberichte** der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1897, Heft I-II; 8°.

* **Sitzungsberichte** der K. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-natur.-wissenschaftliche Classe. Jahrgang 1895. CV Bd., I Abth. 1-10; II a. Abth. 1-10; II b. Abth. 1-10; III Abth. 1-10. Wien, 1896; 8°.

* **Smithsonian Institution.**
Smithsonian Contributions to Knowledge. 1034; 4°.
Smithsonian Miscellaneous Collections 1035, 1038, 1039, 1047, 1071-1073, 1075, 1077. Washington, 1896-97; 9 fasc. 8°.

**Spelunca.** Bulletin de la Société de Spéléologie. 2ᵉ année, n. 9-11. Paris, 1897; 8°.

* **Thätigkeit** der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in der Zeit vom 1 Februar 1896 bis 31 Januar 1897. Berlin, 1897; 4° (*dall'Istituto Fisico-Tecnico in Charlottenburg*).

* **The Royal** Society. 30th. November 1896; 4° (Elenco dei Soci).

* **Transactions** of the Royal Society of South Australia. Vol. XXI, Part I. Adelaide, 1897; 8°.

* **Transactions** of the Linnean Society of London. Botany, vol. V, p. 5-6. — Zoology, vol. VI, p. 6-8; VII, 1, 3. London, 1896-97; 4°.

* **Transactions** of the Zoological Society of London. Vol. XIV, par. 4. 1897; 4°.

* **Transactions** of the Manchester Geological Society. Vol. XXV, n. VIII-XI, 1897; 8°.

* **Transactions** of the New York Academy of Sciences. Vol. XV. 1895-96; 8°.

* **Transactions** of the American Philosophical Society held at Philadelphia. Vol. XIX, N. S., Part I, 1896; 4°.

* **Upsala Universitet** 1872-1897. Festskrift med anleduing af Konung Oscar II: S tjugofemärs regeringsjubileum den 18 september 1897. Upsala, 1897; 4° (*dono dell'Università di Upsala*).

* **Verhandlungen** der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 11, Heft 3. Basel, 1897; 8°.

** **Verhandlungen** der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 16 Jahrg., n. 8, 9. 1897; 8°.

* **Verhandlungen** des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. N. F. V Bd., V Heft. 1897; 8°.

* **Verhandlungen** der k. k. geologischen Reichsanstalt. Sitzung N. 6-10, 1897. Wien; 8°.

* **Vierteljahrsschrift** der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich. 42 Bd., II Heft, suppl. Zurich, 1897; 8°.

* **Wissenschaftliche** Meersuntersuchungen herausg. von der Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchungen der deutschen Meere in Kiel und der biologischen Anstalt auf Helgoland. N. F. II Bd., Heft I, Abt. 2; Heft 2. Kiel u. Leipzig, 1897; 4°.

* **Журналъ** русскаго физико-химическаго Общества при Императорскомъ С. Петербургскомъ Университетѣ; t. XXIX, n. 5-7. 1897; 8°.

### * *Dall' Università di California:*

**Appendix** e to the biennal Report of the Board of State Viticultural Commissioner for 1891-92. Wine. Classification — Wine tasting — Qualities and defects. Sacramento, 1892; 8°.

**Bulletin** of the Department of Geology. Vol. I, No 12-14; II, No 1-3. Berkeley, 1896-97; 8°.

**Grape Syrup.** Appendix A to the annual Report of the Board of State Viticultural Commissioners for 1893. Sacramento, 1893; 8°.

**Howison** (G. H.). On the correlation of elementary Studies; 8°.

**Register** of the University of California 1895-96. Berkeley, 1896; 8°.

**Report** (Annual) of the Board of State Viticultural Commissioners, for 1887. Sacramento, 1887; 8°.

**Report** of Work of the Agricultural Experiment Stations of the University of California for the Year 1894-95. Sacramento, 1896; 8°.

**Report** (Biennal) of the President of the University of California on behalf of the Board of Regents, to his Ex. the Governor of the State. 1894-1896. Sacramento, 1896; 8°.

**Report** of the Viticultural Work during the Seasons 1887-93 with data regarding the vintages of 1887-93. Sacramento, 1896; 8°.

**The Vine** in Southern California; being Reports by Commissioners Bichowsky and Shorb on the present State of the vineyards. Sacramento, 1892; 8°.

**The Vineyards** of Southern California; being the Report of E. C. Bichowsky Commissioner for the los Angeles District, to the Board of State Viticultural Commissioners of California. Sacramento, 1893; 8°.

**The Vineyards** in Alameda County; being the Report of Ch. Bundschu Commissioner for the S. Francisco District, to the Board of State Viticultural Commissioners of California. Sacramento, 1893; 8°.

**The White** Wine Problem. S. Francisco; 8°.
**University** of California. Agricultural experiment Station. Bulletin No 110, 111, 113-115. Berkeley, Cal. 1896-97; 8°.
**University** of California Studies. Vol. 2. No 1. Berkeley, 1897; 8°.

** Dall'Università di Giessen:*

**Bach** (H.). Zur geographischen Verbreitung und Statistik des Trachoms in der Provinz Oberhessen und den angrenzenden preussischen Provinz im Vergleich zu anderen Gegenden Deutschland und Europas. Giessen, 1897; 8°.
**Barth** (W.). Ueber den angeborenen Verschluss des Ureter mit cystenartiger Vorwölbung desselben in die Harnblase. Giessen, 1897; 8°.
**Bauer** (E.). Ueber die Electrolyse von Acetaten verschiedener Metalle. Giessen, 1897; 8°.
**Bernhardt** (L.). Zur Kenntniss des Toluylendiaminikterus. Giessen, 1896; 8°.
**Boström** (H.). Casuistische Beiträge zur Kenntnis der epibulbären Neubildungen. Giessen, 1897; 8°.
**Brückner** (P.). Ein Fall von doppelseitiger homonymer Hemianopsie mit Erhaltung eines kleinen Gesichtsfeldes nach complicirter Schädelfractur in der Gegend des Hinterhauptbeines. Giessen, 1896; 8°.
**Fink** (I.). Ueber die Einwirkung von Brom auf Allylalkohol. Giessen, 1890; 8°.
**Fuchs** (F.). Ueber Achylia Gastrica. Giessen, 1897; 8°.
**Haas** (C.). Ein Fall von Sarkom der Thränendrüse. Giessen, 1897; 8°.
**Hausch** (O.). Zur Casuistik der Mediastinaltumoren. Giessen, 1896; 8°.
**Heckmann** (J.). Ueber das Verhältnis des Kopfes des Neugeborenen zum Kopf der Mutter. Viernheim, 1896; 8°.
**Kolb** (G.). Beiträge zu einer geographischen Pathologie Britisch Ost-Afrikas. Giessen, 1897; 8°.
**Krieg** (P.). Ein Beitrag zu den angeborenen Beweglichkeitsdefekten der Augen. Giessen, 1896; 8°.
**Küchel** (W.). Zur Prognose der Zangenoperationen nach den Erfahrungen an der geburtshülflichen Klinik zu Giessen. Giessen, 1896; 8°.
**Markert** (F.). Die Flossentacheln von Acanthias. Jena, 1896; 8°.
**Mayr** (F.). Ueber den Ammoniakgehalt der Exspirationsluft. Würzburg, 1896; 8°.
**Mayr** (J.). Ueber die Entwickelung des Pankreas bei Selachiern. Wiesbaden, 1897; 8°.
**Mudford** (F. G.). Versuche über die Einwirkung einer Mischung von Chlor und Wasserdampf auf glühende Kohle. Giessen, 1897; 8°.
**Pfannmüller** (W.). Ueber das meningeale Cholesteatom. Giessen, 1896; 8°.
**Ploch** (K.). Ueber das Giessener Dammschutzverfahren. Giessen, 1897; 8°.
**Reuscher** (C.). Bericht über einen Fall von totaler halbseitiger Körperhypertrophie verbunden mit symmetrischer Polydactylie an Händen und Füssen. Giessen, 1897; 8°.
**Rimbach** (R.). Zur Casuistik der Enterokystome. Giessen, 1897; 8°.
**Schwarzmann** (M.). Reciproke Krystallformen und reciproke Krystallprojektionen. Leipzig, 1897; 8°.

**Smits** (A.). Untersuchungen mit dem Mikromanometer. Utrecht, 1896; 8°.
**Stotz** (A.). Zur Aetiologie der Amaurose. Giessen, 1897; 8°.
**Stroh** (K.). Beitrag zur Genese der sacrococcygealen Teratome. Giessen, 1897; 8°.
**Thielmann** (H.). Ammoniak und Chlornatrium im Speichel Gesunder und Kranker. Limburg, 1897; 8°.
**Zacharias** (H. C. E.). Die Kopfschilder-Phylogenese bei den Boiden. Jena, 1897; 8°.

* *Dall' Università di Erlangen:*

**Arcularius** (R.). Ein Fall von Wurzelkropf bei Abies Pichta; zugleich als Beitrag zur Kenntniss der Maserbildung bei Coniferen. Leipzig, 1897; 8°.
**Arnold** (W.). Ueber Luminescenz. Erlangen, 1896; 8°.
**Baumann** (E.). Ein Porro-Kaiserschnitt bei Carcinoma cervicis uteri inoperabile nebst Statistik der Porro-Operationen v. J. 1889-1894. München, 1896; 8°.
**Bayer** (A.). Beitrag zur Diagnostik des otitischen Hirnabszesses. Erlangen, 1896; 8°.
**Becker** (J.). Zur Kenntnis des Thiobiazole und über die Einwirkung von salpetriger Säure auf Diphenylsulfosemicarbazid und Diphenylsemicarbazid. Erlangen, 1896; 8°.
**Bessler** (Ch.). Untersuchungen über alimentäre Glykosurie. Leipzig, 1896; 8°.
**Bessler** (G.). Ein Fall von Fibrosarcom der weichen Gehirnhaut in der hinteren Schädelgrube mit Compression der Oblongata und des Cerebellum. Erlangen, 1896; 8°.
**Bettinghaus** (A.). Geognostische Beschreibung des Rathsberger Höhenzuges. Erlangen, 1896; 8°.
**Burkhardt** (E.). Beiträge zur Kenntnis des Honigs und der Dextrine. Erlangen, 1897; 8°.
**Büttner** (B.). Beiträge zur Kenntnis der Cortex Mururé. Erlangen, 1896; 8°.
**Demeler** (K.). Ueber $\alpha\alpha'$ Diphenylpyridin, $\alpha\alpha'$ Diphenylpiperidin und zwei isomere Diphenacylbromide. Erlangen, 1897; 8°.
**Diehl** (G.). Ueber Gummiknoten in den Lungen. Erlangen, 1896; 8°.
**Donath** (E.). Beiträge zur Kenntnis der Umlagerung stereoisomerer Oxime. Erlangen, 1896; 8°.
**Eckhard** (F.). Beitrag zur Kenntnis der Rosinduline. Erlangen, 1897; 8°.
**Ehrismann** (R.). Beiträge zur Kenntnis des Pulegons. Erlangen, 1897; 8°.
**Eickelberg** (H.). Beitrag zur Kenntnis des Menthons und Pulegons. Erlangen, 1897; 8°.
**Eisen** (K.). Studien über das Verhalten der Reflexe bei gesundem und krankem Nervensystem. Weissenburg a. S., 1897; 8°.
**Eversbusch** (O.). Kurzsichtigkeit und Schule. Erlangen, 1894; 4°.
**Fraenkel** (M.). Zur Kenntniss des Trimethylen-p-tolyldiamin nebst Anhang über $\gamma$-Jodropylamin. Berlin, 1897; 8°.
**Fritsch** (C.). Ueber das electrolytische Leitvermögen fester Lösungen. Leipzig, 1896; 8°.
**Frölich** (H.). Ueber hysterische Gehstörungen. Erlangen, 1897; 8°.

**Fuchs** (L.). Statistik der in den letzten 10 Jahren in der Erlanger Universitäts-Frauenklinik vorgekommenen engen Becken und ihre Therapie. Würzburg, 1896; 8°.

**Fahrmann** (L.). Ueber Röteln. Erlangen, 1896; 8°.

**Füllner** (E.). Beitrag zur Kenntnis der Elektrisiermaschine. Erlangen, 1896; 8°.

**Gallinek** (E.). Der obere Jura bei Inowrazlaw in Posen. St. Petersburg, 1897; 8°.

**Gareis** (P.). Ein Fall von Lymphosarkom im vorderen Mediastinalraum. Erlangen, 1897; 8°.

**Geigenberger** (A.). Zur Geognosie, Agronomie und Hydrographie des Ober- und Untergrundes der Stadt Erlangen und ihrer nächsten Umgegend. Nürnberg, 1895; 8°.

**Gessner** (A.). Beiträge zur Physiologie der Nachgeburtsperiode. Stuttgart, 1897; 8°.

**Giesen** (C.). Ueber einige Abkömmlinge des Aposafranins. Münster i. W., 1896; 8°.

**Gordan** (P.). Ueber Fäulnisbakterien in Obst und Gemüse. Leipzig, 1897; 8°.

**Graf** (F.). Ueber die Einwirkung von primären aliphatischen und aromatischen Monaminen auf o-Oxybenzylalkohol. Erlangen, 1897; 8°.

**Grommes** (F.). Die Bestimmung der Kohlehydrate (Zucker, Stärke, Dextrin) in beliebten Nahrungs- u. Genussmitteln vermittelst einer leicht ausführbaren Methode. Erlangen, 1897; 8°.

**Günther** (E.). Beitrag zur mineralischen Nahrung der Pilze. Erlangen, 1897; 8°.

**Guntram** (H.). Ueber den Einfluss intramolekularer Verhältnisse auf die Bildung von Stickstoffalkyloximidoverbindungen. Erlangen, 1896; 8°.

**Haas** (H.). Ueber einen merkwürdigen Fall von Geschwürsbildung am Oesophagus. Erlangen, 1897; 8°.

**Härtel** (F.). I. Ueber Derivate des Diacetyl- und Dibenzoylbernsteinsäureesters. II. Beitrag zur Kenntnis der sterischen Hinderung chemischer Reaktionen. Erlangen, 1897; 8°.

**Hartmann** (H.). Ueber Oxime des Benzfurils und des Benzfuroins. Erlangen, 1896; 8°.

**Heineke** (H.). Zur Kenntniss der hypertrophischen Lebercirrhose. Erlangen, 1897; 8°.

**Hoepfel** (W.). Ein Beitrag zur Casuistik der congenitalen elephantiastischen Tumoren. Erlangen, 1896; 8°.

**Hoffmann** (M. W.). Ueber Entladungsstrahlen und einige Beziehungen derselben zu den Kathodenstrahlen und Röntgenstrahlen. Leipzig, 1896; 8°.

**Hofmann** (W.). Ueber p-Nitroso und p-amido-phenyl-α-naphtylamin. Erlangen, 1895; 8°.

**Horn** (F.). Ueber das Vorkommen von Proteus vulgaris bei jauchigen Eiterungen. Erlangen, 1897; 8°.

**Hummel** (F.). Geologisch-agronomische Studien im Bereich des westlichen Ufers der Regnitz bei Erlangen. Posen, 1897; 8°.

**Jamin** (F.). Beitrag zur Kasuistik der Dystrophia muscularis progressiva. Berlin, 1896; 8°.

**John** (G.). Ueber Sulfide und verwandte Verbindungen. Erlangen, 1897; 8°.

**Jones** (A. C.). Ueber einige Emissionsspectra des Cadmiums, Zinks und der Haloidverbindungen des Quecksilbers und einiger anderen Metalle. Leipzig, 1896; 8°.

**Kaiser** (A.). I. Die Oxydationsprodukte des Phenols. II. 2. 4 Dinitrophenyl-o-Anisidin und Derivate. Dresden, 1897; 8°.

**Kauert** (M.). Ein Fall von Leukaemia acuta. Lüdenscheid, 1897; 8°.

**Kennel** (A.). 3 Fälle von Cholelithiasis. Erlangen, 1897; 8°.

**Kerckhoff** (C.). Beiträge zur Kenntniss von Carlina acaulis und Atractylis gummifera. München, 1896; 8°.

**Kexel** (H.). Anatomie der Laubblätter und Stengel der Hypericaceae und Cratoxyleae ferner Anatomie der Typhaceae und Sparganiaceae. Erlangen, 1896; 8°.

**Kolb** (O. v.). Ueber eine abnorme Wurzelanschwellung bei Cupressus sempervirens. München, 1896; 8°.

**Klie** (J.). Zusammenstellung der Litteratur zur Differentialdiagnose zwischen Bact. typhi abdominal. und Bact. coli comm. Erlangen, 1896; 8°.

**König** (H.). Zur Charakteristik des β-Anisyhydroxylamins. Erlangen, 1896; 8°.

**Kooy** (J. van Marwyk). Ueber Paratolylsulfocarbazinsäure. Erlangen, 1896; 8°.

**Krafft** (S.). Beiträge zur Kenntniss der Sarraceniaceen-Gattung Heliamphora. München, 1896; 8°.

**Kronacher** (B.). Ein Fall von congenitaler Missbildung an einer unteren Extremität. Fürth, 1896; 8°.

**Kryger** (M. v.). Experimentelle Studien ueber Wirbel-Verletzungen. Leipzig, 1897; 8°.

**Kullmer** (Ph.). Die Laparatomieen der chirurgischen Klinik zu Erlangen aus den Jahren 1890-94 mit besonderer Berücksichtigung Probelaparatomie. Kaiserslautern, 1897; 8°.

**Küntzel** (F.). Ueber chemische Wirkungen der Sarcinen. Erlangen, 1896; 8°.

**Landgraf** (H.). Ueber die in den Jahren 1889-1896 in der Erlanger Medicinischen Klinik behandelten Fälle von Perityphlitis. Erlangen, 1896; 8°.

**Latte** (B.). Ueber ein primär im Retroperitonealraume entstandenes Adenomyoma myxosarcomatodes. Erlangen, 1897; 8°.

**Leonard** (G.). Ueber Verschiebung der mehrfachen Bindung durch alkoholisches Kali bei ungesättigten hochmolecularen Fettkörpern. Erlangen, 1896; 8°.

**Lewy** (A.). Beitrag zur Kenntnis substituierter Ortho-Diamine. Berlin, 1896; 8°.

**Liévin** (W.). Ueber alimentäre Glykosurie. Erlangen, 1897; 8°.

**Linberger** (A.). Ueber Damm- und Scheidenrisse deren Prophylaxe und Therapie in der kgl. Universitäts-Frauenklinik zu Erlangen. Nürnberg, 1897; 8°.

**Linder** (L.). Ueber Prolapsus Uteri bei Nulliparen, Kaiserslautern, 1896; 8°.

**Lowitsch** (L.). Ueber Benzylsulfaminsaeure und Benzylsulfnitrosaminsaeure. Berlin, 1896; 8°.

**Mann** (E.). Beiträge zur Lehre der künstlichen Verdauung des Eiweisses durch Salzsäure und Pepsin. Erlangen, 1897; 8°.

**Mennicke** (L.). Ueber zwei Fälle von Cysticercus racemosus. Jena, 1896; 8°.

**Menzel** (O.). Beitrag zum Bacterienbefund der Galle. Reichenbach i. Schl., 1897; 8°.

**Meyer** (H.). Zur Kenntnis der Benzimidazole der Naphtalinreihe. Erlangen, 1897; 8°.

**Mohr** (L.). Ueber einige Derivate des m-Dijod-p-oxybenzaldehyds. Erlangen, 1896; 8°.

**Neumann** (F.). Ueber Behandlung der Gesichtslagen. Amberg, 1897; 8°.

**Nusslein** (J.). Die Peritonealtuberkulose und ihre operative Therapie. Erlangen, 1896; 8°.

**Paravicini** (K.). Steigerung der Virulenz des Bacterium coli commune bei Gegenwart von Fäulnisbacterien. Bretten, 1897; 8°.

**Perrot** (A.). Kernfrage und Sexualität bei Basidiomyceten. Stuttgart, 1897; 8°.

**Pitterlein** (H.). Ueber Castration bei Myomen des Uterus. Bamberg, 1896; 8°.

**Poetz** (W.). Beiträge zur Kenntniss der basaltischen Gesteine von Nord-Syrien. Berlin, 1896; 8°.

**Praessar** (E.). Die in der Sammlung des mineralogisch-geologischen Instituts der Universität Erlangen enthaltenen Mineralien (mit Ausnahme der Silicate). München, 1896; 8°.

**Probst** (A.). Ueber einen Fall von Gliom des rechten Frontallappens. Wegscheid, 1896; 8°.

**Rall** (X.). Ueber die Enucleation von Strumen. Amberg, 1889; 8°.

**Ranninger** (W.). Ueber Hydramnion. Nürnberg, 1897; 8°.

**Ranzenberger** (G.). Ueber Iso-Amidoxime und ein Spaltungsprodukt des Carbanilido-β-Anisyl-N-Aldoxims. Erlangen, 1896; 8°.

**Rast** (A.). Ueber Cinnolin. Erlangen, 1897; 8°.

**Reess** (W.). Ueber einige Phenazinbildungen. Erlangen, 1897; 8°.

**Reichel** (A.). Ueber die Beteiligung des Trigeminus und Vagus bei Tabes dorsalis. Erlangen, 1896; 8°.

**Ridder** (H.). Ueber eine neue Darstellungs-methode von Thiosemicarbaziden und deren Einwirkung auf Aldehyde. Erlangen, 1897; 8°.

**Rosenbaum** (W.). Aktinogramme, als diagnostisches Hilfsmittel bei Hüftgelenkserkrankungen. Erlangen, 1897; 8°.

**Rossée** (W.). Zur Kenntnis des p-Amidobenzylalkohols. Erlangen, 1896; 8°.

**Rühl** (A.). Ein Fall von primärem, multiplem Endothelsarkom des Kleinhirns. Erlangen, 1897; 8°.

**Ruppert** (A.). Zur Kenntnis des Sulfaminsäuren und Sulfnitrosaminsäuren der aromatischen Reihe. Erlangen, 1896; 8°.

**Saran** (E.). Zur Kenntniss der Isoborneole. Halle a. S., 1897; 8°.

**Sachsse** (R.). Beiträge zur chemischen Kenntnis der Mineralien, Gesteine und Gewässer Palästinas. Leipzig, 1896; 8°.

**Schäfer** (J.). Beiträge zur Kenntnis des Quercits. München, 1896; 8°.

**Schelter** (K.). Die in den letzten fünf Jahren in der Erlanger Klinik vorgenommenen Herniotomien bei Brucheinklemmung. Nürnberg, 1896; 8°.

**Schlichtegroll** (M.). Statistische Beiträge zur Perityphlitis und deren operativen Behandlung. Erlangen, 1896; 8°.

**Schmidgall** (H.). Beitrag zur Casuistik der congenitalen Lid-Anomalien. Stuttgart, 1896; 8°.

**Schmidt** (H.). Ueber die Häufigkeit der Tuberkulose in den verschiedenen Lebensaltern. Freiburg i. B., 1897; 8°.
**Schmidt** (W.). Ueber die Heredität der Tuberkulose nach statistischen Untersuchungen aus der medizinischen Poliklinik. Erlangen, 1897; 8°.
**Schmidt** (W.). Einige orientierende Untersuchungen über das Phenacylidin. Erlangen, 1897; 8°.
**Schmitz** (H.). Ueber Ileus nach Laparotomie. Erlangen, 1897; 8°.
**Schneider** (K. A.). Ein Fall von Gliom der Sehhügel und Vierhügel. Erlangen, 1897; 8°.
**Schwartz** (G.). Wirkung von Alkaloiden auf Pflanzen im Lichte und im Dunkeln. Erlangen, 1897; 8°.
**Schwarz** (F.). Ueber die brom- und jodwasserstoffsauren Salze der Glutinpeptone. Erlangen, 1896; 8°.
**Seiter** (O.). Studien über die Abstammung der Saccharomyceten und Untersuchungen über Schizosaccharomyces octosporus. Erlangen, 1896; 8°.
**Sieber** (W.). Ueber Abkömmlinge des Anhydroformaldehyd-p-Toluidins. München, 1897; 8°.
**Söchting** (E.). Ueber Anorexia hysterica. Erlangen, 1896; 8°.
**Spindler** (W.). Einwirkung von salzsaurem Hydroxylamin und Phenylhydroxylamin auf Nitrosobasen. Berlin, 1896; 8°.
**Sprenger** (H.). Ueber Kondensationen des p. Nitrobenzylchlorids mit primären Aminen. Erlangen, 1897; 8°.
**Stachow** (R.). Ueber einen operativ behandelten Fall von Gehirntumor. Erlangen, 1896; 8°.
**Steiner** (A.). Die Folgen des Verschlusses der Schenkelgefässe. Erlangen, 1896; 8°.
**Steiner** (A.). Ueber die Constitution der Säureamide. Hannover, 1896; 8°.
**Stempfle** (L.). Ein Fall von Leberabscess im Anschluss an ein carcinomatoes entartetes ulcus ventriculi. Erlangen, 1897; 8°.
**Stender** (O.). Ueber einen Fall von Syringomyelie mit bulbären Symptomen, ecc. Erlangen, 1896; 8°.
**Stern** (A.). Die Einwirkung von Ammoniak und Aminbasen auf Disulfide. Zur Kenntnis der Phenylcarbazinsäuren. Breslau, 1896; 8°.
**Strohmeyer** (O.). Anatomische Untersuchung der durch Ustilagineen hervorgerufenen Missbildungen. Erlangen, 1896; 8°.
**Uibeleisen** (K.). Ueber einen Fall von Defectus vaginae. Uterus rudimentarius solidus. Ovarium sinistrum rudimentarium. Hymen duplex. Erlangen, 1896; 8°.
**Velder** (R.). Ein Beitrag zu den Erkrankungen des Conus medullaris und der Cauda equina. Erlangen, 1897; 8°.
**Verwer** (H.). Studien über Aluminate und Pikrate. Erlangen, 1896; 8°.
**Wagner** (H.). Beiträge zur Kenntnis des Cordierits. Stralsund, 1894; 8°.
**Wattendorff** (F.). Hysterischer Mutismus. Erlangen, 1897; 8°.
**Weigel** (H.). Beitrag zur Casuistik der Syringomyelie. Erlangen, 1897; 8°.
**Wenzel** (A.). Einwirkung von Senfölen auf β-Alkylhydroxylamine. Erlangen, 1896; 8°.
**Wiegner** (A.). Ueber Sinus Thrombose nach Otitis media. Wiehe i. Th., 1896; 8°.

**Wiethoff** (A.). Ueber Nephrotyphus. Hemer i. W., 1896; 8°.
**Wolff** (J.). Ueber Einwirkung von Aminbasen auf Phenyldithiobiazolon-disulfid, sowie Beiträge zur Kenntnis des Phenyldithiobiazolonhydro-sulfamins. Erlangen, 1897; 8°.
**Zander** (E.). Vergleichende und kritische Untersuchungen zum Verständnisse der Jodreaktion des Chitins. Bonn, 1897; 8°.
**Zellner** (H.). Beiträge zur Kenntnis der Condensationsproducte der o. Diamine mit Formaldehyd. Berlin, 1896; 8°.
**Zendig** (R.). Lichtelektrische Wirkungen bei hohen Potentialen. Breslau, 1897; 8°.
**Zucker** (A.). Beitrag zur direkten Beeinflussung der Pflanzen durch die Kupfervitriol-Kalkbrühe. Stuttgart, 1896; 8°.

### * *Dall'Università di Heidelberg:*

**Arnsperger** (H.). Ueber verästelte Knochenbildung in der Lunge. Jena, 1896; 8°.
**Avery** (S.). I. Ueber Dibrompseudocumenol-Bromid. II. Ueber methylierte Glutarsäuren. Heidelberg, 1896; 8°.
**Baader** (W.). Ein Beitrag zur Lehre von der diuretischen Wirkung der Salze. Tübingen, 1896; 8°.
**Baebenroth** (F.). Ueber Condensationen von Malonsäure und Malonester mit Aldehyden. Heidelberg, 1897; 8°.
**Bartsch** (C.). Ueber Einwirkung von Chlorwasserstoff auf die methylalkoholische Lösung von Azokörpern. Heidelberg, 1897.
**Baum** (F.). Ueber die Konstitution des Dibrompseudocumenolbromids und seiner Umwandlungsprodukte. Heidelberg, 1897; 8°.
**Bayer** (J.). Zur primären Trepanation bei Schussverletzungen des Schädels. Tübingen, 1896; 8°.
**Bialon** (K.). Ueber Abkömmlinge des m-Biscyclohexans. Berlin, 1897; 8°.
**Bondzyński** (St.). Ueber das Verhalten einiger Salicylsaüreester im Organismus. Leipzig, 1896; 8°.
**Borgnis** (M.). Ueber Uterus-Rupturen. Heidelberg, 1896; 8°.
**Brauer** (L.). Der Einfluss des Quecksilbers auf das Nervensystem des Kaninchens. Leipzig, 1897; 8°.
**Buff** (W. H.). I. Zur Kenntnis der tertiären Alkohole. II. Ueber das Methylalizarin. Crefeld, 1897; 8°.
**Campenhausen** (G. B.). I. Ueber Oxytrimethylbernsteinsäure. II. Abnorme Bromderivate des as. m-Xylenols. Heidelberg, 1896; 8°.
**Cohn** (R. D.). Ueber einen Fall von Teratoma corneae congenitum mit vorderen und hinteren Synechien und Cataract. München, 1896; 8°.
**Cohnheim** (O.). Ueber das Salzsäure-Bindungsvermögen der Albumosen und Peptone. München, 1896; 8°.
**Dahl** (A.). Ueber Diphenylindon. Anhang: Ueber Diphenylthienylmethan. Heidelberg, 1897; 8°.
**Deissmann** (F. G.). Untersuchungen über die Zusammensetzung der Kolostrum-Milch und Ermittelung der Stoffveränderungen beim Uebergange zur normalen Milch, ... Halle A. S., 1897; 8°.

**Dittrich** (M.). Das Wasser der Heidelberger Wasserleitung in chemisch-geologischer und bacteriologischer Beziehung. Heidelberg, 1897; 8°.

**Feldmann** (W.). Beiträge zur Kenntnis der Individualität des Saatkorns bei Weizen, Gerste und Erbsen. Bonn; 8°.

**Fritz** (S.). Beiträge zur Friedel-Crafts'schen Reaktion. Heidelberg, 1897; 8°.

**Futterer** (W.). Beiträge zur Anatomie und Entwicklungsgeschichte der Zingiberaceae. Cassel, 1896; 8°.

**Fulda** (H. L.). I. Ueber einige zweifach para-substituierte Derivate des Azobenzols. II. Ueber para-Toluol-azo-metaxylenol. Heidelberg, 1896; 8°.

**Georgs** (N.). Ein Beitrag zur Schätzung des Wertes der Phosphorsäure in verschiedenen Phosphaten. Göttingen, 1896; 8°.

**Gilbert** (H.). Ueber die Differentialdiagnose zwischen ausgehusteten nekrotischen Massen einer Steinhauerlunge einerseits, Bronchial- und Lungensteinen andererseits. Heidelberg, 1897; 8°.

**Göppert** (F.). Beitrag zur Lehre von der Lymphosarcomatose. Berlin, 1896; 8°,

**Grandefeld** (C.). Ueber Kondensationen von Maleinsäureanhydrid mit Phenoläthern. Heidelberg, 1896; 8°.

**Grevel** (W.). Anatomische Untersuchungen über die Familie der Diapensiaceae. Cassel, 1897.

**Grosse** (S.). Ueber Metalltrennungen in einem Chlorwasserstoffstrome. Heidelberg, 1897; 8°.

**Gundlich** (Ch.). Ueber den Abbau einiger cyclischer Hexenone ($\Delta_2$-*Keto-R-hexene*). Heidelberg, 1896; 8°.

**Hacker** (O.). Die wirtschaftliche Bedeutung der Zusammenlegung ländlicher Gründstücke, mit spezieller Berücksichtigung der Feldbereinigung in Baden. Heidelberg, 1896; 8°.

**Harle** (E. F.). Ueber Purpura und ihr Verhältnis zum Skorbut. Heidelberg, 1896; 8°.

**Hartmann** (B. G.). Ueber die Esterbildung aromatischer Säuren. Heidelberg, 1897; 8°.

**Hecker** (A.). Ein Beitrag zur rationellen Kultur des Leins. Berlin, 1897; 8°.

**Heidenreich** (O.N.). Analytisch-chemische Untersuchungen. Heidelberg, 1897; 8°.

**Helwig** (L.). Ueber Dysmenorrhoe mit besonderer Berücksichtigung der Dysmenorrhoea mechanica. Zweibrücken, 1897; 8°.

**Heubach** (F.). Ueber Umlagerungsprodukte jodierter Hydrazoverbindungen. Heidelberg, 1897; 8°.

**Hof** (L. E.). Ueber Dibrompseudocumenolbromid -chlorid und -jodid. Heidelberg, 1897; 8°.

**Hoffmann** (H.). Beiträge zur Kenntnis der Kondensationen von Aldehyden mit Acetessigester. Heidelberg, 1897; 8°.

**Jacobs** (J.). Ueber Isovaleryliden- und Oenanthyliden-Diacetessigester. Heidelberg, 1896; 8°.

**Jänichen** (E.). Beiträge zur Kenntnis des Turbellarienauges. Leipzig, 1896; 8°.

**Jankowski** (E.). Zur Kenntnis der Azoderivate des m-Kresols, des p-Kresols und m-Xylenols. Heidelberg, 1896; 8°.

**Kasbaum** (K.). Myelitis in der Schwangerschaft. Heidelberg, 1897; 8°.

**Kellas** (A. M.). Ueber die Esterifizierungsgeschwindigkeit der monosubstituierten Benzoësäuren und die Verseifungsgeschwindigkeit der Ester. Heidelberg, 1897; 8°.

**Klages** (A.). Studien in der Reihe hydrirter Benzole. Heidelberg, 1897; 8°.

**Kryck** (Ph.). Die Friedel-Crafts'sche Reaktion bei halogensubstituierten Phenoläthern. Heidelberg, 1897; 8°.

**Lauterborn** (R.). Kern- und Zelltheilung von Ceratium hirundinella (O. F. M.). Ludwigshafen am Rhein, 1897; 8°.

**Lehmann** (S.). Casuistische Beiträge zur Colostomie. Tübingen, 1897; 8°.

**Lütjens** (J.). Ueber einige jodierte aromatische Säuren. Heidelberg, 1897; 8°.

**Mac Garvey** (F.). Ueber die Hydrierungsstufen des m-Xylols. Heidelberg, 1897; 8°.

**Meyer** (A.). Beiträge zur Anatomie der Artocarpeen. Darmstadt, 1897; 8°.

**Meyer** (A.). Ueber den Nachweis und die Entstehung der Produkte der Eiweissverdauung, sowie über ihr Schicksal im Organismus. Heidelberg; 8°.

**Meyer** (P.). Der Einfluss des Asparagins auf den Eiweissansatz bei Wiederkäuern. Bonn, 1896; 8°.

**Mieczkowski** (L. v.). Ueber die Fremdkörper der oberen Luftwege unter Berücksichtigung des in der Heidelberger ambulatorischen Klinik für Hals- und Nasenkranke beobachteten Materials. Heidelberg, 1896; 8°.

**Nehrkorn** (A.). Ein Fall von meningealer Perlgeschwulst. Jena, 1896; 8°.

**Oehmichen** (C. G.). I. Zur Kenntnis des Oxynaphtoësäuren. II. Ueber Aether des Phenolphtalein- und Fluorescein-Phenyl-Hydrazids. Heidelberg, 1897; 8°.

**Orton** (K. J. P.). Kryoskopische Untersuchungen. Heidelberg, 1897; 8°.

**Pelzer** (J.). I. Ueber Semidinumlagerung von acetylierten Paraoxyazoverbindungen. II. Kryoskopische Untersuchungen über substituierte Säureanilide. Heidelberg, 1897; 8°.

**Polack** (A.). Beiträge zur Kenntniss des Orthophenylencarbamids. Breslau, 1896; 8°.

**Rech** (J.). Ueber Hirn- und Rückenmarkshernien. Heidelberg, 1896; 8°.

**Reichenbach** (L.). Immunisierungsversuche gegen Staphylococcus pyogenes aureus. Tübingen, 1897; 8°.

**Reis** (J.). I. Ueber α-Methyl-α-oxy-i-hexylessigsäure. II. Ueber eine Reihe neuer Derivate und Umwandlungsprodukte des p-Oxybenzaldehyds. Heidelberg, 1897; 8°.

**Ritter** (J.). Ueber Erysipel mit Ausgang in Sclerem. Heidelberg, 1895; 8°.

**Roelofsen** (J. A.). Beiträge zur Kenntnis der Friedel-Crafts'schen Reaktion. Heidelberg, 1896; 8°.

**Roemer** (E.). Beitrag zur Bestimmung zusammengesetzter Reactionszeiten. Leipzig, 1896; 8°.

**Rupp** (E.). Ueber die perhalogenirten Phtalsäuren und das Hexajodbenzol. Kirchheim u. T., 1897; 8°.

**Salomon** (W.). Ueber alter Lagerungsform und Entstehungsart der periadriatischen granitischkörnigen Massen. Wien, 1897; 8°.

**Schieck** (F.). Ueber die ersten Stadien der experimentellen Tuberculose der Kaninchencornea. Jena, 1896; 8°.

**Schürenberg** (A.). Untersuchungen über die Constitution der Methyl-1-R-3-Cyclohexenone-5. — Condensationsprodukte von Metanitrobenzaldehyd und Acetessigester. Heidelberg, 1897; 8°.

**Schwab** (J.). Ueber multiple Polypenwucherungen im Colon und Rectum. Tübingen, 1897; 8°.

**Senter** (H. A.). Zur Kenntnis des Pseudocumenols. Heidelberg, 1896; 8°.

**Siegele** (H.). Ueber den Nervus Accessorius Willisii im Anschluss an einen Fall von " rechtsseitiger isolirter Accessoriuslähmung „. Heidelberg, 1896; 8°.

**Simon** (O.). Ueber Radicaloperationen bei Inguinal- und Femoralhernien. Tübingen, 1896; 8°.

**Sommer** (R.). I. Ueber die quantitative Bestimmung des Quecksilbers auf elektrolytischem Wege für Zwecke der gerichtlichen Analyse. II. Beiträge zur Friedel-Crafts'schen Reaktion. Heidelberg, 1896; 8°.

**Steinbrenck** (A.). I. Ueber die Monocarbonsäuren des Azobenzols. II. Ueber o-substituierte Derivate des Benzylidenanilins. Heidelberg, 1896; 8°.

**Tigges** (H.). Ueber Reduktion von acetylierten p-Oxyazokörpern. Heidelberg, 1896; 8°.

**Tübben** (J.). Ueber die Hydrierungsstufen des Toluols. Heidelberg, 1897; 8°.

**Turnbull** (A.). Ueber Benzolazo-ar-tetrahydro-$\alpha$-Naphtol und seine Derivate. Heidelberg, 1897; 8°.

**Umber** (Fr.). Ueber die Beziehungen der Harnsäure zu den Nucleinen der Nahrung. Heidelberg, 1896; 8°.

**Wachenhusen** (H.). Ueber Wirbelresektion bei Spondylitischer Drucklähmung. Heidelberg, 1897; 8°.

**Weilandt** (H.). Ueber Destillationen und Sublimationen im Vacuum des Kathodenlichts. Heidelberg, 1897; 8°.

**Weisse** (K. H. O.). Ueber die Einführung eines vierten aromatischen Radikales in das Trephenylcarbinol. Heidelberg, 1896; 8°.

**Wiedermann** (G.). Ueber Hydrierungsstufen des m-Iso-Cymols. Heidelberg, 1897; 8°.

**Wigner** (J. H.). Ueber das Aethylmesitylen. Heidelberg, 1897; 8°.

**Wöhler** (L.). I. Beobachtungen über das Verhalten von Argon. II. Ueber die Durolcarbonsäure. Heidelberg, 1897; 8°.

**Zaar** (K.). Ueber die drei isomeren Brombenzolazophenole und ihre Abkömmlinge. Heidelberg, 1897; 8°.

**Ziegler** (E.). I. Synthese der $\alpha\alpha\alpha_1$-Trimethylglutarsäure. II. Ueber abnorme Bromderivate des as. m-Xylenols. Rostock, 1897; 8°.

**Zillessen** (O.). Ein Beitrag zur Lehre von der Kryptogenen Sepsis. Heidelberg, 1896; 8°.

---

**Ball** (R. S.). Further development of the relations between impulsive screws and instantaneous screws, being the eleventh memoir on the " Theory of screws „. Dublin, 1897; 4° (*dall'A.*).

**Beal** (F. E. L.). Some Common Birds in their relation to Agriculture. Washington, 1897; 8° (*Id.*).

**Bech** (M.). Étude expérimentale sur l'électro-magnétisme renversant toutes les idées actuellement admises sur cette science. Paris, 1897; 8° (*dall'A.*).

**Berg** (C.). Memorias del Museo Nacional correspondiente al año 1894-1896. Buenos Aires, 1897; 8° (*Id.*).

* **Bunte** (H.). Wissenschaftliche Forsunchung und Chemische Technick. Karlsruhe, 1896; 8° (*dalla Gross. badischen technischen Hochschule zu Karlsruhe*).

* **Burattini** (T. L.). Misura universale. Cracovia, 1897; 8° (*dall'Accademia delle Scienze di Cracovia*).

**Carnoy** (J. B.) et **Lebrun** (H.). La fécondation chez l'Ascaris Megalocephala. Lierre et Louvain, 1897; 8° (*dagli AA.*).

** **Cayley** (A.). The collected Mathematical papers. Vol. XII. Cambridge, 1897; 4°.

**Daubrée** (Auguste). 25 juin 1814-29 mai 1896. Mâcon, 1896; 8° (*de la part des enfants de M. Daubrée*).

**Devincenzi** (G.). Studi della Commissione del credito pei miglioramenti agrari. Roma, 1897; 8° (*dall'A.*).

**Falangola** (F.). Discorso commemorativo di Luigi Federico Menabrea. Roma, 1897; 8° (*Id.*).

**Fergola** (E.). Novella determinazione della costante dell'aberrazione e della latitudine di Napoli da osservazioni fatte nel R. Osservatorio di Capodimonte negli anni 1893-94. Napoli, 1897; 8° (*Id.*).

**Ferrari** (D.). Contributo allo studio di correnti elettro-organiche e di elettricità di minima quantità e tensione da esse svelate. Genova, 1897; 8° (*Id.*).

**Gallizia** (P.). Il teorema del minimo lavoro applicato alla cerchiatura a caldo dei cannoni. Roma, 1897; 8° (*Id.*).

* **Haus** (Joh. Ad.). Ueber " Activirte " Metalle (Metallpaare) und die Verwendung des activirten Aluminius zur Reduction in neutraler Lösung. Leipzig, 1896; 8° (*dalla Grossherzogl. technischen Hochschule zu Karlsruhe*).

**Helmert** (F. R.). Der Einfluss der Elasticität der Pendel bei absoluten Schwerebestimmungen. 1897; 4° (*dall'A.*).

**Keller** (F.). Sull'intensità orizzontale del magnetismo terrestre nei pressi di Roma. Roma, 1897; 8° (*Id.*).

**Kühnen** (Fr.). Die Neumessung der Grundlinien bei Strehlen, Berlin und Bonn ausgeführt durch das Geodätische Institut. Berlin, 1897; 4° (*dal sig. Helmert, Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia*).

**Lanciai** (G. B.). Teoria elementare dei fenomeni elettrici e magnetici. Vol. I: Elettrostatica. Torino, 1897; 8° (*dall'A.*).

**Lombardi** (L.). Ricerche teoriche e sperimentali sul trasformatore di fase Ferraris-Arnò. Roma, 1897; 4° (*Id.*).

**Lussana** (S.). Sul calore specifico dei gas. Ricerche sperimentali. Venezia, 1897; 8° (*Id.*).

— Contributo allo studio della resistenza elettrica delle soluzioni considerata come funzione della pressione e della temperatura. Pisa, 1897 (*Id.*).

— Osservazioni sismiche fatte nei mesi aprile-luglio del 1895. Siena, 1897; 8° (*Id.*).

**Marchesetti** (C.). Flora di Trieste e dei suoi dintorni. Trieste, 1896-97; 8° (*dall'A.*).

**Marini** (A.). Sulla istituzione di scuole agrarie elementari comunali. Torino, 1897; 8° (*Id.*).

**Marth** (A.). Ephemeris for physical Observations of the Moon, 1897 September to 1898 April. London, 1897; 8° (*Id.*).

** **Ostwald** (W.). Lehrbuch der allgemeinen Chemie. II Bd., II Liefg. Leipzig, 1897; 8°.

**Pagliani** (S.). Commemorazione di Galileo Ferraris. Palermo, 1897; 8° (*dall'A.*).

**Pittei** (C.). Terremoto del 18 maggio 1895. Breve relazione e curve sismografiche. Firenze, 1895; 8° (*Id.*).

** **Reichenbach** (L.) et (H. G.). Icones florae Germanicae et Helveticae simul terrarum adjacentium ergo Mediae Europae. Tomo 23. Decas 7/8. Lipsiae, 1897; 4°.

**Salvioni** (E.). Sul passaggio dell'elettricità attraverso interruzioni estremamente piccole. Perugia, 1897; 8° (*dall'A.*).

**Sars** (G. O.). An account of the Crustacea of Norway. Vol. II. Isopoda. P. V a VIII. Bergen, 1897; 8° (*Id.*).

**Schiaparelli** (G.). Rubra Canicula. Nuove considerazioni circa la mutazione di colore che si dice avvenuta in Sirio. Rovereto, 1897; 8° (*Id.*).

**See** (T. J. J.). Researches on the evolution of the Stellar Systems. Vol. I. Lynn, Mass. U. S. A., 1896; 4° (*Id.*).

**Stok** (J. P. v. Der). Wind and weather, currents, tides and tidal Streams in the East Indian Archipelago. Batavia, 1897; f° (*dal Governo delle Indie Neerlandesi*).

**Todaro** (F.). Marcello Malpighi. Discorso inaugurale pronunziato l'8 settembre 1897 a Crevalcore. Roma, 1897; 8° (*dall'A.*).

**Trinchera** (B.). Nuovo sistema per rendere più facile ed attuabile anche nei profondi abissi dello aperto mare l'antico metodo di fondare con calcestruzzo dato in opera per immersione e progetto di un doppio bacino di carenaggio nel porto di Napoli. Napoli, 1897; 8° (*Id.*).

**Villari** (E.). Intorno alle azioni delle diverse cariche elettriche sulla proprietà scaricatrice destata nell'aria dai raggi X. Napoli, 1897; 8° (*Id.*).

— Sullo stato elettrico dei prodotti elettrolitici dell'acqua e sulla condensazione dei vapori d'acqua per le scintille. Napoli, 1897; 8° (*Id.*).

— Delle azioni dell'elettricità sulla virtù scaricatrice indotta nell'aria dai raggi X. Roma, 1897; 8° (*Id.*).

** **Vinci** (Leonardo da). Il Codice Atlantico; fasc. XIII. Milano, 1897; f°.

**Waldeyer** (W.). Das Trigonum vesicae. Berlin, 1897; 8° (*dall'A.*).

**Weinek** (L.). Ueber das feinere selenographische Detail der Focalen Mond-Photographien der Mt. Hamiltoner und pariser Sternwarte. Prag, 1897; 8° (*Id.*).

---

## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

---

### Dal 20 Giugno al 28 Novembre 1897.

---

* **Abhandlungen** der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Historisch-Philologische Klasse. N. F., Bd. I, N. 6, 8; II, n. 1-3. Göttingen, 1897; 4°.

* **Abhandlungen** der philologisch-historischen Classe der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft. Bd. XVII, n. 4. Leipzig, 1897; 8°.

**Achtunddreissigste** Plenarversammlung der historischen Kommission bei der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Bericht des Sekretariats. München, 1897; 4°.

**Agriculture** (L'), l'élevage, l'industrie et le commerce dans la province de Buenos Aires en 1895; 8° (*dal Bureau général de Statistique de la prov. de Buenos-Aires*).

* **American** Journal of Philology. Vol. XVII, n. 1-3. Baltimore, 1896; 8° (*dall'Università John Hopkins di Baltimora*).

* **Analecta** Bollandiana. T. I-XVI, fasc. 1-2. Paris-Bruxelles, 1882-1897.

* **Analele** Academiei Romane. Seria II, Tomulu XVIII. Memoriile Secțiuneĭ istorice. Partea administrativă și desbaterile. Tomulu XVIII, XIX; 1895-97. Bucuresci, 1896-97; 4°.

* **Anales** de la Universidad (*República Oriental del Uruguay*). VIII, Entr. 5ª, 6ª; t. IX, 1ª, 2ª. Montevideo, 1897; 8°.

* **Anecdota** ex codicibus hagiographicis Johannis Gielemans Canonici Regularis in Rubea valle prope Bruxellas ediderunt Hagiographi Bollandiani. Bruxelles, 1895; 8°.

* **Annales** de la Société d'Archéologie de Bruxelles. T. XI, liv. I-IV, 1896-97. Bruxelles, 1897; 8°.

* **Annali** della R. Scuola Normale superiore di Pisa. Filosofia e Filologia, vol. XII. Pisa, 1897; 8°.

* **Annali** dell'Università di Perugia. Pubblicazioni periodiche della Facoltà di Giurisprudenza. N. S. Vol. VII, fasc. 2°-4°. Perugia, 1897; 8°.

* **Annuaire** de la Société d'Archéologie de Bruxelles, 1896, tome huitième. Bruxelles, 1897; 8°.

**Annuaire** statistique de la ville de Buenos-Ayres. VIᵉ année, 1896. Buenos-Ayres, 1897; 8° (*dalla Direzione Gen. di Statistica municipale*).

**Annuario** statistico italiano 1897. Roma, 1897; 8° (*dono del Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio*).

* **Annuario** demografico de la República Oriental del Uruguay, Año VII-1896. Montevideo, 1897; 8°.

* **Archiv** für österreichische Geschichte. Herausg. von der zur Pflege vaterländischer Geschichte aufgestellten Commission der k. Akad. der Wissenschaften, LXXXIII Bd., Zweite Hälfte. Wien, 1897; 8°.

* **Årsskrift,** Upsala Universitets, 1896. Upsala (1896-97); 8:o.

* **Atti** e Rendiconti dell'Accademia di scienze, lettere e arti dei Zelanti di Acireale. Nuova serie, vol. VII. Acireale, 1896-97; 8°.

* **Atti** della R. Accademia economico-agraria dei Georgofili di Firenze, 4ª serie, vol. XX, disp. 2, 1897; 8°.

**Atti** della R. Accademia di scienze, lettere e belle arti di Palermo. 3ª ser., a. 1896, vol. 4°, 1897; 4°.

* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Serie V. Classe di Sc. mor., stor. e filol., ser. V, vol. V. Notizie degli Scavi: Marzo-Ottobre 1897; 4°.

* **Biblioteca** (La) comunale e gli antichi archivi di Verona dal 1° luglio 1895 al 31 dicembre 1896. Verona, 1897; 4°.

** **Bibliotheca** Philologica Classica. Vol. XXIV, 1897. Trimestre secundum et tertium. Berlin; 8°.

* **Bibliotheca** hagiographica graeca seu elenchus vitarum Sanctorum graece typis impressarum ediderunt Hagiographi Bollandiani. Bruxelles, 1895; 8°.

* **Bibliotheca** Indica: A Collection of Oriental Works published by the Asiatic Society of Bengal. New series, n. 886-900; 8° e 4°. The index of the Maásir-ul-Umara, vol. II, fasc. XII. Calcutta, 1897; 8°.

* **Boletin** de la Real Academia de la Historia. T. XXX, cuad. VI; t. XXXI, cuad. I-IV. Madrid, 1897; 8°.

* **Bollettino** della Società Umbra di Storia Patria. Anno III, fasc. I, II. Perugia, 1897; 8°.

* **Bulletin** de la Société d'Études des Hautes-Alpes. IIe série, n. 21, 1er trimestre 1897. Gap; 8°.

* **Bulletin** et **Mémoires** de la Société Nationale des Antiquaires de France. VIe série, t. V. Mémoires 1894. Paris, 1895; 8°.

* **Bulletin** de la Société Nation. des Antiquaires de France, 1895. Paris; 8°.

* **Bulletin** de la Société de Géographie. 7me série, t. XVIII, 1er et 2me trimestre 1897. Paris; 8°.

**Bulletin** de la Société pour la conservation des monuments historiques d'Alsace. II sér., t. XVIII, 2me livr. Strassburg, 1897; 8°.

* **Camera dei Deputati** del Regno d'Italia. Raccolta degli Atti parlamentari della XIX Legislatura. Disegni di Legge e Relazioni. 10 vol., 4°; Documenti, 2 vol., 4°; Discussioni, 7 vol.; 4°.

Mancini. Discorsi parlamentari, dal vol. 4° all'8° ed ult. vol.; 5 vol.; 8°.

Catalogo metodico, parte 1ª, " Scritti biografici e critici „, 3° Supplemento, 1 vol.; 8°.

Manuale ad uso dei Deputati per la XXª Legislatura. 1 vol.; 8°.

Pais-Serra. Relazioni della inchiesta sulla Sardegna. 1 vol.; 4°.

* **Catalogus** codicum hagiographicorum graecorum Bibliothecae Nationalis Parisiensis ediderunt Bollandiani et Henricus Omont. Bruxellis-Parisiis, 1896; 8°.

* **Catalogus** codicum hagiographicorum latinorum antiquiorum saeculo XVI qui asservantur in Bibliotheca Nationali Parisiensi, ediderunt Hagiographi Bollandiani. Vol. I-III et Indices. Bruxellis, 1893; 8°.

**Cause di morte.** Statistica dell'anno 1895 e notizie sommarie per l'anno 1896. Roma, 1896; 8° (*dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio*).

* **Česká Akademie Císaře Františka Josefa** pro vědy, Slovesnost a Umění.

Almanach. Ročnik VII.

Archiv pro Lexikografii a Dialektologii. III Třída: Číslo I, Svazek první, druhý. 1896-97; 8°.

Historický Archiv. Číslo 8, 9. 1896; 8°.

Rozpravy. Třída I (Pro vědy filosofické právní a historické). Ročnik V, 1896; 8°.

Rozpravy. Třída III (Filologická). Ročnik V, 1896; 8°.

Sbírka Pramenův ku Ponznání literárního života v čechách, na moravě a v Slezsku. Číslo 3. 1897; 8.

Život a spisy Václava Bolemira Nebeskeho. Sepsal D^r J. Hanus. 1896; 8°.

Život Církevní v čechách. Sepsal Zikmund Winter. 1896; 8°.

Frisinské pamatky jich vznik a význam v slovanském písemnictvi. Praze, 1896; 4°.

* **Comercio** exterior y movimento de navigacion de la República Oriental del Uruguay y varios otros datos correspondientes al año 1896 comparado con 1895. Montevideo, 1897; 4° (*dal Governo della Repubblica*).

**Concorso** per lo svolgimento del tema dei rapporti fra Stato e Chiesa in Italia, indetto col Manifesto pubblicato nella " Gazzetta Ufficiale " del 23 gennaio 1896, n. 18. Roma, 1897 (*dai Relatori*).

* **Denkschriften** der k. Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Classe. XLIV Bd. Wien, 1896; 4°.

* **Eranos.** Acta philologica suecana. Edenda curavit Vilelmus Lundström. Vol. I, fasc. 2-4, 1896; vol. II, fasc. 1, 1897. Upsaliae; 8°.

* **Fontes rerum austriacarum.** Œsterreichische Geschichts-Quellen. Herausg. von der Commission der k. Akad. der Wissenschaften in Wien. XLIX Bd., Erste Hälfte. Wien, 1896; 8°.

* **Föreläsningar** och öfningar vid Kongl. Universitetet i Upsala höstterminen 1896. Upsala, 1896; 8:o.

— — vår-terminen 1897. Upsala, 1897; 8:o.

* **Giornale** della Società di letture e conversazioni scientifiche di Genova. Anno XIX, fasc. III. Genova, 1897; 8°.

* **Grada** zu povjest kńiževnosti hrvatske. Na svijet izade Jugosl. Akad. znanosti i umjetnosti. Kńiga 1. Uredio Milivoj *Šrepel.* Zagrebu, 1897; 8°.

* **Institut de France:**

Annuaire pour 1897; 8°.

Mémoires de l'Académie des Sciences morales et politiques, t. XX.

Catalogue des Actes de François I[er], publiés par l'Académie des Sciences morales et politiques, t. VII[e], 2[d] Suppl. Paris, 1896-97.

Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres. 1[e] sér., t. X.

**Inventaire** sommaire des Archives Départementales antérieur à 1790:

*Charente*, Archives civiles; sér. E.

*Seine et Oise*, Archives civiles; sér. E.

*Deux-Sèvres*, séries C, D, E, F, G, H.

*Nord*, Archives Communales antérieures à 1790.

*Ville de Thuire*, Archives Communales antérieures à 1790.

*Ville de Bordeaux*, Archives Municipales; Période révolutionnaire (1789, an. VIII).

*Angoulême*, *Bordeaux*, *Lille*, *Melle*, *Perpignan*, *Versailles*. 1896-97, 6 vol.; 4° (*dal Governo della Rep. Francese*).

* **Johns Hopkins University Studies** in Historical and Political Science. Fourteenth Series, VIII-X; Fifteenth Ser., I-II; XI, XII. Baltimore, 1896; 8°.

* **Journal** of the Asiatic Society of Bengal. Vol. LXV, Part III, 1896, Special Number; Vol. LXVI, Part I, History Literature. Calcutta, 1897; 8°.

* **Ljetopsis** jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti za godinu 1896. Jedanaesti svezak. Zagrebu, 1897; 16°.

* **Mémoires** de l'Académie des sciences et lettres de Montpellier; Section des lettres. 2[ème] série, t. 1[r], n. 5-7. Montpellier, 1895-96; 8°.

**Mémoires** publiés par les Membres de la Mission Archéologique française au Caire. T. VI, 5[e] fasc.; X, 4[e] fasc. Paris, 1897; 4° (*dal Ministero dell'Istruzione Pubblica e di Belle Arti di Francia*).

* **Mémoires et Documents** publiés par l'Académie Chablaisienne. T. X. Thonon, 1895; 8°.

* **Mittheilungen** der prähistorischen Commission der k. Akademie der Wissenschaften. I Bd., n. 4, 1897. Wien; 4°.

** **Monumenta Germaniae historica.** Libelli de lite Imperatorum et Pontificum saeculis XI e XII. Conscripti, Tomus III. Legum Sectio II. Capitularia regum Francorum. Tomi II, pars tertia. Hannoverae, 1897; 4°.

**Movimento** commerciale del Regno d'Italia nell'anno 1896. Roma, 1896; 4° (*dal Ministero delle Finanze, Direzione generale delle Gabelle*).

**Movimento** della navigazione 1896. Roma, 1897; 4° (*dal Ministero delle Finanze, Direzione generale delle Gabelle*).

* **Nachrichten** von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Philologisch-historische Klasse, 1897, Heft 2. Göttingen; 8°.

** **Raccolta** ufficiale delle Leggi e dei Decreti del Regno d'Italia. 1897, dalla p. 401-2799; 8°.

* **Rad** jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti. Knjiga CXXX. Razredi filologijsko-historijsky i filosofijsko-juridički. XLVII. Zagrebu, 1897; 8°.

* **Rendiconto** delle Tornate e dei Lavori dell'Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti della Società Reale di Napoli. N. S., Anno XI, gennaio-maggio 1897. Napoli; 8°.

* **Revue** de l'histoire des religions. XVII$^e$ année, t. XXXIII, n. 3; t. XXXIV, n. 1-3; XVIII$^e$ année, t. XXXV, n. 1. Paris, 1896-97 (*Annalès du Musée Guimet*).

* **Rozprawy** Akademii Umiejętnosci wydziat Filozoficzny. Ser. II, t. X. Krakowie, 1897; 8°.

* **Rozprawy** Akademii Umiejętności wydziat Historyczno-Filozoficzny. S. II, t. VIII, IX. Krakowie, 1896-97; 8°.

* **Sitzungsberichte** der philosophisch-philologischen und der historischen Classe der k. b. Akademie der Wissens. zu München. 1897, Heft I-III; 8°.

* **Sitzungsberichte** der k. Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Classe. CXXXIV, CXXXV Bd., Jahr. 1895, 1896. Wien, 1896-97; 8°.

**Statistica** giudiziaria penale per l'anno 1895. Roma, 1897; 8° (*dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio*).

**Statistica** della Istruzione elementare per l' anno scolastico 1894-95. Roma, 1897; 8° (*dalla Direzione Generale della Statistica*).

**Statistica** giudiziaria civile e commerciale per l'anno 1895. Roma 1897; 8° (*dal Ministero delle Finanze*).

**Statistica** delle Opere Pie. Vol. X ed ultimo, Abruzzo e Molise, Puglie, Basilicata e Calabrie e Riassunto generale per il Regno. Roma, 1897; f° (*dalla Direzione Generale di Statistica*).

**Statuto** della Società Italiana per la diffusione e l'incoraggiamento degli studi classici. Firenze, 1897; 8°.

* **Tabulae** codicum manu scriptorum praeter graecos et orientales in Bibliotheca Palatina Vindobonensi asservatorum. Edidit Academia Caesarea Vindobonensis. Vol. IX (Codicum musicorum, pars I), Cod. 15501-17500. Vindobonae, 1897; 8°.

**The Whitney Memorial Meeting.**

A Report of that Session of the First American Congress of Philologist, which was devoted to the memory of the late professor William Dwight Whitney, of Yale University; Held at Philadelphia, Dec. 28, 1894. Boston, 1897; 8° (*dalla American Oriental Society*).

**Transactions** of the American Philological Association, 1896. Vol. XXVII. Boston, Mass.; 8°.

* **Transactions** of the Royal Society of Literature. 2. Series, vol. XIX, p. I. London, 1897; 8°.

* **Trei-Deci** de ani de domnie aĭ Regelui Carol I cuvîntărĭ și acte. T. I, 1866-1880; II, 1881-1896. Bucuresci, 1897, 2 vol.; 4° (*dall'Academiei Române*).

**Uebersicht** der Akademischen Behörden Professoren, Privatdocenten, Lehrer, Beamten etc. an der k. k. Leopold-Franzens-Universität zu Innsbruck für das Studienjahr 1897-98; 8°.

**Vorlese-Ordnung** an der k. k. Leopold-Franzens-Universität zu Innsbruck im Winter-Semester 1897/98. Innsbruck, 1897; 4° (*dall'Università di Innsbruck*).

**Yearboock** of the United States Department of Agriculture 1896. Washington, 1897; 8° (*dal Governo degli S. U. d'America*).

** Dall'Università di Erlangen:*

**Abegg** (W.). Der Einfluss des beneficium cedendarum actionum auf die Haftung des Bürgen nach römischem und gemeinem Recht. Berlin,1896;8°.

**Ahles** (M.). Die sozialen Wirkungen der bayerischen Heimatgesetzgebung. München, 1897; 8°.

**Ahrens** (H. E.). Das Blanko-Accept. Erlangen, 1897; 8°

**Amon** (G.). Ueber die Erfüllung schwebender Rechtsverhältnisse im Konkurse. München, 1896; 8°.

**Auffenberg** (O.). Der Fruchterwerb des Pächters nach gemeinem Rechte und nach der deutschen Rechtsentwicklung insbesondere dem bürgerlichen Gesetzbuch für das deutsche Reich. Frankfurt am Main, 1897; 8°.

**Baer** (B.). Die Möglichkeit des Strafprozesses gegen die Erben der Steuerdefraudanten nach Reichs- und Landesrecht. Düsseldorf; 8°.

**Behrend** (F.). Zur Lehre von der condictio causa data causa non secuta. Hannover, 1897; 8°.

**Bellebaum** (K.). Staats- u. Reichsangehörigkeit, Staats- u. Reichsbürgerrecht in Deutschland. Siegen, 1897; 8°.

**Benscher** (A.). Eigentumserwerb an Früchten. Berlin; 8°.

**Bergenthal** (M.). Entstehung und Schutz der Wegservituten mit Berücksichtigung des nach dem bürgerlichen Gesetzbuche geltenden Rechts. Berlin, 1897; 8°.

**Bergmann** (P.). Der Erlass bei Correal und Solidarobligationen. Freiburg i. Br., 1896; 8°.

**Best** (H.). Darlehn und depositum irregulare. Bonn, 1896; 8°.

**Biltz** (O.). Der Phädo Platos und Mendelssohns. Berlin, 1897; 8°.

**Blumenstein** (K.). Der Erbschaftsanspruch nach dem bürgerlichen Gesetzbuche. München, 1896; 8°.

**Brambach** (H. W.). Begriff und Wesen des Geschäftsanteils und Geschäftsguthabens in der eingetragenen Genossenschaft nach dem Reichsgesetz vom 1. Mai 1889. Dillenburg, 1897; 8°.

**Braun** (E.). Finden die Grundsätze des Kaufes auf die emtio spei Anwendung? Leipzig, 1896; 8°.

**Brehmer** (E.). Rechtliche Bedeutung der Willenserklärung im Scherz nach gemeinem Rechte. Erlangen, 1897; 8°.

**Brill** (A.). Die zur Sicherung einer Vertragsobligation vorgenommenen bedingten Eigentums-übertragungen und das Verbot der pfandrechtlichen lex commissoria. Bonn, 1896; 8°.

**Brockhues** (F.). Rechte und Pflichten des zahlenden Bürgen bezüglich der vom Schuldner oder Dritten gestellten Pfänder. Köln, 1896; 8°.

**Brunn** (P.). Die colonia partiaria. Berlin, 1897; 8°.

**Brüss** (J.). Der Belagerungszustand als Rechtsinstitut. Cüstrin, 1897; 8°.

**Buchmann** (W.). Ausübung des an einem Forderungsrechte bestehenden Pfandrechtes. Wesel a. Rhein, 1897: 8°.

**Bücklers** (K.). Unterschied zwischen Leistungsbereitschaft und Leistung. Düsseldorf, 1897; 8°.

**Büren** (C.). Die Hypothek und die Grundschuld des preussischen Eigentumserwerbsgesetzes. Darstellung und Vergleich der beiden Verpfändungsarten. Köln, 1897; 8°.

**Büren** (M.). Die subsidiäre Haftung für Geldstrafen, zu denen andere verurteilt worden, nach den Gesetzen des Deutschen Reichs. Gummersbach, 1896; 8°.

**Cafpari** (D. W.). Rede gehalten bei der Beerdigung der Herrn Dr. phil. et theol. August Köhler..... Erlangen, 1897; 4°.

**Canto** (A.). Die Herabsetzung des Grundkapitals der Aktiengesellschaft mittels Zusammenlegung von Aktien und die Rechte des Einzelaktionärs. Köln, 1897; 8°.

**Claussen** (H.). Die Haftung des Erben für die Nachlassverbindlichkeiten nach dem bürgerlichen Gesetzbuche für das Deutsche Reich. Altona, 1896; 8°.

**Coppel** (C.). Korrespektives Testament und Erbvertrag. Hirschberg i. Schl., 1896; 8°.

**Cramer** (E.). Die Krediterkundigung nach der civilrechtlichen Seite. Würzburg, 1896; 8°.

**Daxer** (G.). Ueber die Anlage und den Inhalt der transscendentalen Aesthetik in Kants Kritik der reinen Vernunft. Halle a. S., 1897; 8°.

**Dehn** (R.). Die Actio Redhibitoria in ihrer Funktion als Schadensersatzklage nach gemeinem Recht. München, 1896; 8°.

**Deus** (P.). Die Vertragsstrafe nach dem bürgerlichen Gesetzbuch. Berlin, 1896; 8°.

**Egelkraut** (P.). Der Einfluss des Daniel von Blühenden Tal vom Stricker auf die Dichtungen des Pleiers. Leipzig-Reudnitz, 1896; 8°.

**Eickhoff** (K.). Die Prioritätseinräumung nach gemeinem Recht. Paderborn, 1896; 8°.

**Epping** (H.). Die Gewährleistung wegen Mängel der Kaufsache nach bürgerlichem Gesetzbuch. Altenburg, 1897; 8°.

**Eulitz** (G.). Der Verkehr zwischen Vives und Budaeus. Chemnitz, 1897; 4°.

**Eyermann** (K.). Die Stellung der offenen Handelsgesellschaft im Prozesse. Würzburg, 1897; 8°.

**Farnbacher** (F.). Der Begriff des sogen. fortgesetzten Verbrechens und seine juristischen Konsequenzen. Bayreuth, 1896; 8°.

**Feichtinger** (E.). Die rechtliche Natur der Prämien-Geschäfte. Erlangen, 1896; 8°.

**Fischer** (H.). Kann sich derjenige auf Nothwehr berufen, dem die Möglichkeit der Flucht offenstand? Köln, 1896; 8°.

**Flechtheim** (J.). Die Beweisbedeutung der Privaturkunde nach Reichscivilprozessrecht. Düsseldorf, 1897; 8°.

**Folkmann** (I.). Ausgewählte nestorianische Kirchenlieder über das Martyrium des heil. Georg von Giwargis Warda. Kirchhain N.-L., 1896; 8°.

**Fourman** (L.). Das pactum de mutuo dando. St. Johann a. d. Saar, 1896; 8°.

**Freimann** (A.). Die Isagoge des Porphyrius in den syrischen Uebersetzungen. Berlin, 1897; 8°.

**Freitag** (O.). Die Besitzverhältnisse an der gefundenen Sache. Halle a. S., 1896; 8°.

**Gallinger** (J.). Die Rechtstellung des Konkursverwalters und der Gläubiger bei Feststellung einer Konkursforderung. Nürnberg, 1896; 8°.

**Gehring** (J.). Die Religionsphilosophie J. E. von Bergers. Leipzig, 1897; 8°.

**Gercke** (M.). Kann der Miteigentümer eine Servitut an der gemeinsamen Sache haben? Berlin, 1896; 8°.

**Gildemeister** (M.). Die Kompensation zwischen Forderungen der Handelsgesellschaft und Forderungen an einen Gesellschafter, sowie zwischen Gesellschaftsschulden und Privatforderungen eines offenen Gesellschafters. Erlangen, 1896; 8°.

**Glaum** (R.). Gehört die Lebensversicherungssumme zum Nachlasse des Versicherten? Köln, 1897; 8°.

**Glier** (L.). Die Advocatia ecclesiae Romanae Imperatoris in der Zeit von 1519 bis 1648 mit besonderer Berücksichtigung der Entwickelung der advocatia ecclesiarum Germanicarum. Passau, 1897; 8°.

**Graumann** (L.). Haftung des Nichtbenefizialerben gegenüber den separierenden Erbschaftsgläubigern. Nürnberg, 1896; 8°.

**Greeven** (G.). Die Siglen *DM* auf altchristlichen Grabschriften und ihre Bedeutung. Rheydt, 1897; 8°.

**Grommes** (P.). Bezieht sich der Schutz des § 193 Strafgesetzbuchs auch auf den Fall der verleumderischen Beleidigung, § 187 St. G. B.? Bonn a. Rh., 1897; 8°.

**Gütermann** (E.). Die rechtlichen Grundlagen der Widerspruchsklage. München, 1896; 8°.

**Gutfeld** (W.). Die legislative Stellung des deutschen Kaisers. Berlin, 1897; 8°.

**Haase** (F.). Die rechtliche Stellung der Geschäftsführer einer Gesellschaft m. b. H. Berlin, 1896; 8°.

**Haber**. Welches Gesetz findet Anwendung auf die Dienstvergehen der preussischen, bei einem Gerichte beschäftigen Gerichtsassessoren? Dresden, 1897; 8°.

**Hasenkamp** (A.). Die gemeinrechtlichen Grundsätze über den Verkauf mit lex commissoria und ihre Modificierung durch das Reichsgesetz betreffend die Abzahlungsgeschäfte vom 16 Mai 1894. Bonn, 1896; 8°.

**Heinze** (A.). Die Pflichten des Emphyteuta gegenüber dem dominus. Berlin, 1896; 8°.

**Heppe** (O.). Aufbewahrungspflicht von unbestellt Zugesendetem. Dortmund, 1896; 8°.

**Herkersdorf** (W.). Wie ist ein Urteil zu vollstrecken, durch welches der Beklagte zur Stellung einer Sicherheit verurteilt wird? Mülheim a. d. Ruhr, 1896; 8°.

**Hertzsch** (B.). Der amtsrichterliche Strafbefehl. Dresden, 1897; 8°.

**Hesse** (M.). Die staatsrechtlichen Beziehungen Aegyptens zur Hohen Pforte auf Grund der Fermane. Berlin, 1897; 8°

**Heymann** (M.). Der Niessbrauch an Forderungen. Bonn, 1896; 8°.

**Hickmann** (J.). Die Behandlung des von einem vollmachtlosen Stellvertreter abgeschlossenen Rechtsgeschäftes nach gemeinem Rechte und nach Handelsrecht. Berlin, 1897; 8°.

**Hilgers** (M.). Die rechtliche Natur der remuneratorischen Schenkung. Köln, 1897; 8°.

**Hieronimi** (J.). Die Haftung des Eigentümers für seine Tiere nach römischem Recht. Erlangen, 1897; 8°.

**Hollender** (J.). Der Eisenbahnfrachtvertrag über Passagiergut und die Haftung aus demselben. Köln, 1897; 8°.

**Holtkötter** (H.). Retentio Gordiana. Rheydt (1897); 8°.

**Holtzapfel** (R. H.). Das Kompensationsrecht des debitor cessus gegen den Cessionar mit einer Forderung an den Cedenten. Erlangen, 1897; 8°.

**Hümpel** (E.). De errore christologico in epistolis Joannis impugnato eiusque auctore. Quaestio historico-critica. Erlangae, 1897; 8°.

**Hütter** (F.). Vergleich zwischen direkter und indirekter Erbeinsetzung (Universalfideicommiss) bezüglich der Person des Eingesetzten. Julich, 1897; 8°.

**Iessenberger** (H.). Systematische Bearbeitung der Eingetragenen Genossenschaften mit der unbeschränkten Haftung. Würzburg, 1897; 8°.

**Jacobs** (W.). Die Idealkonkurrenz. Siegburg, 1897; 8°.

**Jacoby** (M.). Kritische Untersuchungen. Königsberg; 8°.

**Joel** (E.). Die Folgen des Gesetzescharakters der Etatsfeststellung im Reiche und in Preussen. Berlin, 1897; 8°.

**Käb** (L.). Zur Lehre von der Freheitsberaubung. München, 1897; 8°.

**Kahn** (L.). Prolongation und Reportgeschäft in juristischer Construction. Würzburg, 1897; 8°.

**Kaufmann** (D.). Gemeindebesteuerung und Massenkonsum in den sieben grössten Städten des rechtsrheinischen Bayern. Stuttgart, 1897; 8°.

**Kempkes** (J.). Wird durch Verfügung des Käufers über die mangelhafte Sache die actio redhibitoria ausgeschlossen? Rheydt, 1897; 8°.

**Kessler** (J.). Der niedere Kirchendienst in Bayern. München; 8°.

**Kittler** (Ch.). Ueber die geographische Verbreitung und Natur der Erdpyramiden. Ansbach, 1897; 8°.

**Klein** (O.). Beiträge zur Lehre von der morganatischen Ehe. Erlangen, 1897; 8°.

**Knoke** (A.). Das Zuchtmittel der Drohung im Eide. Hannover, 1896; 8°.

**Koch** (E.). Der deutsche Bundesrat des geltenden Rechtes und die früheren deutschen Verfassungsentwürfe. Berlin, 1897; 8°.

**Köhler** (A.). Die Lehre von der Vertheidigung nach der Reichsstrafprocessordnung. Stuttgart, 1897; 8°.

**Kolb** (C.). Kann eine Aktiengesellschaft: *a)* einem anerkannten Verein; *b)* einer offenen Handelsgesellschaft; *c)* einer eingetragenen Genossenschaft als Mitglied angehören? Nürnberg, 1896; 8°.

**Korte**. Die Vertragslehre im bürgerlichen Gesetzbuche für das Deutsche Reich. Berlin; 8°.

**Köttgen** (E.). Zulässigkeit der Burgschaft ohne Hauptschuld. Bonn, 1896; 8°.

**Krall** (W.). Die Anfechtung der Verträge wegen laesio enormis und das Reichsgesetz über den Sachwucher vom 19. Juni 1893. Bonn, 1896; 8°.

**Kraus** (K.). Das deutsche Militärstrafverfahren. München, 1896; 8°.

**Krauss** (S.). Publizitäts-Prinzip und Pfändungs-Pfandgläubiger in Bayern r./R. München, 1895; 8°.

**Küfner** (H.). Fusion einer Aktiengesellschaft. Passau, 1896; 8°.

**Landsberger** (R.). Das Indossament nach Verfall. Berlin; 8°.

**Leonhardt** (H.). Welche Fragen civilrechtlicher, ehrechtlicher und Staatsrechtlicher Natur kommen in Betracht, wenn sich eine regierende deutsche Fürstin mit einem auswärtigen oder ausländischen Prinzen verheiratet? Züllichau; 8°.

**Levy** (F.). Das Lagergeschäft nach dem Entwurf eines Handels-Gesetzbuchs. Bochum, 1897; 8°.

**Lewinsohn** (J.). Die Folgen der Vereinigung aller Kuxe in der Hand eines Gewerken. Berlin, 1897; 8°.

**Lissauer** (F.). Die juristische Natur des Testamentsvollstrechers. Berlin, 1896; 8°.

**Loeb** (E.). Kann der Schuldner einer offenen Handelsgesellschaft gegen seine Schuld eine Forderung aufrechnen der sämtliche Gesellschafter als Solidarschuldner haften? Erlangen, 1897; 8°.

**Löwenstein** (A.). Depositum irregulare und Darlehn. Gummersbach, 1896; 8°.

**Löwenstein** (J.). Die stille Gesellschaft nach dem allgemeinen Deutschen Handels-Gesetzbuche und dem Entwurf eines neuen Handelsgesetzbuches. München, 1896; 8°.

**Lühl** (A.). Gründe und Arten der Deliktshaftung nach dem neuen bürgerlichen Gesetzbuche für das Deutsche Reich. Düsseldorf; 8°.

**Mannes** (F.). Bestimmt sich die Erbschafts-Verteilung nach dem Zeitpunkte der Acquisition oder der Delation der Erbschaft? Hofheim a. T., 1897; 8°.

**Mathis** (E.). Besteht nach gemeinem Recht bei der Werkverdingung eine kontraktliche Haftpflicht des Werkmeisters für das Verschulden seiner Gehilfen? Berlin, 1896; 8°.

**Meinardus** (H.). David Hume als Religionsphilosoph. Coblenz, 1897; 8°.

**Mengelberg** (W.). Der Einfluss des Fehlschlagens des Erfolgs auf die Ersatzansprüche aus freiwilliger Geschäftsführung. Bonn, 1896; 8°.

**Mode** (G.). Befreiung des Bürgen durch Nachlässigkeit des Gläubigers in Wahrnehmung seiner Rechte gegen dritte Personen. Berlin, 1896; 8°.

**Moll** (F.). Giebt es ein richterliches Prüfungsrecht von Reichsgesetzen und Reichsverordnungen? Gräfenhainichen, 1897; 8°.

**Mosler** (K.). Sind nach römischem Recht die gemeinschaftlichen Mauern zwischen zwei angrenzenden Grundstücken ideell oder reell geteiltes Miteigentum der Nachbarn? Erlangen, 1897; 8°.

**Müller** (H.). Forderungspfandrecht und Sicherungscession. Düsseldorf, 1897; 8°.

**Nebe** (H.). Die Sicherung des Verkäufers gegen die Nichterfüllung des Kaufvertrages durch den Käufer nach dem romischen, gemeinen und preussischen Privatrecht, sowie nach dem bürgerlichen Gesetzbuch. Wiehe i. Th., 1897; 8°.

**Nellessen** (H.). Rechtliche Natur des Eisenbahnfahrscheines. S. l. a; 8°.

**Neuhaus** (B.). Die Konventionalstrafe nach dem bürgerlichen Gesetzbuch für das Deutsche Reich. Das gemeine Recht als Grundlage und zur Vergleichung. Elberfeld, 1897; 8°.

**Neumond** (H.). Die Vaterschaftsfrage nach dem bürgerlichen Gesetzbuch für das Deutsche Reich. Frankfurt a. M., 1897; 8°.

**Nimz** (E.). Die afficierenden Gegenstände in Kants Kritik der reinen Vernunft. Erlangen, 1897; 8°.

**Noltenius** (E.). Der " contractus socidae ". Erlangen, 1897; 8°.

**Nottebohm** (H.). Ist die Cession suspensio bedingter Vermächtnisse pendente condicione möglich? Hamburg, 1897; 8°.

**Nuss** (W.). Die rechtlichen Beziehungen zwischen den beteiligten Personen, wenn auf einem vom Niessbraucher verpachteten Grundstücke Früchte auf dem Halme teils beschädigt, teils entwendet worden sind, dargestellt nach den Quellen des römischen Rechts. Dortmund, 1897; 8°.

**Nussbaum** (J.). Eigentumserwerb an widerrechtlich erlegtem Wild. Berlin, 1897; 8°.

**Odendahl** (K.). Ueber Cessibilität und Vererblichkeit des Widerrufsrechtes inbezug auf Schenkungen. Bonn, 1897; 8°.

**Pačic** (M. J. S.). Ueber das Verhältnis der unerlaubten Selbsthilfe zu den Vermögensdelikten. München, 1897; 8°.

**Pagenstecher** (G.). Ueber die verschiedenen Voraussetzungen und Wirkungen des possessorischen Schutzes der Servituten. Barmen, 1897; 8°.

**Pape** (W.). Wahnsinn als Ehescheidungsgrund. Goslar a. H., 1897; 8°.

**Papendieck** (J.). Der Eigentumserwerb durch Uebergabe seitens eines Nichteigentümers. Erlangen, 1897; 8°.

**Paulus** (W.). Natur der sogenannten Negotia claudicantia nach römischem Recht. Berlin, 1896; 8°.

**Peters** (V.). Die rechtliche Natur der Unfallentschädigungs-Ansprüche nach den Reichs-Unfallversicherungsgesetzen. Breslau, 1896; 8°.

**Pfau** (F.). Die Gesellschaft mit beschränkter Haftung verglichen mit der Aktiengesellschaft. Berlin, 1897; 8°.

**Pfeiffer** (R.). Begriff und Bedeutung der Weisheit im Buche der Proverbien. Nordlingen, 1896; 8°.

**Pilch** (A.). Der Niessbrauch an Inhaberpapieren mit Prämien nach dem Recht des bürgerlichen Gesetzbuches. Berlin, 1897; 8°.

**Praeger** (J.). Zur Lehre vom fortgesetzen Verbrechen. Erlangen, 1896; 8°.

**Primavesi** (A.). In wiefern umfasst die actio redhibitoria auch Ersatz von Schaden? Rheydt, 1896; 8°.

**Rehm** (K.). Die Grenzen der Spezialisierung des der Volksvertretung vorzulegenden Budgets nach bayrischem Staatsrecht. Regensburg, 1896; 8°.

**Reining** (O.). Welches ist die Bedeutung der Form in den vermögensrechtlichen Geschäften nach gemeinem Recht? Leipzig, 1896; 8°.

**Reissinger** (K.). Ueber Bedeutung und Verwendung der Präpositionen ob und propter im älteren Latein. Landau, 1897; 8°.

**Renthe** (T. v.). Der Unterschied zwischen dem Familienfideikommiss und dem Lehn mit aufgehobener Lehnsherrlichkeit. Berlin, 1896; 8°.

**Rentrop** (R.). Irrtum bei der Eigentumstradition nach gemeinem Recht. Bonn, 1897; 8°.

**Reuter** (C.). Ueber die Berechtigung des Gegensatzes " Verjährung und gesetzliche Befristung " und die Bedeutung der materiellrechtlichen Ausschlussfristen. Erlangen, 1896; 8°.

**Riedemann** (T.). Beiträge zur Lehre von der Sachbeschädigung. Hirschberg i. Schl., 1896; 8°.

**Rosenthal** (A.). Die Anfechtung des Verkaufs wegen Verletzung über die Hälfte und der Sachwucher nach dem Reichsgesetze vom 19 Juni 1893. Bonn, 1896; 8°.

**Rothmann** (C.). Ortskrankenkasse und freie Hülfskasse, ihre gegenseitigen Vortheile und Nachtheile. Kreuznach, 1897; 8°.

**Rubensohn** (C. M.). Die Unterhaltspflicht der Eltern gegen ihre ehelichen Kinder nach gemeinem Recht und dem bürgerlichen Gesetzbuch für das Deutsche Reich. Hamburg, 1896; 8°.

**Ruckdeschel** (A.). Die Quellen des Dramas " The Downfall & the Death of Robert, Earle of Huntington, otherwise called Robin Hood „. Erlangen, 1897; 8°.

**Rudolph** (R.). Das Fideikommiss des Ueberrestes nach gemeinem und nach preussischem Rechte. Berlin, 1897; 8°.

**Sauerlandt** (P.). Der Irrtum des Stellvertreters nach gemeinem Recht und nach dem Recht des bürgerlichen Gesetzbuches. Brandenburg a. H., 1897; 8°.

**Schaeffer** (H.). Gehört nach dem Reichsstrafgesetzbuch zum Begriff des Vorsatzes das Bewusstsein der Rechtswidrigkeit oder das Bewusstsein der Strafbarkeit der Handlung? Osnabrück, 1897; 8°.

**Schaetzel** (G.). Der Schutz des Mieters gegen Vermieter und Dritte. München, 1896; 8°.

**Schagen** (T.). Unter welchen Voraussetzungen steht die condictio indebiti einem andern zu, als demjenigen, der die Zahlung aus seinem Vermögen geleistet hat? Düsseldorf, 1897; 8°.

**Schels** (K.). Der strafrechtliche Schutz des Automaten. München, 1897; 8°.

**Scherber** (P.). Die rechtliche Stellung der Ausländer in Bayern. Würzburg, 1897; 8°.

**Scherbring** (B.). Natur und Wirkungen der condicio juris. Berlin, 1897; 8°.

**Schindelhauer** (G.). Ueber das Nachindossament der allgemeinen Deutschen Wechselordnung. Hirschberg i. Schl., 1896; 8°.

**Schläger** (M.). Die Rechtswidrigkeit des Angriffs bei der Notwehr. Erlangen, 1897; 8°.

**Schliephacke** (F.). Begriff und Umfang der Sonderrechte der deutschen Bundesstaaten nach Artikel 78 der Reichsverfassung. Erlangen, 1896; 8°.

**Schlippenbach** (P. F. v.). Kann derjenige, welcher als Mieter oder Depositar auf Rückgabe der Sache belangt ist, der Klage die Einrede seines Eigentums entgegensetzen? Dresden, 1896; 8°.

**Schmidt** (H.). Johann Mattheson ein Förderer der deutschen Tonkunst, im Lichte seiner Werke. Leipzig, 1897; 8°.

**Schmidt** (T.). Ambrosius, sein Werk de officiis libri III und die Stoa. Augsburg, 1897; 8°.

**Schmittmann** (B.). Bildet bei der Gesellschaft mit beschränkter Haftung die Vereinigung aller Geschäftsanteile in einer Hand einen Auflösungsgrund? Düsseldorf, 1897; 8°.

**Schneemann** (T.). Zur Lehre von der Entwickelung und der Natur des contractus aestimatorius. Wesel, 1897; 8°.

**Schneider** (G.). Die Wirkung der Klagenverjährung. Düsseldorf, 1896; 8°.

**Schoemann** (P.). Das pactum de compensando. Trier, 1897; 8°.

**Schröder** (W.). Die Regulierung der Beweislast im Falle der lex 10 D. de Verb. Obl. 45, 1. Berlin, 1897; 8°.

**Schubert** (E.). Die Staatslehre Johanns von Salisbury. Berlin, 1897; 8°.

**Schüler** (S.). Die Uebersetzung der Categorieen des Aristoteles von Jacob von Edessa. Berlin, 1897; 8°.

**Schultze-Denhard** (P.). Haftet derjenige, welcher von einem Vertrage wegen Irrthums zurücktritt für Schadensersatz? M. Gladbach, 1897; 8°.

**Schulz** (G.). Die Entwickelung des landwirtschaftlichen Genossenschaftswesens in Bayern. München, 1897; 8°.

**Schwamborn** (P.). Die Lehre des bürgerlichen Gesetzbuchs von der Eviktion beim Kauf, verglichen mit dem gemeinen Recht und den modernen Privatrechtskodifikationen. Bonn, 1897; 8°.

**Seeberg** (R.). Die Stellung Melanchthons in der Geschichte der Kirche und der Wissenschaft. Erlangen, 1897; 4°.

**Sick** (C.K.). Die Rechte des Prinzipales aus Art. 56, 59 H. G. B. Hamburg, 1896; 8°.

**Siebert** (T.). Kann nach gemeinem Rechte der Stellvertreter mit sich selbst kontrahieren? Frankfurt a. O., 1896.

**Siebert** (W.). Das pignus in causa judicati captum und das Vollstreckungspfand der Civilprozess-Ordnung. Frankfurt a. Oder, 1897; 8°.

**Siemsen** (H.). Giebt es nach gemeinem Recht eine Bereicherungsklage gegen den durch specificatio, plantatio, avulsio oder commixtio nummorum bereicherten? Hagen i. W., 1897; 8°.

**Simon** (H.). Die Geltendmachung des Verwendungsanspruches. Berlin, 1897; 8°.

**Sonanini** (F. A.). Die Teilnahme von Civilisten an militärischen Verbrechen und Vergehen. Düren, 1897; 8°.

**Staeps** (H.). Ueber Friedrich Rohmer's " Wissenschaft von Gott ". Erlangen. 1897; 8°.

**Stein** (G.). Die Natur des Kaufes auf Probe und die praktische Bedeutung der verschiedenen Ansichten. Gummersbach, 1896; 8°.

**Steinbach** (F.). Die Ansprüche wegen Verwendungen nach dem Rechte des bürgerlichen Gesetzbuches. Augsburg, 1897; 8°.

**Stier** (J.). Das Unbewusste bei Lotze. Berlin, 1897; 8°.

**Stirtz** (H.). Die subjektive Seite der Notwehr. Bonn, 1897; 8°.

**Stöber** (E.). Rechtliche Stellung des Commis interessé. Regensburg, 1896; 8°.

**Teicher** (H.). Der recursus ab abusu nach dem Rechte des Königsreichs Bayern. Erlangen, 1896; 8°.

**Tuch** (E.). Lotzes Stellung zum Occasionalismus. Hamburg, 1897; 8°.

*Uebersicht* des Personal-Standes bei der kgl. bay. Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen nebst dem Verzeichnisse der Studierenden im Winter-Semester 1896-97, u. Sommer-Semester 1897; 8°.

**Unger** (E.). Ist die Erteilung der juristischen Persönlichkeit durch die Staatsgewalt Begründung oder Anerkennung nach römischem, gemeinem und preussischem Recht? Berlin, 1896; 8°.

*Verzeichniss* der Vorlesungen, welche an der K. Bayerischen Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen im Winter-Semester 1896-97; Sommer-Semester 1897; 8°.

**Vogels** (P.). Zur gemeinrechtlichen Lehre von der Legitimation durch nachfolgende Ehe. M. Gladbach; 8°.

**Varnhagen** (H.). Dissertatio de rebus ab exercitu Germanico Werderi ductu contra exercitum Francogallicum cui Bourbakius praeerat mense januario A. D. MDCCCLXXI usque ad exitum pugnae ad Lisanam flumen factae gestis. Erlangae, 1896; 4°.

**Wachs** (O.). Der Antheil des Deutschen Kaisers an der Gesetzgebung in den Reichslanden. Kiel, 1896; 8°.

**Wagenführ** (E.). Die Bedingungen nach dem bürgerlichen Gesetzbuche. Berlin, 1897; 8°.

**Walter** (G.). Der Gesetzesbegriff der älteren deutschen Verfassungsurkunden. München, 1896; 8°.

**Walter** (H.). Das Recht der Ehescheidung nach dem bürgerlichen Gesetzbuche für das deutsche Reich vom 18 August 1896, nebst einem geschichtlichen Rückblick. München, 1897; 8.

**Walter** (P.). Das Wesen und die Wirkung der Fideikommiss-Schulden nach den Gründsätzen des gemeinen deutschen Privatrechts. Erlangen, 1897; 8°.

**Walther** (C.). Die persönliche Stellung der Ehefrau nach Französischem Rechte. Kaiserslautern, 1897; 8°.

**Wandelt** (H.). Die rechtliche Natur des Kommissions-Geschäfts nach dem Entwurf eines Handelsgesetzbuches. Berlin, 1897; 8°.

**Weber** (T.). Die Zusendung unbestellter Waren nach deutschem Handelsrecht. Berlin, 1897; 8°.

**Weiss** (K.). Haftet der Auftraggeber dem Beauftragten für den zufälligen Schaden, welchen dieser bei Ausführung des Auftrags erlitten hat? Flensburg, 1896; 8°.

**Werr** (J.). Das Recht des Eigentümers zur Vertiefung seines Grundstücks nach gemeinem Recht und dem bürgerlichen Gesetzbuch. Düren, 1896; 8°.

**Westhaus** (W.). Die Entwicklung des egyptischen Finanzwesens und seiner internationalen Beziehungen vom rechtlichen Standpunkte aus gewürdigt. Düsseldorf, 1896; 8°.

**Wetschky** (E.). Ueber die Widerruflichkeit der Vollmacht. Hamburg, 1897; 8°.

**Wilcke** (C.). Die Wirkungen der Usurpation eines Nachlasses auf die Rechtsverhältnisse der Ersitzung nach gemeinem Recht. Erlangen, 1896; 8°.

**Wimmer** (F. P.). Kaiserin Adelheid Gemahlin Ottos I des Grossen in ihrem Leben und Wirken von 931-973. Regensburg, 1897; 8°.

**Wiskott** (P.). Welche Wirkung hat bei der *locatio conductio operis* des gemeinen Rechts der vor der *Approbatio* erfolgte zufällige Untergang des Werks auf die Verpflichtungen der Kontrahenten? Dortmund, 1897; 8°.

**Ziemer** (E.). Abrahamus patriarcha an fuerit re vera. Erlangae, 1897; 8°.

**Zurhellen** (G.). Kann derjenige, welcher nicht selbst Besitzer, sondern nur Stellvertreter eines dritten Besitzers ist, durch *constitutum possessorium* den Besitz der Sache weiter übertragen? München, 1896; 8°.

### * *Dall'Università di Giessen:*

**Auscher** (S.). Die Geschichte Josefs. Berlin, 1897; 8°.
**Behaghel** (O.). Schriftsprache und Mundart. Giessen, 1896; 4°.
**Eckert** (C.). Der Fronbote im Mittelalter. Leipzig, 1897; 8°.
**Greiner** (D.). Der Begriff der Persönlichkeit bei Kant. Berlin, 1896; 8°.
**Heussel** (A.). Friedrichs des Grossen Annäherung an England im Jahre 1755 und die Sendung des Herzogs von Nivernais nach Berlin. Giessen, 1896; 8°.
**Heyer** (G.). Die Standesherrn des Grossherzogtums Hessen und ihre Rechtsverhältnisse in Geschichte und Gegenwart. Darmstadt, 1897; 8°.
**Iung** (E.). Delikt und Schadensverursachung. Heidelberg, 1897; 8°.
**Jost** (Ph.). Statistische Untersuchung über Konsumtion und Produktion der Milch und deren Produkte in Darmstadt und dessen Umgebung. Darmstadt, 1897; 8°.
**Kalbfleisch** (W.). Die Realien in dem altfranzösischen Epos " Raoul de Cambrai „. Giessen, 1897; 8°.
**Krüger** (G.). Das Dogma vom neuen Testament. Giessen, 1896; 4°.
**Koehm** (J.). Quaestiones Plautinae Terentianaeque. Gissae, 1897; 8°.
*Personal-Bestand* der Grossherzoglich Hessischen Ludwigs-Universität zu Giessen. Winterhalbjahr 1896-97; Sommerhalbjahr 1897; 8°.
**Reuss** (W.). Die dichterische Persönlichkeit Herborts von Fritzlar. Wertheim, 1896; 8°.
**Schwartz** (E.). Die syrische Uebersetzung des ersten Buches Samuelis und ihr Verhältniss zu MT., LXX und Trg. Berlin, 1897; 8°.
**Stade** (B.). Die Entstehung des Volkes Israel. Giessen, 1897; 4°.
*Vorlesungsverzeichniss* der Grossherzoglich Hessischen Ludwigs-Universität zu Giessen. Sommerhalbjahr 1897; Winterhalbjahr 1897-98; 8°.
**Waas** (C.). Die Quellen der Beispiele Boners. Dortmund, 1897; 8°.

### * *Dall'Università di Heidelberg:*

**Affolter** (Fr. Xav.). Das römische Institutionen-System, sein Wesen und seine Geschichte. Einleitender Teil. Heidelberg, 1897; 1 vol. 8°.
*Anzeige* der Vorlesungen, welche in Sommer-Halbjahr 1897; Winter-Halbjahr 1897-98 aus der Grossh. Badischen Ruprecht-Karls-Universität zu Heidelberg gehalten werden sollen. 1897; 8°.
**Arnsperger** (W.). Christian Wolff's Verhältnis zu Leibniz. Weimar, 1897; 8°.
**Bassermann** (H.). Die praktische Theologie als eine selbständige, wissenschaftliche theologische Disciplin. Heidelberg, 1896; 4°.
**Carrington** (H.). Die Figur des Juden in der dramatischen Litteratur des XVIII. Jahrhunderts. Heidelberg, 1897; 8°.
**Dorn** (W.). Benjamin Neukirch. Sein Leben und seine Werke. Weimar, 1897; 8°.
**Ehlers** (O.). Die Stellung der Gebühr im Abgabensystem. 8°.
**Ehrismann** (G.). Untersuchungen über das Mhd. Gedicht von der Minneburg. Halle a. S, 1897; 8°.
**Erdmannsdörffer** (B.). Kaiser Wilhelm I. Heidelberg, 1897; 4°.

**Gebser** (A.). Die Bedeutung der Kaiserin Kunigunde für die Regierung Heinrichs II. Berlin, 1897; 8°.

**Gottl** (F.). Der Wertgedanke, ein verhülltes Dogma der Nationalökonomie. Jena, 1897; 8°.

**Heiderich** (J. H.). Das Leipziger Kürschnergewerbe. Heidelberg, 1897; 8°.

**His** (R.). Die Domänen der römischen Kaiserzeit. Leipzig, 1896; 8°.

**Hofmann** (K.). Heinrich Mühlpfort und der Einfluss des Hohen Liedes auf die zweite schlesische Schule. Heidelberg, 1893; 8°.

**Höwig** (J.). Zur Tilgung der Staatsanleihen. Karlsruhe, 1897; 8°.

**Ising** (J. v.). Die nationalökonomische und finanzwissenschaftliche Bedeutung der Pferdezucht mit besonderer Berücksichtigung der staatlichen Einrichtungen in Preussen. Heidelberg, 1896; 8°.

**Jones** (G.). The diplomatic relations between Cromwell and Charles X, Gustavus of Sweden. Lincoln, Neb., 1897; 8°.

**Kayserling** (A.). Die Idee der Kausalität in den Lehren der Occasionalisten. Heidelberg, 1896; 8°.

**Kirsch** (W.). Zur Geschichte des consonantischen Stammauslauts im praesens und den davon abgeleiteten Zeiten im Altfranzösischen. Darmstadt, 1897; 8°.

**Krausser** (E.). Lydgate's complaint of the Black Knight. Halle a. S., 1896; 8°.

**Krieg** (M.). Die Ueberarbeitung der platonischen " Gesetze " durch Philipp von Opus. Freiburg in Breisgau, 1896; 8°.

**Küentzle** (H.). Ueber die Sternsagen der Griechen. Karlsruhe, 1897; 8°.

**Long** (W. J.). Ueber Hume's Lehre von den Ideen und der Substanz in ihrem Zusammenhang mit derjenigen Locke's und Berkeley's. Heidelberg, 1897; 8°.

**Luce** (A. H.). The Countess of Pembroke's Antonie. Weimar, 1897; 8°.

**Mayer** (M. E.). Das Verhältnis des Sigismund Beck zu Kant. Heidelberg, 1896; 8°.

**Meyer** (Ed.). Machiavelli and the Elizabethan Drama. Weimar, 1897; 8°.

**Mittermaier** (W.). Die Parteistellung der Staatsanwaltschaft im reformirten deutschen Strafverfahren. Stuttgart, 1897; 8°.

**Page** (Fr. M.). Los Payadores Gauchos. Darmstadt, 1897; 8°.

**Patton** (W. M.). Ahmed Ibn Hanbal and the Mihna. Leide, 1897; 8°.

**Pfund** (K.). Die Versorgung grosser Städte mit Milch. Heidelberg, 1896; 8°.

**Read** (W. A.). Keats and Spenser. Heidelberg, 1897; 8°.

**Rosenfeld** (E.). Die Aussenarbeit, ein Beitrag zur Milderung der Konkurrenz zwischen Gefängnisarbeit und freiem Gewerbebetrieb. Erlangen, 1896; 8°.

**Ruhfus** (W.). Die Stellung des verbums im Althochdeutschen Tatian. Dortmund, 1897; 8°.

**Schneegans** (F. Ed.). Ueber die Gesta Karoli Magni ad Carcassonam et Narbonam. Halle a. S., 1897; 8°.

**Schneider** (G. H.). Der Presz- oder Vaterlandsverein 1832/33. Berlin, 1897; 8°.

**Schulze** (L. H.). Erörterungen über Begriff und Einteilung der Bedürfnisse des Menschen. Heidelberg, 1896; 8°.

**Schwinger** (R.). Die litterarischen Elemente in Friedrich Nicolais Roman " Sebaldus Nothanker ". Weimar, 1897; 8°.

**Shepard** (W. P.). A Contribution to the history: the Unaccented Vowels in Old French. Easton, PA. U. S. A., 1897; 8°.
**Urtel** (H.). Beiträge zur Kenntnis des neuchateller Patois. Darmstadt, 1897; 8°.
**Wingenroth** (M.). Die Jugendwerke des Benozzo Gozzoli. Heidelberg, 1897; 8°.

### * *Dall' Università di Upsala:*

**Almgren** (O.). Studien über nordeuropäische Fibelformen der ersten nachchristlichen Jahrhunderte mit Berücksichtigung der provinzialrömischen und südrussischen Formen. Stockholm, 1897; 8:o.
**Åzelius** (J. E.). De assimilatione syntatica apud Sophoclem. Upsala, 1897; 8:o.
**Chruzander** (K. G.). De elocutione panegyricorum veterum gallicanorum quaestiones. Upsala, 1897; 8:o.
**Dahmén** (K. E.). De verbis latinis suffixo *-sco-* formatis. Lund, 1896; 8:o.
**Eschelsson** (Elsa O. K.). Om begreppet gåfva enligt svensk rätt. Upsala, 1897; 8:o.
**Eurén** (S. F.). Étude sur l'*r* français. 1. Prononciation et changements de l'*r*. Upsala, 1896; 8°.
**Gödel** (V.). Fornnorsk-isländsk litteratur i Sverige. 1. (Till antikvitetskollegiets inrättande.) Stockholm, 1897; 8:o.
**Hacklin** (A. V.). Olavus Laurelius. Hans lif och verksamhel. 2. Laurelius som biskop (1647—1670). Luleå, 1896; 8:o.
**Hagman** (K.). Om den svenska statsrevisionens sammansättning och verksamhetsformer under tiden 1809—1866. Stockholm, 1897; 8:o.
**Hallendorff** (C. J. H.). Bidrag till det stora nordiska krigets förhistoria. Upsala, 1897; 8:o.
**Leufvén** (E. J.). Kritisk exposition af Benjamin Höijers konstruktionsfilosofi i relation till den samtida transscendentala spekulationen. Stockholm, 1897; 8:o.
**Lindström** (V. A.). L'analogie dans la déclinaison des substantifs latins en Gaule. P. 1. Upsala, 1897; 8:o.
**Lönborg** (S. E.). Adam af Bremen och hans skildring af Nordeuropas länder och folk. Upsala, 1897; 8:o.
**Nordlindh** (A.). Descartes' lära om känslan. Upsala, 1897; 8:o.
**Odelberg** (P. W.). Sacra Corinthia, Sicyonia, Phliasia. Upsala, 1896; 8:o.
**Paues** (A. V.). De digammo Hesiodeo quaestiones. Stockholm, 1897.
**Rosman** (H.). Rasmus Ludvigsson som genealog. Upsala, 1897; 8:o.
**Staaff** (E.). De origine gentium patriciarum. Upsala, 1896; 8:o.
**Sjöblom** (S. E.). Prästerskapets privilegier af år 1650 oc 1723. Ett bidrag till det svenska prästerskapets historia under storhetstiden och början af frihetstiden. Karlstad, 1896; 8:o.
**Söderberg** (E. N.). Samuel Johan Hedborn, hans lif och diktning. Ett bidrag till Nya skolans häfder. Upsala, 1897; 8:o.

**Angelitti** (F.). Sulla data del viaggio dantesco desunta dai dati cronologici e confermata dalle osservazioni astronomiche riportate nella Commedia. Napoli, 1897; 8° (*dall'A.*).

**Bonanni** (G.). Il palazzo Farnese in Ortona a Mare — Margherita d'Austria. Lanciano, 1897; 8° (*Id.*).

**Carmi** (G. M.). Poesie. Biella, 1892; 12° (*Id.*).

** **Dewey** (M.). Classificazione decimale. Tavole generali ridotte adottate dall'Istituto internazionale di bibliografia di Bruxelles. Trad. italiana di V. Benedetti. Firenze, 1897; 8°.

**Ferrero** (E.). Tombe di età romana scoperte presso Acqui. Roma, 1897; 4° (*dall'A.*).

* **Huber** (A.). Geschichte der Gründung und der Wirksamkeit der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Wien, 1897; 8° (*dall'I. R. Accad. delle Scienze di Vienna*).

**La Mantìa** (V.). I privilegi di Messina 1129-1816. Note storiche. Palermo, 1897; 8° (*dall'A.*).

**Margaret of Navarre**. The Mirror of the Sinful Soul, a prose translation from the French of a poem queen Margarit of Navarre, made in 1544 by the Princess (Afterwards Queen) Elizabeth. London, 1897; 8° (*dono della Royal Society of Literature of the United Kingdom*).

**Nadaillac** (de). La fin de l'humanité. Paris, 1897; 8° (*dall'A.*).

— Les mines d'or du Yucon. Paris, 1897; 8° (*Id.*).

— Unité de l'espèce humaine prouvée par la similarité des conceptions et des créations de l'homme. Louvain, 1897; 8° (*Id.*).

**Nicollet** (F. N.). Études sur les patois du midi de la France. Gap, 1897; 8°.

**Perrero** (D.). I Reali di Savoia nell'esilio (1799-1806); narrazione storica su documenti inediti. Torino, 1898; 8°.

**Pòggi** (V.). Contributi al catalogo generale dei monumenti e degli oggetti d'arte e d'antichità della Liguria. Genova, 1897; 8° (*dall'A.*).

** **Sanuto** (M.). I Diarii, t. XLVIII, fasc. 210-213. Venezia, 1897; 4°.

**Scotti** (I.). I fattori dell'arte ovvero l'istinto, l'emozione ed il sentimento nella creazione estetico-artistica. Genova, 1895; 8° (*dall'A.*).

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

### Dal 21 Novembre al 5 Dicembre 1897.

* **Abhandlungen** der mathem.-physischen Classe der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. XXIV, n. 1. Leipzig, 1897; 8°.

* **Abhandlungen** der Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. X Bd., V Heft, 1896; 8°.

* **Annales** de la Société Entomologique de Belgique; t. 40$^{me}$. Bruxelles, 1896; 8°.

* **Annales** de la Société belge de microscopie. T. XXI. Bruxelles, 1897; 8°.

* **Annales** de la Société géologique de Belgique. T. XXIV, 1e livraison. Liège, 1896-97; 8°.

* **Annales** des Mines. 9me série, t. XII, livr. 9me, 1897. Paris; 8°.

* **Annual** Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution... July 1895. Washington, 1896; 8°.

* **Annual** Report (14th., p. 1-2, 15) of the Bureau of Ethnology to the Secretary of the Smithsonian Institution 1892-'93; 1893-'94. Washington, 1896-1897; 4°.

* **Archives** du Musée Teyler, série II, vol. V, 3e partie. Haarlem, 1897; 8°.

* **Archives** Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Sér. II, T. I, 2e et 3e livr. La Haye, 1897; 8°.

* **Bulletin** of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XXXI, No. 4. Cambridge, 1897; 8°.

* **Bulletin** de la Société Physico-Mathématique de Kasan. 2me série, t. VI, n. 1-4; t. VII, n. 1. 1896-97; 8°.

* **Bulletin** de la Société impériale des Naturalistes de Moscou. Ann. 1896, n. 3. Moscou, 1897; 8°.

* **Forhandlinger** i Videnskabs-selskabet i Christiania Aar 1895, 1896. Christiania, 1896-97; 8°.

**Medico-Legal** (The) Journal. Vol. XIV, No. 4. New-York, 1897; 8°.

* **Mitteilungen** der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1895, n. 1373-1398; 1896, n. 1399-1435; 8°.

* **Natuurkundig** Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië utigegeven door de k. Natuurkundige vereeniging in Nederl.-Indië. Deel LVI. Negende serie Deel V. Batavia, 1897; 8°.

* **Notulen** van de Algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XXXIV, Af. 3-4. Batavia, 1896-97; 8°.

**Pianta Geometrica** della Città di Torino; 1896. Scala 1 : 5000 (*dono del Cav. Luigi Cantù*).

**Portland** Society of Natural History: Proceedings, vol. I-II; 1862-1897; Regular Meeting, 11, 14, 16 (1880-1882); 1, 3, 4. 10, 11 (1881-1882); 9 (1888-1889); Journal, vol. I, No. 1 (1864). Portland; 8°.

* **Proceedings** of the California Academy of Sciences. 2d Ser., vol. VI; 3. Ser., Botany, vol. I No 1; Geology, I No 1; Zoology I No 1, 2. San Francisco, 1897; 8°.

* **Proceedings** and **Transactions** of the R. Society of Canada. Second Ser., vol. II. Ottawa, 1896; 8°.

* **Publications** de l'Institut Grand-Ducal de Luxembourg (Sect. des Sciences naturelles et mathématiques). Vol. XXV. Luxembourg, 1897; 8°.

**Relative Schwerebestimmungen** durch Pendelbeobachtungen. Gruppe III. Pola, 1897; 4° (*dal Ministero di Guerra e Marina austriaco*).

* **Rendiconto** dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli. Serie 3a, vol. III, fasc. 8°-10°. Napoli, 1897; 8°.

* **Skrifter** udgivne af Videnskabsselskabet i Christiania 1895, n. 1, 11; 1896, n. 1, 2. I Mathematisk-naturvidenskabelig Klasse. Kristiania, 1896-97; 8°.

* **Tijdschrift** voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen etc.; Deel XXXIX, Aflev. 4-6. Batavia, 1896-97; 8°.

* **Transactions** of the Cambridge Philosophical Society. Vol. XVI, parte 2ª. Cambridge, 1897.

* **Transactions** of the Academy of Science of St-Louis. Vol. VII, n. 4-16. 1895-1897.

**University** of the State of New York. New York State Museum. 48th Annual Report of the Regents 1894. Albany, 1895, 3 vol.; 8°.

* **Verhandelingen** van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XLVIII, 3e Stuck; L, 3e Stuck. Batavia, 1897; 8°.

** **Verhandlungen** der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 16, Nr. 10. 1897; 8°.

**Verhandlungen** der österreichischen Gradmessungs-Commission. Protokoll über die am 21 April 1897 abgehaltene Sitzung. Wien, 1897; 8°.

### * *Dall'Università di Upsala:*

**Andersson** (O. F.). Ueber die quartäre Lagerserie des Ristinge Klint auf Langeland. Eine biologisch-stratigraphische Studie. Upsala, 1897; 8°.

**Carlheim-Gyllensköld** (V.). Sur la forme analytique de l'attraction magnétique de la terre, exprimée en fonction du temps. Stockholm, 1896; 4°.

**Ekman** (T. T.). Beiträge zur Kenntnis des Stieles der Brachiopoden. Upsala (Leipzig), 1897; 8°.

**Elfstrand** (M.). Ueber giftige Eiweisse, welche Blutkörperchen verkleben. Upsala, 1897; 8°.

**Fries** (Th. M.). Bidrag till en lefnadsteckning öfver Carl von Linné. 5. Upsala, 1896; 8°.

— — 6. Upsala, 1897; 8°.

**Hemmendorff** (E.). Om Oelands vegetation. Några utvecklingshistoriska bidrag. Upsala, 1897; 8°.

**Holmquist** (P. J.). Synthetische Studien über die Perowskit- und Pyrochlormineralien. Upsala, 1897; 8°.

**Lundal** (A. E.). Bidrag till kännedomen om de fysiska egenskaperna hos kautschuk. Upsala, 1897; 8°.

**Malmborg** (M. V. A.). Om integrationen af en klass af lineära differentialekvationer med dubbelperiodiska koefficienter, analog med de s. k. Hermite'ska differentialekvationerna. Upsala, 1897; 8°.

**Westman** (J.). Bidrag till kännedom om järnglansens magnetism. Upsala, 1897; 8°.

---

**Barone** (G.). Les Bielides de 1895. Bruxelles; 8° (*dall'A.*).

**Bashforth** (F.). A Mathematical Treatise on the motion of projectiles founded chiefly on the results of experiments made with the " Author's Chronograph ". London, 1873; 8° (*Id.*).

**Bashforth** (F.). Tables of remaining velocity, time of flight, and energy of various projectiles... London, 1871; 8° (*dall'A.*).

— A supplement to a revised account of the experiments made with the Bashforth Chronograph. Cambridge, 1895; 8° (*Id.*).

**Langley** (S. P.). Memoir of George Brown Goode. 1851-1896. Washington, 1897; 8° (*Id.*).

**Marina** (G.). L'Istituto antropologico italiano di Livorno. Livorno, 1897; 8° (*Id.*).

**Marini** (A.). Relazione della Commissione nominata dal Consiglio Amministrativo della Associazione Serica e Bacologica del Piemonte con Museo Nazionale per premiazione ai concorrenti, 1897. Torino; 8° (*Id.*).

---

## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche

### Dal 28 Novembre al 12 Dicembre 1897.

* **Accademia** Reale delle Scienze di Amsterdam.
Verslagen en Mededeelingen. Afd. Letterkunde. 3e Reeks. Dl. XII. Register. D. I-XII. Jaarboek 1896. Prijsvers.

* **Atti** del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. T. LVI, disp. 1a. Venezia, 1897; 8°.

* **Boletin** de la Real Academia de la historia; t. XXXI, cuad. 5. Madrid, 1897; 8°.

* **Bulletin** d'Histoire ecclésiastique et d'Archéologie religieuse des Diocèses de Valence, Gap, Grenoble et Viviers. XVIIe année, 1897. Romans; 8°.

* **Comptes-rendus** de l'Athénée Louisianais. 6me sér. Tom. I, livr. 6me. Nouvelle-Orléans, 1897; 8°.

**John Crerar Library** (The). First, Second Annual Report for the Year 1895, 1896. Chicago, 1897; 8°.

**Popolazione.** Movimento dello Stato civile. Anno 1896. Roma, 1897; 8° (*dal Ministero di Agric., Ind. e Comm.*).

**Relazione** dell'inchiesta sulle condizioni economiche e della sicurezza pubblica in Sardegna promossa con Decreto Ministeriale del 12 dic. 1894. Roma, 1896; 4° (*dal Ministero dell'Interno*).

---

**Chevalier** (U.). Actes anciens et Documents concernant le bienheureux Urbain V Pape etc. Tome 1r. Paris, 1897; 8° (*dall'A.*).

— Repertorium hymnologicum. Catalogue des chants, hymnes, proses, séquences, tropes en usage dans l'Église Latine etc. 4me fascicule, A-Z (N. 16092-22256). Louvain, 1897; 8° (*Id.*).

— Le Chanoine Albanès. Bio-Bibliographie. Romans, 1897; 8° (*Id.*).

**Gatti** (G.). Relazione della Commissione Archeologica comunale di Roma al VI Congresso storico italiano in Roma. Roma, 1896; 8° (*dal Relatore*).

**Hucke** (I.). Die Geld-Verrichtungen in der Preis-, Lohn- und Zinsgestaltung. Berlin, 1897; 8° (*dall'A.*).

**Landucci** (L.). Storia del Diritto Romano dalle origini fino alla morte di Giustiniano. Vol. I, 2ª ediz. Parte III ed ultima. Storia del diritto penale. Verona, 1898; 8° (*Id.*).

**Marre** (A.). Histoire de la Princesse Djouher-Manikam. Roman traduit du Malais. Épinal, 1897; 16° (*Id.*).

**Messina** (I.). De condicione suspensa. Cathacii, 1897; 8° (*Id.*).

**Michon** (E.). Extrait des Procès-Verbaux de la Société Nationale des Antiquaires de France. Séance du 17 Février 1897. Nogent-le-Rotrou, 1897; 8° (*Id.*).

**Ricciotti** (G.). I Grandi delle Scuole Pie. Appunti storici. Alatri, 1897; 8° (*Id.*).

---

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

---

### Dal 5 al 19 Dicembre 1897.

---

* **Accademia** Reale delle Scienze di Amsterdam.
Verhandeling Afd. Natuurkunde: 1e Sectic, Dl. II, N. 2; V, N. 3-8, 2e Sectic, Dl. V, N. 4-10; Verslagen, Dl. V. Amsterdam, 1896-97; 8°.

* **Annales** des Mines. 9me série, t. XII, livr. 10, 1897. Paris; 8°.

** **Annuaire** pour l'an 1898, publié par le Bureau des Longitudes. Paris, 1897.

* **Atti** dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Anno L, sessione VII. Roma, 1897; 4°.

* **Bulletin** de l'Institut national Genevois. Travaux des cinq sections, t. XXXIV. Genève, 1897; 8°.

* **Mémoires** de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève. Tom. XXXII, 2e partie, 1896-97; 4°.

* **Monthly Notices** of the Royal Astronomical Society. Vol. LVIII, n. 1. London, 1897; 8°.

* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Vol. XXX, fasc. 17. Milano, 1897; 8°.

* **Rendiconto** dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli. Serie 3ª, vol. III, fasc. 11°. 1897; 8°.

* **Sitzungsberichte** der Physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Würzburg, 1897, n. 1, 2; 8°.

* **Verhandlungen** Physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Würzburg, 1897, N. F., XXXI. N. 1-7; 8°.

---

**Carazzi** (D.). Guida-Catalogo del Museo Civico della Spezia. Spezia, 1898, 8° (*dall'A.*).

**Lussana** (S.). Sul calore specifico dei gas. Pisa, 1897; 8° (*Id.*).

— A proposito della nota del Dott. Adolfo Campetti " Della influenza della temperatura sulla velocità degli Joni ". Firenze, 1897; 8° (*Id.*).

— Descrizione di un apparecchio semplice che serve a dimostrare le leggi relative alle radiazioni calorifiche. Firenze, 1897; 8° (*Id.*).

**Lussana** (S.) e **Cinelli** (M.). L'attrito interno e l'attrito elettrolitico nelle soluzioni. Siena, 1897; 8° (*dagli AA.*).

**Schiaparelli** (G. V.). Osservazioni astronomiche e fisiche sull'asse di rotazione e sulla topografia del pianeta Marte. Memoria V. Roma, 1897; 4° (*dall'A.*).

** **Vinci** (Leonardo da). Il Codice Atlantico; fasc. XIV. Milano, 1897; f°.

---

## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

---

### Dal 12 al 26 Dicembre 1897.

---

* **Berichte** über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (Philolog.-hist. Classe), 1897, I. 1897; 8°.

**Calendario** del Santuario di Pompei per l'anno 1898. Valle di Pompei; 16°.

** **Petermanns** Mitteilungen aus Justus Perthes' Geographischer Anstalt. Ergänzungsheft N. 118-122. Gotha, 1896-97; 8°.

---

**Bigoni** (G.). La caduta della Repubblica di Genova nel 1797. Genova, 1897; 8° (*dall'A.*).

**Boscassi** (A.). Illustrazione storica dello stemma di Genova. Bari, 1895; 8° (*Id.*).

**Cais de Pierlas** (E.). La ville de Nice pendant le premier siècle de la domination des Princes de Savoie. Turin, 1898; 8° (*Id.*).

*Campagne* del Principe Eugenio di Savoia. Allegati grafici al vol. IX della 1ª serie e X, 1° della serie 2ª. Torino, 1897; 2 fasc. in f° (*dono di S. M. il Re d'Italia*).

**Cognetti de Martiis** (S.). I due sistemi della politica commerciale. Torino, 1896-97; 8° (*dall'A.*).

**Feroci** (A.). Degli antichi spedali di Pisa. Pisa, 1896; 8° (*Id.*).

— La peste bubbonica in Pisa nel medio evo e nel 1630. Pisa, 1898; 8° (*Id.*).

**Gerbaix-Sonnaz** (C. A. di). Studi storici sul Contado di Savoia e Marchesato in Italia. Vol. 2°, parte 2ª. Torino, 1897; 8° (*Id.*).

**Labriola** (A.). Le dottrine economiche di F. Quesnay. Napoli, 1897; 8° (*dall'editore E. Croce*).

**Massa** (C.). Il prezzo e il commercio degli olii di oliva di Gallipoli e di Bari. Trani, 1897; 8° (*dall'A.*).
**Professione** (A.). Giulio Alberoni dal 1708 al 1711. Siena, 1890; 8° (*Id.*).
— Dalla battaglia di Pavia al sacco di Roma. Siena, 1890; 8° (*Id.*).
— Dal trattato di Madrid al sacco di Roma. Verona, 1892; 8° (*Id.*).
— Storia moderna e contemporanea. Torino, 1895, 2 vol. 8° (*Id.*).
— Il Ministero in Spagna e il processo del cardinale Giulio Alberoni. Lonigo, 1897; 8° (*Id.*).
**Raddi** (A.). Le bonifiche italiane. Napoli, 1897; 8° (*Id.*).
** **Sanuto** (M.). I Diarii, t. L, fasc. 214, 215. Venezia, 1897; 4°.
**Turletti** (V.). Attraverso le Alpi. Storia aneddotica delle guerre di montagna dal 1742 al 1748 in difesa dell'Italia. Torino, 1897; 8° (*dall'A.*).

---

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

---

### Dal 19 Dicembre 1897 al 2 Gennaio 1898.

---

* **Acta** et **Commentationes** Imp. Universitatis Jurievensis (olim Dorpatensis), vol. 5°, n. 3. Juriew (Dorpat), 1897; 8°.
* **Acta** mathematica. Zeitschrift herausg. von G. Mittag-Leffler. Stockholm, 1897; 4°.
* **American Journal** of Science. Editor Edward S. Dana. New-Haven, 1897; 8°.
** **Annalen** der Physik und Chemie. Leipzig, 1897; 8°.
* **Annales** de l'Université de Lyon; XXIX, XXXII, XXXIV. Paris, 1897; 8°.
** **Annales** de Chimie et de Physique. Paris, 1897.
* **Annals** and Magazine of Natural History. London, 1897.
** **Annals** of Mathematics. Charlottesville, 1896-97.
* **Annual** Report of the Curator of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College,... for 1896-97. Cambridge, 1897; 8°.
** **Archiv** für Entwickelungsmechanik der Organismen. Leipzig, 1897; 8°.
** **Archives** des Sciences physiques et naturelles, etc. Genève, 1897.
** **Archives** italiennes de Biologie... sous la direction de A. Mosso. Turin, 1897.
** **Archivio** per le Scienze mediche, diretto da G. Bizzozero. Torino, 1897.
* **Atti** e **Rendiconti** dell'Acc. Medico-chir. di Perugia; vol. IX, f. 3°. 1897; 8°.
** **Beiblätter** zu den Annalen der Physik und Chemie. Leipzig, 1897.
* **Berichte** über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem. Phys. Classe, 1897, IV. Leipzig; 8°.
** **Bibliotheca mathematica**; Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausg. von G. Eneström. Stockholm, 1897.
* **Bollettino** del R. Comitato Geolog. d'Italia. Anno 1897, n. 1, 2. Roma; 8°.

* **Bulletin** de l'Académie Imp. des Sciences de St-Pétersbourg. V[e] sér., T. VII, n. 2. 1897; 4°.

* **Bulletin** de l'Académie Royale des sciences et des lettres de Danemark. Copenhague, 1897, n. 4, 5; 8°.

** **Bulletins** de la Société anatomique de Paris, etc. Paris, 1897.

* **Cimento** (Il nuovo). Pisa, 1897.

* **Comptes-rendus** hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris, 1897.

* **Elettricista** (L'). Rivista mensile di elettrotecnica. Roma, 1897.

* **Gazzetta** chimica italiana. Roma, 1897.

**Gazzetta** delle Campagne, ecc. Direttore Enrico BARBERO. Torino, 1897.

* **Giornale** del Genio civile. Roma, 1897.

**Giornale** scientifico di Palermo. Palermo, 1897; 4°.

* **Jornal** des sciencias Mathematicas e Astronomicas. Publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Coimbra, 1897; 8°.

** **Journal** für die reine u. angewandte Mathematik. Berlin, 1897.

* **Journal** of Comparative Neurology. Cincinnati, Granville, Ohio, 1897; 8°.

* **Journal** of Physical Chemistry. Ithaca N. Y., 1896-97; 8°.

* **Journal** of the R. Microscopical Society, 1897, part 6. London, 1897; 8°.

** **Journal** de Conchyliologie, comprenant l'étude des mollusques vivants et fossiles. Paris, 1897; 8°.

** **Journal** de Mathématiques pures et appliquées. Paris, 1897.

* **Mémoires** de l'Académie des Sciences et des Lettres de Danemark. 6[e] sér. Section des sciences, t. VIII, n. 5. Copenhague, 1897; 4°.

**Memorie** della Società degli Spettroscopisti italiani. Vol. XXVI, disp. 10ª. Roma, 1897; 4°.

* **Monatshefte** für Mathematik und Physik. Wien, 1897.

**Morphologisches** Jahrbuch. Herausg. v. C. GEGENBAUR. Leipzig, 1896.

** **Nature**, a Weekly illustrated Journal of Science, London, 1897; 8°.

** **Neues Jahrbuch** für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie, etc. Stuttgart, 1897.

** **Nuova Antologia**; Rivista di Scienze, Lettere ed Arti. Roma, 1897.

**Papers** printed to commemorate the incorporation of the University College of Sheffield. 1897; 8° (*dono della The Editing Committee*).

** **Philosophische Studien**. Leipzig, 1897.

* **Physical Review**; a journal of experimental and theoretical physics..... Published for Cornell University. New York, 1897; 8°.

* **Proceedings** of the Royal Society. Vol. LXII. No. 381. London, 1897; 8°.

** **Quarterly Journal** of pure and applied Mathematics. London, 1897.

* **Rendiconti** del Circolo matematico di Palermo. Tom. XI, fasc. VI. Palermo, 1897; 8°.

* **Rendiconti** della R. Accademia dei Lincei — Classe di Scienze fisiche, ecc. Roma, 1897.

**Report** for the Year 1896-97, presented by the Board of Managers of the Observatory of Yale Univers. to the President and Fellows. New-Hawen; 8°.

**Report** of the Superintendent of the U. S. Naval Observatory for the ending June 30, 1894, 1897. Washington, 1895, 1897; 8°.

* **Revue** sémestrielle des publications mathématiques. Amsterdam, 1897.
** **Revue** générale des sciences pures et appliquées. Paris, 1897.
* **Rivista** di Artiglieria e Genio. Roma, 1897; 8°.
**Rivista** di Topografia e Catasto pubblicata per cura di N. Jadanza. Torino, 1897 (*dono del socio Jadanza*).
* **Sachregister** der Abhandlungen und Berichte der math.-physik. Classe der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig, 1897; 8°.
* **Settimana** (La) medica dello Sperimentale, organo dell'Accademia medico-fisica fiorentina. Firenze, 1897; 8°.
* **Sperimentale** (Lo). Archivio di Biologia. Firenze, 1897; 8°.
* **Transactions** of the Texas Academy of Science. Vol. II, No. 1, 1897. Austin; 8°.
* **Verhandlungen** der k. k. geologischen Reichsanstalt. N° 11-13, 1897. Wien; 8°.
* **Zeitschrift** für mathematischen und naturwissenschaftl. Unterricht. herausg. v. J. C. Hoffmann. Leipzig, 1897.
** **Zeitschrift** für physikalische Chemie. Leipzig, 1897; 8°.
** **Zoologischer Anzeiger,** herausg. von Prof. J. Victor Carus in Leipzig. 1897; 8°.

---

* **Curtze** (M.). Petri Philomeni de Dacia in algorismum vulgarem Joh. de Sacrobosco Commentarius. Hauniae, MDCCCXCVII; 8° (*Societatis regiae scientiarum Danicae*).
**Koelliker** (A.). Marcello Malpighi e l'Anatomia generale. Milano; 8° (*dall'A.*).
— Ueber die Tyson'schen Drusen des Menschen. Jena, 1897; 8° (*Id.*).
— Ueber den Dilatator pupillae. Jena, 1897; 8° (*Id.*).
**Razoumowsky** (C. Graf) Razoumowsky (1759-1837). Bibliographisches Verzeichniss seiner wissenschaftlichen Werke und Abhandlungen für die Famille zusammengestellt von seinem Enkel. Halle a. S., 1897; 8° (*Id.*).
**Ruffini** (P.). Delle accelerazioni che nel moto di un sistema rigido sono dirette ad uno stesso punto qualsivoglia dato. Bologna, 1897; 8° (*Id.*).
**Salinas** (E.). Sulle Esterie del Trias di Sicilia. Palermo, 1897; 4° (*Id.*).
* **Whiteaves** (J. F.). Palaezoic fossils. Vol. III, Part III. Ottawa, 1897; 8° (*dal Geological Survey of Canadà*).

---

## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

### Dal 26 Dicembre 1897 al 9 Gennaio 1898.

* **Annales** de l'Université de Lyon. N. XXXI. Paris, 1897; 8°.
**Annali** di Statistica. — Statistica industriale. Fasc. LXII. Roma, 1897; 8° (*dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio*).

** **Antologia** (Nuova). Rivista di Scienze, Lettere ed Arti. Roma, 1897; 8°.
* **Archivio** storico pugliese. Bari, 1897; 8°.
** **Archivio** storico italiano. Firenze, 1897; 8°.
* **Archivio** storico lombardo. Milano, 1897; 8°.
* **Ateneo** veneto. — Rivista mensile di scienze, lettere ed arti. Venezia, 1897; 8°.
** **Berliner** philologische Wochenschrift. 1897; 8°.
** **Bibliothèque** de l'École des Chartes; Revue d'érudition consacrée spécialement à l'étude du moyen âge, etc. Paris, 1897; 8°.
* **Boletin** de la Real Academia de la Historia. T. XXXI, cuad. VI. Madrid, 1897; 8°.
**Bollettino** delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. 1897, n. 274, 276-288; 8° (*dalla Biblioteca Nazionale centrale di Firenze*).
** **Bollettino** ufficiale del Ministero dell'Istr. pubbl. Roma, 1897; 8°.
* **Bollettino** di Legislazione e Statistica doganale e commerciale. Anno XIV, Aprile-Settembre 1897. Roma; 8° (*Ministero delle Finanze*).
**Bulletin** de l'Institut International de Statistique. Tom. X. Rome, 1897; 8°.
* **Bulletin** of the New York Publie Library Astor Lonox and Tilden Foundations. Vol. I, No 6-12, 1897; 8°.
** **Bullettino** (Nuovo) di Archeologia Cristiana. Roma, 1897; 8°.
* **Bullettino** di Archeologia e Storia dalmata. Spalato, 1897; 8°.
* **Comptes-rendus** des séances de la Société de Géographie; n. 8, 11-17. Paris, 1897; 8°.
* **Consiglio** Comunale di Torino; Sess. ordin. di autunno 1896, I-III; straordinaria 1897, IV-VII; ordin. di primavera, VIII-XV; straord. 1897, XVI-XVII; ordin. d'autunno 1897, XIX-XXII.
* **Controversia** (La). Madrid, 1897; 8°.
**Documente** privitóre la Istoria Românilor. Vol. X (1763-1844); Supl. I, vol. II. Bucuresci, 1897; f° (*dal Ministero dell'Istruz. pubbl. di Rumenia*).
** Ἐφεμερὶς ἀρχαιολογική. Ἐν Ἀθηναῖς, 1897; 4°.
* **Gazzetta** Ufficiale del Regno. Roma, 1897; 4°.
** **Giornale di Erudizione**; Corrispondenza letteraria, ecc. Firenze, 1897.
** **Giornale storico** della Letteratura italiana. Torino, 1897; 8°.
* **Heidelberger Jahrbücher** (Neue). Heidelberg, 1897; 8°.
* **Historische** Zeitschrift. München, 1897; 8°.
** **Journal Asiatique**, ou Recueil de Mémoires, d'Extraits et de Notices relatifs à l'histoire, à la philosophie, aux langues et à la littérature des peuples orientaux. Paris, 1897; 8°.
** **Journal** des Savants. Paris, 1897; 8°.
** **Moyen (Le) Age**; Bulletin mensuel d'histoire et de philologie. Paris, 1897; 8°.
** **Nord** und **Sud**; eine deutsche Monatschrift. Breslau, 1897; 8°.
* **Rendiconti** della R. Accademia dei Lincei — Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Roma, 1897; 8°.
* **Revue** de l'Université de Bruxelles. Bruxelles, 1897; 8°.
** **Revue** archéologique. Paris, 1897; 8°.

** **Revue** de Linguistique et de Philologie comparée. Paris, 1897; 8°.
** **Revue** des deux Mondes. Paris, 1897; 8°.
* **Revue** géographique internationale. Paris, 1897; 4°.
** **Revue** numismatique. Paris, 1897; 8°.
** **Rivista** di filologia e d'istruzione classica. Torino, 1897; 8°.
* **Rivista** italiana di Sociologia. 1897. Roma; 8°.
* **Rivista** internazionale di scienze sociali e discipline ausiliarie. Roma, 1897; 8°.
** **Rivista storica** italiana; pubblicazione trimestrale. Torino, 1897; 8°.
**Rosario** (Il) e la Nuova Pompei. Anno XIV, n. 3-9. Valle di Pompei, 1897; 8°.
**Sanskrit Critical Journal** of the Oriental Nobility Institute, Woking; England, Vol. XXVI, No. 6-11, 1897; 8°.
** **Séances** et Travaux de l'Académie des Sciences morales et politiques. Compte rendu, Paris, 1897; 8°.
* **Stampa** (La). Gazzetta Piemontese. Torino, 1897; f°.
**Statistica** del commercio speciale di importazione e di esportazione, dal 31 maggio al 31 dicembre 1897. Roma; 8° (*dal Ministero delle Finanze*).

---

**Bigoni** (G.). Un corrispondente napoletano di Francesco Apostoli. Venezia, 1891; 8° (*dall'A.*).
— Della bontà della storia e della ragione degli studi storici. Lettere due al prof. G. De Leva. Padova, 1892; 8° (*Id.*).
— G. Bottero e la quinta parte delle Relazioni Universali. Firenze, 1895 (*Id.*).
**Chiuso** (T.). La Chiesa in Piemonte dal 1797 ai giorni nostri. Torino, 1887-1892. 4 vol. 8° (*Id.*).
**Dell'Oro Hermil** (M.). Roc Maol e Monpantero. Tradizioni, costumi e leggende. Torino, 1897; 8° (*dall'Autrice*).
**Faldella** (G.). I fratelli Ruffini. Storia della Giovine Italia. Torino, 1897; 8° (*dall'A.*).
**Gatta** (L.). Milano e i nomi delle sue vie. Personaggi illustri e benemeriti, momenti storici. Milano, 1897; 8° (*Id.*).
**Sforza** (G.). Garibaldi in Toscana nel 1848. Roma, 1897; 8° (*Id.*).
— L'espulsione di Nicola Fabrizi dalla Toscana nel 1848. Torino, 1897; 8° (*Id.*).
— Terenzio Mamiani e il Duca di Lucca. Torino, 1897; 8° (*Id.*).

---

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

### Dal 2 al 16 Gennaio 1898.

* **Anales** de la Sociedad Científica Argentina. Entrega V, t. XLIV; Buenos Aires, 1897; 8°.

* **Annales** des Mines. 9ᵉ série, t. XII, XIᵐᵉ livr. Paris, 1897; 8°.

* **Annales** de l'École Polytechnique de Delft. T. VIII, 1897, 3ᵉ et 4ᵉ livr.; 4°.

* **Annals** of the New York Academy of Sciences late Lyceum of Natural history. Vol. IX, No. 6-12. New York, 1897; 8°.

* **Archives** (Nouvelles) du Muséum d'histoire naturelle. IIIᵉ sér., t. 9ᵉ, fasc. 1ʳ. Paris, 1897; 4°.

* **Atti** dell'Accademia Pontaniana. Vol. XXVII. Napoli, 1897; 8°.

* **Atti** della R. Accademia medico-chirurgica di Napoli. Anno LI; N. S., n. V. Napoli, 1897; 8°.

**Atti** della Società Piemontese d'Igiene; anno III, fasc. 4-7. Torino, 1897; 8°.

**Boletín** mensual del Observatorio Meteorológico central de Mexico; Marzo-Septiembre 1897. Mexico; 4°.

**Boletín** mensual demográfico de Montevideo. Año V, n. 50-58. Montevideo, 1897.

**Boletín** del Observatorio Astronómico Nacional de Tacubaya. Tom. II, n. 1-2. Mexico, 1897; 4°.

**Bollettino** Statistico mensile della Città di Milano. Anno XIII, maggio-novembre 1897; 4°.

**Bollettino** quindicinale della Società degli Agricoltori italiani. Anno II, n. 11-24. Roma, 1897; 8°.

* **Bollettino** mensuale della Società meteorologica italiana. Serie 2ª, v. XVII, n. 5-11. Torino, 1897.

**Bollettino** dell'Associazione " Mathesis " fra gl'Insegnanti di matematica, delle scuole medie. Anno II, n. 1-3. Roma, 1897; 8°.

* **Bollettino** Demografico della Città di Torino. Anno XXVI, n. 14-33, 1897; 4°.

* **Bulletin** de la Société d'études scientifiques d'Angers. XXVIᵉ année, 1896. Angers, 1897; 8°.

* **Bulletin** of the Johns Hopkins Hospital, vol. VIII, No. 74-81. Baltimore, 1897; 4°.

* **Bulletin** of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XXXI, n. 5. Cambridge Mass., 1897; 8°.

* **Bulletin** de la Société des Sciences naturelles de l'Ouest de la France. T. VII, 2ᵉ et 3ᵉ trimestre 1897. Nantes; 8°.

**Bulletin** mensuel de Statistique Municipale de la ville de Buenos-Ayres. XI^e^ année (1897), n. 4-10; 4°.

* **Bulletin** du Muséum d'histoire naturelle. Année 1897, n. 4-6. Paris, 8°.
* **Bulletin** de la Société géologique de France. 3^e^ série, t. XXIV, n. 10-11; XXV, n. 4-6. Paris, 1896-97; 8°.
* **Calendar** 2556-57 (1896-97). Imperial University of Japan. Tōkyō, 2557 (1897); 8°.
* **Comptes-rendus** de l'Académie des Sciences de Cracovie. Avril-juillet, octobre, novembre. Cracovie, 1897; 8°.
* **Field Columbian** Museum. Anthropological series, vol. II, No. 1. Chicago, 1897; 8°.

** **Fortschritte** der Physik im Jahre 1896, II. Braunschweig, 1897; 8°.

* **Johns Hopkins** Univ. Circulars. Vol. XVI, No. 130, 131; XVII, No. 132, 133. Baltimore, 1897; 4°.
* **Journal** of the Asiatic Society of Bengal. Vol. LXVI, Part II, 2, 3, 1897. Calcutta, 1897; 8°.
* **Journal** of the Academy of Natural sciences of Philadelphia. Second series, vol. XI, p. 1. Philadelphia, 1897; 4°.
* **List** of the Geological Society of London; November 2nd, 1897; 8°.
* **Mémoires** de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 5^e^ série, t. I, II et Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde, juin 1894-mai 1896. Bordeaux, 1895-96; 8°.
* **Mémoires** de la Société nationale des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg, t. XXX. Cherbourg, 1896-1897; 8°.
* **Memorie** della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Serie V, tomo VI, fasc. 4° e 5°. 1897; 4°.

**Œuvres** complètes d'Augustin Cauchy publiées sous la direction de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction Publique. 2^e^ série, t. III. Paris, 1897; 4° (*dono del Governo francese*).

** **Petermanns** Mitteilungen aus Justus Perthes' Geographischer Anstalt. Ergänzungsheft N^r^ 123. Gotha, 1897; 8°.

* **Proceedings** of the Asiatic Society of Bengal. N. V-VIII. Calcutta, 1897; 8°.
* **Procès-Verbaux** de Séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux. An. 1894-95, 1895-96. Bordeaux; 8°.
* **Proceedings** of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. XXXII, No. 16-17; XXXIII, No. 1-4. Boston, 1897; 8°.
* **Proceedings** of the American Philosophical Society held at Philadelphia. Vol. XXXV, 153; XXXVI, 155. 1896, 1897; 8°.
* **Quarterly** Journal of Geological Society. Vol. LIII, Part 4. London, 1897; 8°.
* **Records** of the Geological Survey of India. Vol. XXX, Part 4. Calcutta, 1897; 8°.
* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Vol. XXX, fasc. 18, 19. Milano, 1897; 8°.

**Rendiconto** dell'Ufficio d'Igiene della Città di Torino. Anno XXVI, n. 5-11, 1897; 4°.

* **Report** of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, July, 1894. Washington, 1896; 8°.

* **Rivista** mensile del Club alpino italiano. Vol. XIV, n. 6-12. Torino, 1897; 8°.

* **Stazioni** sperimentali agrarie italiane. Vol. XXX, fasc. 4-7. Modena, 1897; 8°.

* **Transactions** of the Royal Scottish Society of Arts. Vol. XIV, Part 3. Edinburgh, 1897; 8°.

---

**Gordon** (A. de). El tabaco en Cuba. Apuntes para su historia. Habana, 1897; 8° (*dall'A.*).

**Noether** (M.). James Joseph Sylvester. Leipzig, 1898; 8° (*Id.*).

** **Reichenbach** (L. et H. G.). Icones Florae Germanicae et Helveticae simul terrarum adjacentium ergo Mediae Europae. T. 23, Decas 9/10. Lipsiae; 4°.

**Trinchera** (B.). Risposta alle osservazioni fatte dal Prof. Ing. L. Lanino al nuovo sistema Trinchera per la costruzione delle opere a mare. Napoli, 1898; 8° (*dall'A.*).

---

## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

### Dal 9 al 23 Gennaio 1898.

** **Allgemeine** Deutsche Biographie. Bd. XLIII, Lfg. 212, 213. Leipzig, 1897; 8°.

* **Bulletin** de la Société d'Études des Hautes-Alpes. Seizième année, IIe série, n. 22. Gap, 1897; 8°.

* **Bibliotheca** Indica: A Collection of Oriental Works published by the Asiatic Society of Bengal. New series, 901-909. Calcutta, 1897; 8°.

**Inventaire** sommaire des Archives Communales antérieures à 1790.
Départ. de la Dordogne. Ville de Périgueux. 1 vol.; 4°.
Départ. de la Somme. Ville d'Amiens, t. III, sér. BB. 1 vol.; 4°.
Départ. du Nord. Ville de Condé-sur-l'Escaut. 1 vol.; 4°.
Périgueux, Amiens, Lille. 1897 (*dal Governo della Rep. Francese*).

**Inventaire** sommaire des Archives Départementales antérieures à 1790.
*Saone et Loire.* Archives civiles; sér. E suppl. Ville de Tournus. 1 vol.; 4°.
*Somme.* Archives civiles; sér. C-D-E, t. IV. 1 vol.; 4°.
*Hautes-Alpes.* Sér. G, t. III. Clergé séculier. Évêché de Gap. 1 vol.; 4°.
*Calvados.* Archives ecclésiastiques; sér. H, t. 1er. Hopitaux de Lisieux et de Bayeux. 1 vol.; 4°. Macon, Amiens, Gap, Caen, 1896, 1897, 1891 (*Id.*).

* **Journal** of the Asiatic Society of Bengal. History, Literature etc. Vol. LXVI, Part I, No. 2. 1897. Calcutta; 8°.
* **Mémoires** de l'Académie de Stanislas. 5me série, t. XIV. Nancy, 1897; 8°.
* **Revue** de l'histoire des religions. XVIIIe année, t. XXXV, n. 2, 3. Paris, 1897 (*Annales du Musée Guimet*).

---

**Giorcelli** (G.). Cronaca del Monferrato in ottava rima del marchese Galeotto del Carretto, 1493, con uno studio storico sui Marchesi del Carretto di Casale e sul poeta Galeotto. Alessandria, 1897; 4° (*dall'A.*).
**Héron de Villefosse.** Diplôme militaire de l'année 139 découvert en Syrie. Paris, 1897; 8° (*Id.*).

**Īçvara-kaula.** The Kaçmīraçabdāmrta, a Kāçmīrī Grammar written in the sanskrit languages... edited with notes and additions by G. A. Grierson. Part I, Declension. Calcutta, 1897; 8° (*dalla Asiatic Society of Bengal*).
**Minelli** (D. M. Peralba y). La Iberiada, poema in prosa. Canto V, Sevilla. Madrid, 1896; 8° (*dall'A.*).
— Inutilidad de las Academias. Madrid, 1897; 16° (*Id.*).
**Passy** (L.). Mélanges scientifiques et littéraires. IIIe sér. Paris, 1896; 8° (*Id.*).

---

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

### Dal 16 al 30 Gennaio 1898.

**Annario** del Observatorio astronómico nacional de Tacubaya para el año de 1898. Mexico, 1897; 8°.
**Atti** del Collegio degli ingegneri e degli architetti in Palermo. 1897, gennaio-luglio. Palermo, 1897; 8°.
* **Atti** dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Anno LI, sess. I, 1897. Roma; 4°.
**Bollettino** dei Musei di Zoologia e Anatomia comparata della R. Università di Torino. Vol. XII, n. 296-310. Torino, 1897; 8°.
* **Carta** geologica d'Italia, 1 : 100.000, fol. 245-247, 255, 263, 264. Roma (*dal Comitato Geologico*).
** **Erläuterungen** zur geologischen Specialkarte von Preussen und den Thüringischen Staaten. LXVI. Lief., n. 34-36, 40-42, 46-48; LXXV. Lief., n. 47, 48, 53, 54, 59, 60. Berlin, 1896-97. 15 fasc. 8° e 2 Atl.
* **Journal** of Morphology. Edited by C. O. Whitman, .....with the co-operation of Ed. Ph. Allis. Vol. XIV, part 1. Boston, 1897; 8°.
* **Monthly Notices** of the Royal Astronomical Society. Vol. LVIII, No. 2. London, 1897; 8°.

** **Poggendorff's** biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. III Bd., Lief. 14 u. 15. Leipzig, 1898; 8°.
* **Proceedings** of the Royal Society. Vol. LXII, No. 382, 383. London, 1898; 8°.
* Журналъ русскаго физико-химическаго Общества при Императорскомъ С. Петербургскомъ Университетѣ; t. XXIX, n. 8. 1897; 8°.

### * *Dall'Università di Basilea:*

**Bamberger** (H.). Ueber Condensation von Paranitroanilin mit Acet- und Propionaldehyd. München, 1896; 8°.
**Berent** (S.). Ueber das capillare Verhalten der Flächen von Steinsalz und Sylvin gegenüber Mutterlaugen. Leipzig, 1896; 8°.
**Burchard** (G.). Beiträge zur Morphologie und Entwickelungsgeschichte der Bacterien. Karlsruhe o. J., 1896; 8°.
**Bürcher** (E.). Ueber Purpura hæmorrhagica gangrænosa. Basel, 1896; 8°.
**Cattani** (E.). Zur Differenzial-Diagnose der Paranoia acuta, von der acuten Verwirrtheit und dem acuten hallucinatorischen Wahnsinn. Bern, 1896; 8°.
**Cohn** (L.). Ueber die Einwirkung oxalsaurer Salze auf anorganische Sesquioxyde. Zur Kenntnis der Thonerdeoxalate. Berlin, 1896; 8°.
**Crometzka** (F.). Ueber Azoniumbasen. Basel, 1896; 8°.
**Epstein** (S.). Studien in der Indazolgruppe. Basel, 1896; 8°.
**Fränkel** (E.). Der abnorme Hochstand des Gaumens in seinen Beziehungen zur Septumdeviation und zur Hypertrophie der Rachendachtonsille. Basel, 1896; 8°.
**Frey** (Emilie). Beitrag zur Aetiologie der Rachitis. Basel, 1896; 8°.
**Ganser** (F.). Ueber die Einwirkung von Phenyl-i-cyanat auf organische Amidosäuren. Erlangen, 1896; 8°.
**Grimm** (J.). Untersuchungen über das Vorkommen von Kohlenoxyd in Erdgasen und über die Kohlenoxyd-Spaltung von Ketonen und Estern bei niederen Temperaturen. Leipzig-Reudnitz, 1897; 8°.
**Gruber** (E.). Ueber Aufbau und Entwickelung einiger Fucaceen. Stuttgart, 1896; 4°.
**Hausmann** (L.). Ueber Trematoden der Süsswasserfische. Genève, 1897; 8°.
**Heberlein** (G.). Zur Kenntnis der unsymetrischen (α) Phenylhydrazinderivate. Genf, 1896; 8°.
**Herzfeld** (E.). Beiträge zur Kenntnis des Aethylendiamins. Berlin, 1896; 8°.
**Heusler** (P.). Statistische Beiträge zur Morbidität und Mortalität der Stadt Basel während der Jahre 1881-1890. Bern, 1897; 4°.
**Heyl** (E.). Ueber Ketone des o-, m- und p-Chlortoluols und des o- und p-Chlorphenetols. Darmstadt, 1896; 8°.
**Hoffmann** (A.). Ueber den Anteil Lavoisier's an der Feststellung der das Wasser zusammensetzenden Gase. Leipzig, 1896; 8°.
**Kern** (H.). Beitrag zur Kenntnis der im Darme und Magen der Vögel vorkommenden Bacterien. Karlsruhe o. J., 1896; 8°.

**Kohn** (A.). Versuche über magnetisch weiche und harte Körper. Leipzig, 1896; 8°.

**Leeuwen** (J. H. K. van). Ueber die Spaltung von Seignettesalz und der entsprechenden Ammoniumverbindung. Amsterdam, 1897; 8°.

**Leupold** (E.). Ueber einige Derivate der Phtalsäure. Basel, 1897; 8°.

**Lommel** (E.). Beiträge zur Kenntniss des pathologisch-anatomischen Befundes im Mittelohr und in den Keilbeinhöhlen bei der genuinen Diphtherie. Wiesbaden, 1896; 8°.

**Marval** (C. de). Ueber Mortalität und Morbidität des Puerperalfiebers an der geburtshülfl. Klinik zu Basel während des Decenniums 1887-1896 incl. Basel, 1897; 8°.

**Merz** (H.). Untersuchungen über Gallicin, ein neues Präparat der Gallussäure, seine antibakteriellen Eigenschaften und seine therapeutische Verwendung in der Ophtalmologie. Aarau, 1896; 8°.

**Meulen** (P. H. van d.). Zur Kenntniss einiger Derivate der Camphersäure und Hemipinsäure. Haag, 1896; 8°.

**Moszczyc** (M.). Ueber ω-Derivate der p-Toluylsäure. Karlsruhe, 1896; 8°.

**Nauss** (O.). I. Beitrag zur Kenntnis der Oxyanthrachinone. — II. Ueber β-Phenylchinolin. Karlsruhe, 1896; 8°.

**Oehmke** (P.). Zur Kenntniss einiger anatomischer und physiologischer Besonderheiten am äusseren Urogenitalapparat der männlichen Schweine, mit besonderer Berücksichtigung des Präputialbeutels derselben. Berlin, 1897; 8°.

**Rauschenbach** (K.). Beitrag zur Pathologie und Therapie der Cataracta traumatica. Schaffhausen, 1897; 8°.

**Ribary** (U.). Klinisch-anatomische Beiträge zur Rhinitis sicca anterior. Berlin, 1896; 8°.

**Riggenbach** (E.). Das Genus Ichthyotænia. Genève, 1896; 8°.

**Schedler** (A.). Ueber eine neue Synthese des symmetrischen Tetraamidobenzols und einiger Derivate desselben. Basel, 1897; 8°.

**Schilling** (H.). Beitrag zur Kenntnis der hämorrhagischen Läsionen der Placenta. Basel, 1896; 8°.

**Schlatter** (R.). Ueber Exstirpation des Uterus wegen Prolaps (8 Fälle aus der Basler Frauenklinik). Basel, 1897; 8°.

**Schreiber** (O.). Ueber die physiologischen Bedingungen der endogenen Sporenbildung bei Bacillus anthracis, subtilis und tumescens. Jena, 1896, 8°.

**Schupp** (H.). Die Grundbegriffe der Psychologie Herbarts in ihrem empirischen und metaphysischen Zusammenhang. Darmstadt, 1896; 8°.

**Studer** (C.). Ueber Blutung und Verblutung bei der Geburt. Thun, 1896; 8°.

**Tesse** (Th. S.). Dampfspannkraftsmessungen an Abkömmlingen des Benzols und über die Bedeutung solcher Messungen für die Lehre von den Siedepunktsregelmässigkeiten. Basel, 1896; 8°.

**Toennies** (E.). Studien über Dampfspannkraftsmessungen am Toluol und an Derivaten des Toluols mit besonderer Berücksichtigung stellungsisomerer Verbindungen. Düsseldorf, 1896; 8°.

**Treuenfels** (P.). Die Zähne von Myliobatis aquila. Breslau, 1896; 8°.

**Zundel** (C.). 1. Étude sur les Produits de décomposition des Diazoïmides aromatiques orthonitrées. — 2. Recherches sur quelques nouveaux dérivés du Triphénylméthane. — 3. Condensation de l'acide diméthylmétamidobenzoïque avec la formaldéhyde .Mulhouse, 1896; 8°.

---

**Bianchi** (L.). Sugli spazî a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti. Roma, 1897; 4° (*dall'A.*).

**Piolti** (G.). Sabbie della valle della Dora. Torino, 1897; 8° (*Id.*).

---

## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche

### Dal 23 Gennaio al 6 Febbraio 1898.

* **Anales** de la Universidad (*República Oriental del Uruguay*). IX, Entr. 3ª. Montevideo, 1897; 8°.

**Annuario** dell'Istituto di storia del diritto romano nella R. Università di Catania. Vol. VI. Catania, 1897-98; 8°.

* **Annuario** della Società Reale di Napoli, 1898; 8°.

** **Mittheilungen** der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1897. XL Bd.; 8°.

* **Publications** de l'École des Lettres d'Alger. Bulletin de Correspondance Africaine. Observations grammaticales sur la grammaire Touareg etc. Légendes et Contes merveilleux de la Grande Kabylle; Histoire de la conquête de l'Abyssinie (XVI$^e$ siècle). Paris, 1897; 8°.

* **Sitzungsberichte** der philosophisch-philologischen und der historischen Classe der k. b. Akademie der Wissens. zu München. 1897, Bd. II, Heft I. München, 1897; 8°.

* **Skrifter** utgifna af kongl. humanistika Vetenskaps-samfundet i Upsala. Band V. Upsala, 1897; 8°.

* **Transactions** of the Royal Society of Literature. Second series, vol. XIX, part II. London, 1897; 8°.

** Dall' Università di Basilea:*

**Barth** (H.). De Coorum titulorum dialecto. Basileæ, 1896; 8°.

*Bericht* über das Gymnasium in Basel. Schuljahr 1896-97. Basel, 1897; 4°.

**Burckhardt** (P.). Die Politik der Stadt Basel im Bauernkrieg des Jahres 1525. Basel, 1896; 8°.

**Degen** (W.). Das Patois von Crémine. Halle a. S., 1896; 8°.

**Heusler** (A.). Geschichte der öffentliche Bibliothek der Universität Basel. Programm zur Rektoratsfeier der Universität Basel. Basel, 1896; 4°.

**Höppner** (R.). Ueber Arbeiterkammern. Leipzig, 1897; 8°.

**Kley** (W.). Die Berufskrankheiten und ihre Stellung in der staatlichen Arbeiterversicherung in nationalökonomischer Beleuchtung. Cassel, 1897; 8°.

**Köhler** (W.). Zur Entwicklungsgeschichte der buchgewerblichen Betriebsformen seit Erfindung der Buchdruckerkunst. 8°.

**Mory** (E.). Marlowes Jude von Malta und Shakespeares Kaufmann von Venedig. Basel, 1897; 4°.

**Niedermann** (M.). Ĕ und Ĭ im Lateinischen. Ein Beitrag zur Geschichte des lateinischen Vocalismus. Darmstadt, 1897; 8°.

*Personal-Verzeichniss* der Universität Basel für das Wintersemester 1896/97 u. Sommersemester 1897. Basel, 1897; 8°.

*Statistische* Mitteilungen des Kantons Basel-Stadt. Bericht über den Civilstand, die Todesursachen und die ansteckenden Krankheiten im Jahre 1894. Basel, 1896; 4°.

**Veraguth** (D.). Basel und das christliche Burgrecht. Basel, 1897; 4°.

*Verzeichniss* der Vorlesungen an der Universität Basel im Winter-Semester 1896/97; Sommer-Semester 1897; Winter-Semester 1897-98. Basel, 1896; 4°.

---

**Borgnini** (G.). Discorso pronunziato dal Procuratore Generale presso la Corte di Cassazione nell'Assemblea generale del 3 gennaio 1898. Torino, 1898; 8° (*dall'A.*).

**Gabotto** (F.). Storia del Piemonte nella prima metà del secolo XIV (1292-1349). Torino, 1894; 8° (*Id.*).

— L'età del Conte Verde in Piemonte secondo nuovi documenti (1350-1383). Torino, 1895; 8° (*Id.*).

— Documenti inediti sulla storia del Piemonte al tempo degli ultimi Principi di Acaia. Torino, 1896; 8° (*Id.*).

— Gli ultimi Principi d'Acaia e la politica subalpina dal 1333 al 1407. Pinerolo, 1897; 8° (*Id.*).

**Lilla** (V.). Le fonti del sistema filosofico di Antonio Rosmini. Milano, 1897; 8° (*Id.*).

— Due meravigliose scoperte di Antonio Rosmini, l'*essere possibile* e l'*unità della storia dei sistemi ideologici.* Milano, 1897; 8° (*Id.*).

— Un saggio di critica obiettiva degli assiomi e delle proposizioni del primo libro dell'Etica di B. Spinoza. Napoli, 1897; 4° (*Id.*).

— Un saggio di critica obiettiva delle sei definizioni del primo libro dell'Etica di B. Spinoza. Napoli, 1896; 8°, 4° (*Id.*).

---

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali:

### Dal 30 Gennaio al 13 Febbraio 1898.

* **Abhandlungen** der mathem.-physischen Classe der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. XXIV, N. 2. Leipzig, 1898; 8°.

**Annali** delle Università Toscane. T. XXI. Pisa, 1897; 4°.

* **Atti** dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania. An. LXXIV, 1896; ser. 4ª, vol. X. Catania, 1897; 4°.

* **Atti** e **Memorie** della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. Anno CCXCVIII, 1896-97, N. S., vol. XIII. Padova, 1897; 8°.

* **Bollettino** della Società dei naturalisti in Napoli. Ser. I, vol. XI, 1897; 8°.

** **Fortschritte** der Physik im Jahre 1892, Bd. XLVIII, 3 Abt. Braunschweig, 1897; 8°.

* **Giornale** della R. Accademia di Medicina. A. LX, n. 10-12. Torino, 1897; 8°.

* **Nachrichten** von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physik. Klasse, 1897, Heft 3; Geschäftliche Mittheilungen, 1897, Heft 2. Göttingen; 8°.

* **Nieuw Archief** voor Wiskunde. Tweede Reeks. Deel III. Derde Stuck. Amsterdam, 1897; 8°.

* **Proceedings** of the Royal Irish Academy. Third series, vol. IV, No. 4. Dublin, 1897; 8°.

* **Proceedings** of the Cambridge philosophical Society; vol. IX, p. 7, 1898.

* **Rendiconto** dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli. Serie 3ª, vol. III, fasc. 12°. Napoli, 1897; 8°.

* **Transactions** of the Royal Society of South Australia. Vol. XXI, Part II. Adelaide, 1897; 8°.

* **Transactions** of the Cambridge philosophical Society. Vol. XVI, p. 3. 1898; 8°.

** **Verhandlungen** der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. XVI, Nr 11-12; XVII, Nr 1. 1897-98; 8°.

* **Verhandlungen** der k. k. geologischen Reichsanstalt. N° 14-16, 1897. Wien; 8°.

**Viskundige** Opgaven met de Oplossingen, door de leden van het Wiskundig Genootschap, Zevende Deel. 4de Stuk. Amsterdam, 1898; 8°.

---

**Amodeo** (F.). Curve k-gonali di sessima specie. Napoli, 1897; 4° (*dall'A.*).

** **Cayley** (A.). The collected mathematical papers. Vol. XIII. Cambridge, 1897; 4°.

**Preda** (A.). Recherches sur le sac embryonnaire de quelques narcissées. Genève, 1897; 8° (*dall'A.*).

— Catalogue des Algues marines de Livourne. Genève, 1897; 8° (*Id.*).

**Sacco** (F.). Sur quelques Tinoparinae du miocène de Turin. Bruxelles, 1893; 8° (*Id.*).

— Gli anfiteatri morenici del lago di Como. Torino, 1893; 8° (*Id.*).

— Lo sviluppo glaciale nell'Appennino settentrionale. Torino, 1894 (*Id.*).

— L'apparato morenico del lago d'Iseo. Torino, 1894; 8° (*Id.*).

— Le variazioni dei molluschi. Modena, 1894; 8° (*Id.*).

— Le Rhinocéros de Dusino. Lyon, 1895; f° (*Id.*).

— Schema orogenetico dell'Europa. Torino, 1895; 8° (*Id.*).

— Relazione geologica sopra un progetto di derivazione d'acqua potabile dalla regione Priglia (Savigliano). Torino, 1895; 8° (*Id.*).

— Les rapports géo-tectoniques entre les Alpes et les Apennins. Bruxelles, 1895; 8° (*Id.*).

— L'anfiteatro morenico del lago di Garda. Torino, 1896; 8° (*Id.*).

— L'Appennino settentrionale. Parte III. La Toscana. Roma, 1896; 8° (*Id.*).

— Relazione per l'esame delle condizioni delle opere di raccolta e di condotta dell'acqua potabile della Valle del Sangone. Torino. 1896; 4° (*Id.*).

---

## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

---

### Dal 6 al 20 Febbraio 1898.

---

* **Abhandlungen** der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Historisch-philologische Klasse. N. F., Bd. II, N. 4. Berlino, 1898; 4°.

**Annuario** della R. Università degli studi di Torino per l'anno accademico 1897-98. Torino, 1898; 8°.

* **Atti** della R. Accademia della Crusca. Adunanza pubblica del 12 di dicembre 1897. Firenze, 1898; 8°.

* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Serie V. Classe di Scienze morali, storiche e filologiche; vol. IV, Parte 1ª. Memorie. Roma, 1897; 4°.

* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Serie V. Classe di Sc. mor., stor. e filol., ser. V, vol. V. Notizie degli Scavi, Novembre 1897; 4°.

* **Atti** del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. T. LVI, disp. 2ª e 3ª. Venezia, 1897-98; 8°.

* **Boletin** de la Real Academia de la Historia. T. XXXII, cuad. I. Madrid, 1898; 8°.

* **Bulletin** de la Société de Géographie. 7ᵐᵉ série, 3ᵐᵉ trimestre 1897. Paris; 8°.

* **Bullettino** dell'Istituto di Diritto Romano. Anno IX, fasc. VI. Roma, 1897; 8°.

* **Comptes-rendus** de l'Athénée Louisianais. 6me sér. Tom. 2me, livr. 1ère. Nouvelle-Orléans, 1898; 8°.

* **Nachrichten** von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Philologisch-historische Klasse, 1897, n. 3. Göttingen; 8°.

**Relazione** sull'Amministrazione delle Gabelle per l'esercizio 1896-97. Roma, 1898; 4° (*dal Ministero delle Finanze*).

**Statistica** degli Scioperi avvenuti nell'Industria e nell'Agricoltura durante l'anno 1896. Roma, 1898; 8° (*dal Minist. di Agric., Industr. e Comm.*).

* **Vocabolario** degli Accademici della Crusca. 5a impressione. Vol. VIII, fasc. 4°. Firenze, 1897; 4°.

---

**Battaglia** (G.). Dell'ordinamento della proprietà fondiaria in Sicilia sotto i Musulmani. Catania, 1893; 8° (*dall'A.*).

— I Diplomi inediti relativi all'ordinamento della proprietà fondiaria in Sicilia sotto i Normanni e gli Svevi. Palermo, 1895; 8° (*Id.*).

— L'ordinamento della proprietà fondiaria nell'Italia meridionale sotto i Normanni e gli Svevi ecc. Palermo, 1896; 8° (*Id.*).

— Studi sulla origine della feudalità. Palermo, 1897; 8° (*Id.*).

**Ferrero** (E.). Constans, Constantinus I, Constantinus II, Constantinus III, Constantius Chlorus (Estratti dal " Dizionario epigrafico di antichità romane ", vol. II). Roma, 1897-1898; 8° (*Id.*).

**Petrone** (I.). La Storia interna ed il problema presente della filosofia del diritto. Modena, 1898; 8° (*Id.*).

**Pitré** (G.). Biblioteca delle tradizioni popolari Siciliane. Palermo, 1872-97, 20 vol.; 16° (*Id.*).

— Bibliografia delle tradizioni popolari d'Italia. Torino-Palermo, 1894; 8° (*Id.*).

** **Poole's Index** to periodical Literature. Third supplement. London, 1897; 8°.

**Theodoro Mommsen** Octogenario decori suo.

PIETATIS . ERGO . ACADEMIA . SCIENTIARUM . BORUSSICA . XXXNOV . MDCCCXCVII

(*Basso rilievo in bronzo; dono della R. Accad. delle Scienze di Berlino*).

---

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

---

### Dal 13 al 27 Febbraio 1898.

---

* **Abhandlungen** der mathem.-physischen Classe der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. XXIV, N° 3. Leipzig, 1898; 8°.

* **Anales** de la Sociedad Científica Argentina. Entrega VI, t. XLIV; I, t. XLV. Buenos Aires, 1897-98; 8°.

**Annals** of the Queensland Museum. No. 1. Brisbane, 1891; 8°.

* **Atti** della Società Italiana di Scienze naturali, vol. XXXVII, fasc. 2°. Milano, 1898; 8°.

* **Atti** dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Anno LI, sess. II. Roma, 1898; 4°.

* **Bollettino** del R. Comitato Geologico d'Italia. Anno 1897, n. 3. Roma; 8°.

* **Communications** de la Société mathématique de Kharkow. 2e Sér., t. VI, n. 2 et 3. Kharkow, 1897; 8°.

* **Fauna Silurica** de Portugal. Lisboa, 1897; 4° (*dalla Direzione dei Lavori Geologici del Portogallo)*.

**Memorie** della Società degli Spettroscopisti italiani. Vol. XXVI, disp. 11a, 12a. Roma, 1897; 4°.

* **Monthly Notices** of the Royal Astronomical Society. Vol. LVIII, n. 3. London, 1898; 8°.

* **Proceedings** of the Royal Society. Vol. LXII, No. 384. London, 1898; 8°.

* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Vol. XXX, fasc. 20, XXXI, fasc. 1-3. Milano, 1898; 8°.

* **Scientific Proceedings** of the R. Dublin Society. Vol. VIII, N. S., p. 5. Dublin, 1897; 8°.

* **Scientific Transactions** of the Roy. Dublin Society. Vol. V, Series II, No. 13; VI, No. 2-13. Dublin, 1896-97; 4°.

* **Transactions** of the Manchester Geological Society. Vol. XXV, No. XII, 1898; 8°.

* **Transactions** of the Zoological Society of London. Vol. XIV, par. 5. 1898; 4°.

---

**Ball** (R.). The twelfth and concluding memoir of the Theorie of Screws. Dublin, 1898; 4° (*dall'A.*).

**Guareschi** (I.). Nozioni di Zoochimica. Torino, 1898; 4° (*Id.*).

**Lacroix** (A.). A. des Cloizeaux. Notice nécrologique. Paris, 1898; 4° (*Id.*).

**Mascari** (A.). Protuberanze solari osservate nel R. Osservatorio di Catania nell'anno 1896. Roma, 1897; 4° (*Id.*).

— Sulla frequenza e distribuzione in latitudine delle macchie solari osservate all'Osservatorio di Catania nel 1896. Roma, 1897 (*Id.*).

— Osservazione del Sole fatta nel R. Osservatorio di Catania. Roma, 1896; 4° (*Id.*).

**Mattirolo** (O.). L'opera botanica di Ulisse Aldrovandi (1549-1605). Bologna. 1897; 8° (*Id.*).

**Riccò** (A.). Gli Osservatorii di Catania e dell'Etna. Roma, 1897; 4° (*Id.*).

**Riccò** (A.) e **Saija** (G.). Risultati delle osservazioni meteorologiche fatte nel quinquennio 1892-96 all'Osservatorio di Catania. Catania, 1897; 4° (*dagli AA.*).

**Tringali** (E.). La temperatura del suolo all'Osservatorio di Catania nel quinquennio 1892-96. Catania, 1897; 4° (*dall'A.*).

**Volante** (A.). Strenna polare 1898. Invocazione ed auguri mondiali a favore di Andrée. Torino, 1898; 4° (*Id.*).

---

## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

---

### Dal 20 Febbraio al 6 Marzo 1898.

---

* **Analecta** Bollandiana. T. XVI, fasc. III. Bruxelles, 1897; 8°.

* **Annuaire** de l'Académie des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique 1896-97. Bruxelles; 16°.

* **Biographie Nationale** publiée par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. XIII, fasc. 2; XIV, 1er fasc. Bruxelles, 1894-96; 8°.

* **Bollettino** delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. 1896. Indice; 8° (*dalla Biblioteca Nazionale centrale di Firenze*).

* **Bulletins** de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et de Beaux-Arts de Belgique. 3e série, t. XXX à XXXIII. Bruxelles, 1895-97; 8°.

* **Giornale** della Società di letture e conversazioni scientifiche di Genova. Anno XIX, fasc. IV. Genova, 1897; 8°.

* **Mémoires Couronnés** et autres mémoires publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Collection in-8°, t. XLIX, LIII, LIV. Lettres, I, II (XLVIII, L). Bruxelles, 1895-1896; 8°.

* **Memorie** del R. Istituto Lombardo di Scienze e lettere. Classe di lettere, scienze storiche e morali. Vol. XX, fasc. VI. Milano, 1897; 4°.

* **Notices** biographiques et bibliographiques concernant les Membres, les Correspondants et les Associés de l'Académie R. des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 1896, 4me édit. Bruxelles, 1897; 16°.

* **Réglements** et Documents concernant les trois classes de l'Acad. R. des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Bruxelles, 1896; 8°.

* **Rendiconto** delle Tornate e dei Lavori dell'Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti della Società Reale di Napoli. N. S., Anno XI, Giugno-Dicembre 1897. Napoli, 1898; 8°.

* **Sitzungsberichte** der philosophisch-philologischen und der historischen Classe der k. b. Akademie der Wissens. zu München. 1897, Heft II; 8°.

**Vorlese-Ordnung** an der k. k. Leopold-Franzens-Universität zu Innsbruck im Sommer-Semester 1898; 8°.

---

**Ebranci** (R.). Angelo Brofferio e il suo tempo. Discorso. Asti, 1898; 8° (*dall'A.*).

**Marre** (A.). Proverbes et similitudes des Malais, avec leurs correspondants en diverses langues d'Europe et d'Asie. Torino, 1898; 8° (*Id.*).

**Mitis** (S.). Storia di Ezzelino IV da Romano con speciale riguardo ad Aquileia e Trento. Maddaloni, 1896; 8° (*Id.*).

**Nadaillac** (de). Le Royaume de Bénin. Massacre d'une mission anglaise; Paris, 1898; 8° (*Id.*).

**Ramorino** (F.). Cornelio Tacito nella storia della cultura. Milano, 1898; 8° (*Id.*).

**Torti** (E.). Relazione statistica sull'Amministrazione della Giustizia nel distretto della Corte d'Appello di Torino nell'anno 1897. Torino, 1898. 8° (*Id.*).

---

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

---

### Dal 27 Febbraio al 13 Marzo 1898

---

** **Abhandlungen** der k. Preussischen geologischen Landesanstalt. N. F., Heft 26. Berlin, 1897; 8°.

* **Abhandlungen** herausg. von der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft. Bd. XXI, 1; XXIV, 1. Frankfurt a. M., 1897; 4°.

* **Acta** et **Commentationes** Imp. Universitatis Jurievensis (olim Dorpatensis), vol. 5°, n. 4. Juriew (Dorpat), 1897; 8°.

* **Anales** de la Sociedad Científica Argentina. Indice general (Tom. I-XL incl.) por el Dr J. Valentin. Buenos Aires, 1897; 8°.

* **Annales** de la Faculté des Sciences de Toulouse, Tome XIe, 4e fasc. Paris, 1897; 4°.

**Annuario** publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro para o anno de 1897. Rio de Janeiro, 1896; 8°.

**Atti** del Congresso Botanico internazionale di Genova, 1892. Redatti per cura del Prof. O. Penzig. Genova, 1893; 8° (*dono del Redattore*).

* **Atti** del Reale Istituto d'Incoragg. di Napoli. 4a serie, vol. X. 1897; 4°.

**Bollettino** della Associazione " *Mathesis* " fra gl'Insegnanti di Matematica delle Scuole Medie. Anno II, N. 4. Torino, 1897; 8°.

* **Bulletin** de la Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Tom. XI, fasc. 1er. Bruxelles, 1897; 8°.

**Bullettino** del vulcanismo italiano e di geodinamica generale. XVIII-XX, fasc. 1-6. Roma, 1898; 8°.

* **Geological** Literature added to the Geological Society's Library during the Year ended December 31st. 1897. London, 1898; 8°.

** **Jahrbuch** über die Fortschritte der Mathematik. Bd. XXVI, Heft 3. Berlin, 1898; 8°.

* **Journal** of the R. Microscopical Society, 1898, part. 1. London, 1898; 8°.

* **Mémoires Couronnés** et mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. LIV. Bruxelles, 1896; 4°.

* **Memoirs** of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XXIII, No. 1. Cambridge U. S. A., 1897; 4°.

* **Memorie** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze matematiche e naturali. XVIII, fasc. IV. Milano, 1898; 4°.

** **Morphologische** Arbeiten. Herausg. von Dr G. Schwalbe. 7 Bd., 3 Heft. Jena, 1897; 8°.

* **Observations** made at the magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Vol. XIX, 1896. Batavia, 1897; f°.

* **Occasional** Papers of the California Academy of Sciences, V. San Francisco, 1897; 8°.

* **Proceedings** of the California Academy of Sciences. III Serie. Geology, Vol. I, No 2. Zoology, Vol. I, No 4. San Francisco, 1897; 4°.

* **Proceedings** of the Royal Society. Vol. LXII, No. 385. London, 1898; 8°.

* **Quarterly** Journal of Geological Society. Vol. LIV, Part. 1. No 213. London, 1898; 8°.

* **Rendiconto** dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli Serie 3a, vol. IV, fasc. 1°. Napoli, 1898; 8°.

**Report** (Seventeenth Annual) of the United States Geological Survey to the Secretary of the Interior 1895-96. Ch. D. Walcott Director. Part. I. Director's report and other papers; Part II. Economic Geology and Hydrography. Washington, 1896, 2 vol.; 4°.

* **Report** (Sixteenth Annual) of the Bureau of American Ethnology to the Secretary of the Smithsonian Institution 1894-'95 by J. W. Powell. Washington, 1897; 4°.

* **Sitzungsberichte** der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München, 1897, Heft III. München, 1898; 8°.

* **Sitzungsberichte** der Kön. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin (21 October) XL (16 December 1897) LIII. Berlin; 8°.

**Spelunca.** Bulletin de la Société de Spéléologie. 3e année, n. 12 (Oct.-Déc. 1897). Paris, 8°.

* **Transactions** of the Manchester Geological Society. Vol. XXV, No. XIII, XIV. 1898; 8°.

* **Verhandlungen** der k. k. geologischen Reichsanstalt. Sitzung. N. 17 u. 18, 1897. Wien, 8°.

* **Wiskundige** Opgaven met de Oplossingen, door de leden van het Wiskundig Genootschap, ter sepreuke voerende: VIII Dl. 1ste Stuk. Amsterdam, 1896; 8°.

* **Year-Book** of the Royal Society. 1897-98. N. 2. London, 1898; 8°.

---

**Albert** Ier (prince de Monaco). Sur le développement des Tortues (T. caretta). Paris, 1898; 8° (*dall'A.*).

— Sur la quatriène campagne de la "*Princesse-Alice*". Paris, 1898; 4° (*Id.*).

— Sur les Observatoires météorologiques de l'Océan Atlantique. Paris, 1898; 4° (*Id.*).

**Albrecht** (Th.). Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation im December 1897. Berlin, 1898; 4° (*Id.*).

**Caldarera** (F.). Sull'equazioni lineari ricorrenti trinomie, ecc. Napoli, 1897; 4° (*dall'A.*).

**Carnoy** (J. B.). A propos de fécondation. Réponse à von Erlanger et à Flemming. Lierre et Louvain, 1898; 8° (*Id.*).

— La fécondation chez l'Ascaris megalocephala. Jena, 1897; 8° (*Id.*).

**De Agostini** (G.). Esplorazioni idrografiche nei laghi vulcanici della provincia di Roma. Roma, 1898; 8° (*Id.*).

**Dyck** (W.). Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. München, 1897; 4° (*dall'Accad. d. Sc. di Monaco*).

**Gordon y de Acosta** (A.). La viabilidad legal y la Fisiologica. Habana, 1897; 8° (*dall'A.*).

**Maggiora** (A.). Sopra l'influenza dell'età su di alcuni fenomeni della fatica. Modena, 1897; 4° (*Id.*).

**Penzig** (O.). Pflanzen-Teratologie. Genua, 1890-94. 2 vol.; 8° (*Id.*).

— Sui rapporti genetici tra *Ozonium* e *Coprinus*. 1880; 8° (*Id.*).

— Sulla presenza di *Cistoliti* in alcune Cucurbitacee. Venezia, 1882; 8° (*Id.*).

— Beltrania, un nuovo genere di Ifomiceti. 1882; 8° (*Id.*).

— Zur Verbreitung der Cystolithen im Pflanzenreich. Kassel u. Berlin, 1882; 8° (*Id.*).

— Un nuovo flagello degli Agrumi. Modena, 1883; 4° (*Id.*).

— Sull'esistenza di apparecchi illuminatori nell'interno d'alcune piante. Modena, 1883; 8° (*Id.*).

— La malattia dei gelsi nella primavera del 1884. Modena, 1884; 8° (*Id.*).

— Studj sopra una virescenza osservata nei fiori della Scabiosa maritima L. Modena, 1884; 8° (*Id.*).

— Note micologiche:

Appunti sulla Flora micologica del monte Generoso;

Funghi della Mortola;

Seconda contribuzione allo studio dei funghi Agrumicoli. Venezia, 1884. 3 fasc.; 8° (*Id.*).

— Il giardino Ricasoli alla Casa Bianca (Port'Ercole) sul monte Argentario. Firenze, 1885; 8° (*Id.*).

— Zu H. Dingler's Aufsatz: Der Aufbau des Weinstockes. Leipzig, 1885; 8° (*Id.*).

— Terza Esposizione Nazionale d'Orticultura a Roma. Modena, 1886; 8° (*Id.*).

— Alcune osservazioni teratologiche. Genova, 1889; 8° (*Id.*).

— Piante nuove o rare trovate in Liguria. I-II. Genova, 1889; 8° (*Id.*).

— Sopra un Erbario di Paolo Boccone conservato nell'Istituto Botanico della R. Università di Genova. Messina, 1889; 8° (*Id.*).

— Ueber die Perldrüsen und anderer Pflanzen. Genova, 1892; 8° (*Id.*).

— L'Istituto Botanico Hanbury della R. Università di Genova. 1892; 8° (*Id.*).

— Piante raccolte in un viaggio botanico fra i Bogos ed i Mensa nella Abissinia settentrionale. Genova, 1892; 8° (*Id.*).

— Considérations générales sur les anomalies des Orchidées. Cherbourg, 1894; 8° (*Id.*).

**Penzig** (O.). Primo contributo allo studio dei nomi volgari delle piante in Liguria. Genova, 1897; 8° (*dall'A.*).
— Florae Ligusticae synopsis. Genova, 1897; 8° (*Id.*).
— Onoranze a Marcello Malpighi. Genova, 1898; 8° (*Id.*).
— Amallospora, nuovo genere di Tubercularieе. Genova, 1898; 8° (*Id.*).
**Penzig** (O.) et J. **Camus**. Anomalie du Rhinantus Alectorolophus *Lois.* Paris; 8° (*dal sig. Penzig*).
— Illustrazione del Ducale Erbario Estense del XVI secolo. Modena, 1885; 8° (*Id.*).
**Penzig** (O.) e T. **Poggi**. Il male bianco delle viti e degli alberi da frutta. 8° (*Id.*).
**Penzig** (O.) et G. A. **Saccardo**. Diagnoses fungorum novorum in insula Iava collectorum. Genova, 1897; 8° (*Id.*).
**Re** (F.). La teoria dei raggi Roentgen. Palermo, 1898; 8° (*Id.*).

---

## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche

### Dal 6 al 20 Marzo 1898.

* **Abhandlungen** der philosophisch-philologischen Classe der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften. Bd. XX, 3 Abth. München, 1897; 4°.
* **Berichte** über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (Philolog.-hist. Classe), 1897, II. Leipzig, 1898; 8°.
* **Boletin** de la Real Academia de la historia; t. XXXII, cuad. II. Madrid, 1898; 8°.

---

**Baumann** (F. L.). Der bayerische Geschichtsschreiber Karl Meichelbeck 1669-1734. München, 1897; 4° (*dalla R. Accad. d. sc. di Monaco*).
**Gerini** (G. B.). Gli scritti filosofici e pedagogici di Giuseppe Allievo nel quinquennio 1893-97. Asti, 1898; 8° (*dall'A.*).
**Paul** (H.). Die Bedeutung der deutschen Philologie für das Leben der Gegenwart. München, 1897; 4° (*dalla R. Accad. d. sc. di Monaco*).
**Poggi** (V.). La leggenda di S.ta Elisabetta d'Ungheria in dialetto savonese della metà del secolo XV. Genova, 1898; 8° (*dall'A.*).

---

# Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

## Dal 13 al 27 Marzo 1898.

* **Annales** de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. XII, 1er fasc. 1898. Paris, 1898; 4°.

* **Annuario** della R. Accademia dei Lincei, 1898. Roma; 16°.

* **Atti** della Società toscana di Scienze naturali residente in Pisa. Processi verbali, vol. X, 4 luglio 1897; XI, 28 novembre 1897; 8°.

* **Giornale** della R. Accademia di Medicina. A. LXI, n. 1-2. Torino, 1898; 8°.

**Laws** (The) of the Edinburgh Geological Society (Instituted 1834). Corrected to 31st October 1897; 8°.

* **Monthly Notices** of the Royal Astronomical Society. Vol. LVIII, No. 4. London, 1898; 8°.

**Osservazioni** meteorologiche eseguite nell'anno 1897, col riassunto composto sulle medesime da E. Pini. Milano, 1897; 4° (*dal R. Osserv. Astronomico di Brera*).

**Publicationen** für die Internationale Erdmessung. Die astronomisch-geodätischen Arbeiten des k. und k. militär-geographischen Institutes in Wien. X, XI Bd. Astronomische Arbeiten des k. k. Gradmessungs-Bureau etc. IX Bd. Längenbestimmungen. Wien, 1897; 4°.

* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Vol. XXXI, fasc. 4. Milano, 1898; 8°.

* **Rendiconto** dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli. Serie 3a, vol. IV, fasc. 2°. Napoli, 1897; 8°.

**Roll** of the Edinburgh Geological Society and List of Corresponding Societies and Institutions. 1897; 8°.

**Transactions** of the Edinburgh Geological Society. Vol. VII, pt. III. Edinburgh, 1897; 8°.

* **Verhandlungen** der k. k. geologischen Reichsanstalt. Sitzung. N. 1, 2, 1898. Wien; 8°.

* **Журналъ** русскаго физико-химическаго Общества при Императорскомъ С. Петербургскомъ Университетѣ; t. XXIX, n. 9. 1897.

**Cabreira** (A.). Sur l'aire des Polygones. Lisbonne, 1897; 8° (*dall'A.*).

— Sur les vitesses sur la spirale. Lisbonne, 1898; 8° (*id.*).

## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche

---

### Dal 20 Marzo al 3 Aprile 1898.

---

* **Abhandlungen** der K. Gesellschaften zu Göttingen. Philologisch-historische Klasse. N. F., Bd. 2, Nro. 5, 6. Berlin, 1898; 4°.

* **Annuario** del Ministero della Pubblica Istruzione, 1898. Roma; 8°.

** **Bibliotheca** Philologica Classica. Vol. XXIV, 1897. Trimestre quartum. Berolini, 1897; 8°.

**Cause** di morte. Statistica dell'anno 1896. Roma, 1897; 8° *(dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio).*

* **Commentari** dell'Ateneo di Brescia per l'anno 1897. Brescia; 8°.

* **Institut de France**:

Annuaire pour 1898. Paris, 1898; 16°.

Notices et Extraits des manuscrits de la Bibliothèque Nationale et autres bibliothèques publiés par l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres. T. 35e. Paris, 1897; 4°.

Œuvres complètes de Bartolomeo Borghesi. T. 7-10. Paris, 1872-1897. 4 vol.; 4°.

**Jugoslavenske Akademije** Znanosti i Umjetnosti.

Historija srednjega vijeka za narod hrvaski i srpski. I Sveska: Rimski svijet na domaku propasti i Varvari. Zagrebu, 1897-98. 1 vol.; 8°.

Monumenta spectantia historiam slavorum meridionalium volumen XXIX. Monumenta Ragusina. Libri reformationum. Tom. V, A. 1301-1336. 1 vol.; 8°.

Rad, Knjiga CXXXII. 1 vol.; 8°.

Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena. Svezak II. 1 vol.; 8°.

**Tabella** indicante i valori delle merci nell'anno 1897 per le statistiche commerciali. Roma, 1898; 8° *(dal Ministero delle Finanze)*.

---

**Manfroni** (C.). Carlo Emanuele I e il trattato di Lione. Torino, 1891: 8° *(dall'A.)*.

— La Marina Pontificia durante la guerra di Corfù. Roma, 1891; 8° *(Id.)*.

— La Legazione del Cardinale Caetani in Francia (1589-90). Torino, 1893; 8° *(Id.)*.

— Ginevra, Berna e Carlo Emanuele I. 1589-92. Torino, 1893; 8° *(Id.)*.

— La Lega Cristiana nel 1572 con lettere di M. Antonio Colonna. Roma, 1894; 8° *(Id.)*.

— L'influenza della potenza marittima sulla Storia. La potenza marittima inglese durante la rivoluzione francese e l'impero. Roma, 1895; 8° *(Id.)*.

— La Marina militare del Granducato Mediceo. Parte I e II. Roma, 1895-96; 8° *(Id.)*.

**Manfroni** (C.). L'empia alleanza. Roma, 1896; 8° *(dall'A.)*.

— La politica commerciale delle Repubbliche marinare italiane in Oriente. Roma, 1897; 8° *(Id.)*.

— Storia della Marina Italiana dalla caduta di Costantinopoli alla battaglia di Lepanto. Roma, 1897; 8° *(Id.)*.

** **Mazzatinti** (G.). Inventari dei manoscritti delle biblioteche d'Italia. Vol. VII. Forlì, 1897; 8°.

**Orsi** (P.), Il carteggio di Carlo Emanuele I. Torino, 1891; 8° *(dall'A.)*.

— La Storia d'Italia narrata da scrittori contemporanei agli avvenimenti. Venezia, 1895-97. 3 vol.; 8° *(Id.)*.

— Breve storia d'Italia. Milano, 1897; 8° *(Id.)*.

**Pellico** (Silvio). Poesie e lettere inedite. Pubblicate per cura della Biblioteca della Camera dei Deputati. Roma, 1898; 8° *(dono della Presidenza della Camera dei Deputati)*.

---

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

---

### Dal 27 Marzo al 17 Aprile 1898.

---

* **Abhandlungen** der mathem.-physischen Classe der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften, Bd. XIX, 2 Abth. München, 1898; 4°.

* **Annales** de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. XII, 2$^{me}$ fasc., 1898. Paris, 1898; 4°.

**Atti** della R. Accademia Peloritana; anno XII, 1897-98. Messina, 1898; 8°.

* **Bergens** Museum Aarbog for 1897. Bergen, 1898; 4°.

* **Berichte** über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-Physische Classe, 1897, N. V, VI. Leipzig, 1898; 8°.

* **Bulletin** of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XXXI, No. 6. Cambridge, Mass., 1898; 8°.

* **Bulletin** de l'Académie Royale des sciences et des lettres de Danemark. 1897, n. 6; 1898, n. 1. Copenhague; 8°.

* **Catalogue** of the Madreporarian Corals in the British Museum (Natural History). Vol. III. The Genus Montipora, Anacropora. By H. M. Bernard. London, 1897; 4°.

** **Erläuterungen** zur geologischen Specialkarte von Preussen und Thüringischen Staaten. LXXXII. Lief., n. 37-39, 43-45; LXXXIII. Lief., n. 25-27, 31-33. Berlin, 1897. Testo e Atl$^{i}$.

* **Földtani** Közlöny kiadja a Magyarhoni Földtani Társulat. Vol. XXVII, n. 8-12. Budapest, 1897; 8°.

**Jahresbericht** der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft. Leipzig, 1898; 8°.

* **Memorias** y Revista de la Sociedad Científica " Antonio Alzate „. T. X (1895-96), N. 5-12. Mexico, 1897; 8°.

**Minnesota** Botanical Studies. Bulletin N. 9, Part XII. Minneapolis, Minn., 1898; 8° (*dal Geological and Natural History Survey of Minnesota*).

* **Mittheilungen** aus dem Jahrbuche der kön. ungar. geologischen Anstalt. Bd. XI, Heft 6, 7. Budapest, 1897, 1898; 8°.

* **Observations** publiées par l'Institut météorologique central de la Société des Sciences de Finlande, vol. 15e, 1re livr. Observ. météorologiques faites à Helsingfors en 1896. Helsingfors, 1897; 4°.

* **Observations** météorologiques publiées par l'Institut météorologique central de la Société des Sciences de Finlande. Résumé des années 1881-1890. Kuopio, 1897; 4°.

* **Proceedings** of the Royal Society. Vol. LXII, No. 386-388; LXIII, 389. London, 1898; 8°.

* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Vol. XXXI, fasc. 5, 6. Milano, 1898; 8°.

* **Rendiconti** del Circolo matematico di Palermo. Tom. XII, fasc. I-II. Palermo, 1898; 8°.

**Report** of the Sixty-Sevent Meeting of the British Association for the advancement of Science, held at Toronto in August 1897. London, 1898; 8°.

* **Year-Book** of the Royal Society. 1896-97, No. 1. London, 1897; 8°.

---

** **Cayley** (A.). The collected Mathematical papers. Suppl. vol. containing titles of papers and index. Cambridge, 1898; 4°.

**Fiorini** (M.). Il *Periplus* di A. E. Nordenskiöld. Roma, 1898; 8° (*dall'A.*).

**Motta-Cocco** (A.). Il Coli bacillo ed i Cocchi Piogeni nell'etiologia delle febbri intestinali. Ricerche sperimentali. Milano, 1898; 8° (*Id.*).

** **Ostwald** (W.). Das physikalisch-chemische Institut der Universität Leipzig und Feier seiner Eröffnung am 3. Januar 1898. Leipzig, 1898; 8°.

**Scharizer** (R.). Prof. Dr. Albrecht Schrauft. Eine biographische Skizze. Czernowitz, 1898; 8° (*dall'A.*).

**Socolow** (S.). Nouvelles recherches astronomiques. Moscou, 1896; 8° (*Id.*).

— Des planètes se trouvant vraisemblablement au delà de Mercure et de Neptune. Moscou, 1897; 8° (*Id.*).

---

## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

### Dal 3 al 24 Aprile 1898.

* **Abhandlungen** der philos.-philol. Classe der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften. Bd. 21, Abth. 1. München, 1898; 4°.

** **Allgemeine** Deutsche Biographie. Bd. XLIII, Lfg. 214-216. Leipzig, 1898; 8°.

* **Analecta** Bollandiana. T. XVII, fasc. 1-2. Paris-Bruxelles, 1898; 8°.

* **Annuario** della R. Università di Pisa per l'anno accademico 1897-98. Pisa, 1898; 8°.

* **Anuario** estadístico de la República Oriental del Uruguay, Año 1896. Montevideo, 1898; 8°.

**Assemblea** Generale ordinaria (31 marzo 1898) della Società Anonima Canavese per la strada ferrata Torino-Ciriè-Lanzo. Torino, 1898; 8°.

* **Atti** della R. Accademia Lucchese di scienze, lettere ed arti. Tomo XXIX. Lucca, 1898; 8°.

* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Classe di Sc. mor., stor. e filol., ser. V, vol. V. Notizie degli Scavi, Dicembre e Indice topografico. 1897; Gennaio, 1898; 4°.

* **Atti** del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. T. LVI, disp. 4ª, 5ª. Venezia, 1897-98; 8°.

* **Boletin** de la Real Academia de la Historia. T. XXXII, cuad. 3. Madrid, 1898; 8°.

* **Giornale** della Società di letture e conversazioni scientifiche di Genova. Anno XX, fasc. I. Genova, 1898; 8°.

* **Vjesnik** hrvatskoga Arheološkoga Društva. N. S. Godina II 1896/97. Zagrebu, 1897; 4°.

---

**Boffito** (G.). Per la storia della Meteorologia in Italia. Torino, 1898; 8° (*dall'A.*).

**Borson**. Le Général Ménabréa marquis de Val-Dora. Notice biographique. Chambéry, 1898; 8° (*Id.*).

**Cipolla** (C.). Pubblicazioni sulla storia medioevale italiana (1894). Venezia, 1896; 8° (*Id.*).

**Dionisotti** (C.). Illustrazioni storico-corografiche della regione subalpina. Torino, 1898; 8° (*Id.*).

**Landucci** (L.). Lex Aebutia. Considerazioni storiche. Venezia, 1897; 8° (*Id.*).

**Merkel** (C.). Adelaide di Savoia, Elettrice di Baviera. Torino, 1892; 8° (*Id.*).

** **Pais** (E.). Storia della Sicilia e della Magna Grecia. Torino, 1894; 8°.

** **Sanuto** (M.). I Diarii. T. LI, fasc. 216, 217. Venezia, 1898; 4°.

**Staderini** (A.). Schedari per cataloghi ed altro materiale per biblioteche. Descrizione e tariffe. Roma; 4° (*dall'A.*).

**Zanichelli** (D.). Lo Statuto di Carlo Alberto. Conferenza. Siena, 1898; 8° (*Id.*).

---

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

---

### Dal 17 Aprile al 15 Maggio 1898.

---

* **Abhandlungen** der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. N. F. Bd. I, Nro 1. Berlin, 1898; 4°.

* **Anales** de la Oficina Meteorológica Argentina. Buenos Aires, 1897; 4°.

* **Annali** del Museo Civico di Genova. Serie 2ª, vol. XVIII, 1897; 8°.
* **Annali** della R. Accad. d'Agricoltura di Torino, vol. 40°. Torino, 1897; 8°.
* **Archives** Néerlandaises des sciences exactes et naturelles publiées par la Société hollandaise des sciences à Harlem. Sér. II, t. I, 4e et 5e livr. La Haye, 1898; 8°.
* **Atti** della R. Accademia medico-chirurgica di Napoli. Anno LI, N. S., n. 6. Napoli, 1897; 8°.
* **Atti** della Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino. A. XXXI, 1897. Torino, 1897; 4°.
* **Atti** del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; t. LVI, disp. 6ª. Venezia, 1897-98; 8°.
**Bollettino** dei Musei di Zoologia ed Anatomia comparata della R. Università di Genova. N. 56-61, 1897; 8°.
* **Bollettino** del R. Orto Botanico di Palermo. Anno I, fasc. I, 1897; fasc. III-IV, 1898; 8°.
* **Bollettino** del R. Comitato Geologico d'Italia. Anno 1897, n. 4. Roma; 8°.
* **Bulletin** mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. XXIX, année 1897. Upsal, 1897; 4°.
** **Fortschritten** der Physik. Namenregister. Bd. XXX (1865) bis XLIII (1887), II Hälfte. Berlin, 1898; 8°.
* **Giornale** della R. Accademia di Medicina. A. LXI, n. 3. Torino, 1898; 8°.
* **Jenaische** Zeitschrift für Naturwissenschaft, herausg. von der medicinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena. N. F., Bd. XXIV. Leipzig, 1898; 8°.
* **Journal** of the R. Microscopical Society, 1898, part 2. London; 8°.
* **Kongligà-Svenska** Vetenskaps-Akademiens. Handlingar Ny Följd. Bd. 29. Stockholm, 1896-97; 4°.
* **Mémoires** de la Société Royale des Sciences de Liège. 2me série, t. 20e. Bruxelles, 1898; 8°.
* **Memoirs** of the Geological Survey of India. Vol. XXV, XXVI. Calcutta, 1895-96; 8°.
* **Memoirs** of Geological Survey of India. Palaeontologica Indica, Ser. XVI, vol. I, Part I. Calcutta, 1895; 4°.
* **Missouri** Botanical Garden. Third annual Report. St. Louis, Mo., 1892; 8°.
* **Monthly Notices** of the Royal Astronomical Society. Vol. LVIII, No. 5. London, 1898; 8°.
**Nuova** (La) **Notarisia**. Serie IX, Aprile 1898; 8°.
** **Petermanns** Mitteilungen aus Justus Perthes' Geographischer Anstalt. Ergänzungsheft Nr 124. Die Verteilung des Niederschlags auf d. festen Erdoberfläche von A. Supan. Gotha, 1898; 8°.
* **Proceedings** of the Royal Physical Society. Session 1896-97. Edinburgh, 1897; 8°.
* **Proceedings** of the Royal Society. Vol. LXIII, No. 390-393. London, 1898; 8°.
* **Proceedings** of the Zoological Society of London for the year 1897. Part IV. London, 1898; 8°.
* **Quarterly** Journal of Geological Society. Vol. LIV, Part 2, No. 214. London, 1898; 8°.

* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Vol. XXXI, fasc. 7. Milano, 1898; 8°.

* **Rendiconto** delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. N. S., vol. II, fasc. I e II. Bologna, 1898; 8°.

* **Rendiconto** dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli. Serie 3ª, vol. IV, fasc. 3° e 4°. Napoli, 1898; 8°.

* **Sitzungsberichte** der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1898, Heft I. München; 8°.

* **Transactions** of the R. Irish Acad. Vol. XXXI, part I-VI., Dublin, 1896-98; 4°.

* **Transactions** of the Cambridge philosophical Society. Vol. XVI, p. 4ª. Cambridge, 1898; 8°.

---

**Carnoy** (J. B.) et **Lebrun** (H.). La cytodiérèse de l'œuf. La vésicule germinative et les globules polaires chez les Batraciens. Lierre-Louvain, 1898; 8° (*dagli AA.*).

**Crepas** (E.). Gli studi di matematiche pure. Milano, 1898; 8° (*dall'A.*).

**Galileo** (G.). Le Opere. Vol. VII. Firenze, 1897; 4° (*dono del Ministero della Pubblica Istruzione*).

**Piette** (Ed.) et **J. de la Porterie.** Études d'Ethnographie préhistorique; fouilles à Brassempouy, en 1896. Paris, 1897; 8° (*dal sig. Piette*).

**Roux** (W.). Ueber die Leistungsfähigkeit der Principien der Descendenzlehre zur Erklärung der Zweckmässigkeiten des thierischen Organismus. Breslau, 1880; 8° (*dall'A.*).

— Zur Frage der Axenbestimmung des Embryo im Froschei. Erlangen, 1888; 8° (*Id.*).

— Beiträge zur Entwicklungsmechanik des Embryo. Berlin, 1888; 8° (*Id.*).

— Ueber die Entwickelung des Extraovates der Froscheier. Breslau, 1889; 8 (*Id.*).

— Die Entwicklungsmechanik der Organismen, eine anatomische Wissenschaft der Zukunft. Wien, 1890; 8° (*Id.*).

— Rudolf Fick, Ueber die Form der Gelenkflächen. Erlangen, 1891; 8° (*Id.*).

— Ueber die morphologische Polarisation von Eiern und Embryonen durch den elektrischen Strom, sowie über die Wirkung des elektrischen Stromes auf die Richtung der ersten Theilung des Eies. Wien, 1891; 8° (*Id.*).

— Ueber das entwickelungsmechanische Vermögen jeder der beiden ersten Furchungszellen des Eies. Wien, 1892; 8° (*Id.*).

— Das Gesetz der Transformation der Knochen. Berlin, 1893; 8° (*Id.*).

— Ueber die Selbstordnung der Furchungszellen. 1-3 Mitth. Innsbruck, 1893; 8° (*Id.*).

— Ueber die ersten Teilungen des Froscheies und ihre Beziehungen zu der Organbildung des Embryo. Jena, 1893; 8° (*Id.*).

— Ueber richtende und qualitative Wechselwirkungen zwischen Zellleib und Zellkern. Leipzig, 1893; 8° (*Id.*).

— Discussion zu den Vorträgen des Herren O. Schultze und H. E. Ziegler. Jena, 1894; 8° (*Id.*).

**Roux** (W.). Hertwig, Oscar, Zeit- und Streitfragen der Biologie. Göttingen, 1894; 8° (*dall'A.*).

— Die Methoden zur Erzeugung halber Froschembryonen und zum Nachweis der Beziehung der ersten Furchungsebenen des Froscheies zur Medianebene des Embryo. Jena, 1894; 8° (*Id.*).

— Ueber die Dicke der statischen Elementartheile und die Maschenweite der Substantia spongiosa der Knochen. Halle, 1896; 8° (*Id.*).

— Ueber die polare Erregung der lebendigen Substanz durch den electrischen Strom. Bonn, 1896; 8° (*Id.*).

— 1. Ueber den Antheil von " Auslösungen „ an der individuellen Entwickelung. 2. Berichtigungen zu H. Driesch's Aufsatz: Betrachtungen über die Organisation des Eies. Leipzig, 1896; 8° (*Id.*).

— Methode, undeutliche und selbst bis zur vollkommenen Unsichtbarkeit abgeschliffene Prägung von metallischen Gegenständen wieder deutlich sichtbar zu machen. Halle, 1896; 8° (*Id.*).

— Berichtigungen zu M. Verworn's Mittheilung IV: Ueber die polare Erregung der lebendigen Substanz und zu einigen anhangsweise besprochenen entwickelungsmechanischen Thematen. Bonn, 1897; 8° (*Id.*).

— W. Pfeffer, Pflanzenphysiologie, ein Handbuch der Lehre vom Stoffwechsel und Kraftwechsel in der Pflanze. Leipzig, 1897; 8° (*Id.*).

— Wilhelm Haacke, Grundriss der Entwickelungsmechanik. Leipzig, 1897; 8° (*Id.*).

— R. S. Bergh, Vorlesungen über allgemeine Embryologie. Leipzig, 1898; 8° (*Id.*).

— Anpassung, functionelle. Wien; 8° (*Id.*).

**Segre** (C.). Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie. Roma, 1897; 8° (*Id.*).

— Le moltiplicità nelle intersezioni delle curve piane algebriche con alcune applicazioni ai principii della teoria di tali curve. Napoli; 4° (*Id.*).

**Zapalyczai de Korompa** (G.). Studiis in circuli quadraturam; 8° (*Id.*).

---

## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

---

### Dal 24 Aprile al 22 Maggio 1898.

---

* **Anales** de la Universidad. T. IX, Entrega 4. Montevideo, 1898; 8° (*dal Governo della Republica Orientale dell'Uruguay*).

* **Annuario** della R. Università degli studî di Padova per l'anno accademico 1897-98; 8°.

**Atti** della Società Ligure di Storia patria. Vol. XXVIII, fasc. II; XXIX, fasc. I. Genova, 1897-98; 8°.

* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Serie V. Classe di Sc. mor., stor. e filol., ser. V, vol. VI. Notizie degli Scavi: Febbraio 1898; 4°.

* **Boletin** de la Real Academia de la Historia. T. XXXII. cuad. 4. 5. Madrid, 1898; 8°.

* **Bollettino** della Società Umbra di Storia Patria. Anno IV, fasc. I. Perugia, 1898; 8°.

* **Bulletin** de la Société de Géographie. 7me série, t. XVII, 4me trimestre 1896; t. XIX, 1r trim. 1898. Paris; 8°.

* **Comptes-rendus** des séances de la Société de Géographie; n. 18, 19, 20, 1897; 1, 2, 3, 1898. Paris, 8°.

* **Nachrichten** von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Philologisch-historische Klasse, 1898, Heft 1. Göttingen, 1897; 8°.

** **Raccolta** ufficiale delle Leggi e dei Decreti del Regno d'Italia. Indice e parte supplementare. 1897; 8°.

**Report** (Third Annual). The John Crerar library. For the Year 1897. Chicago, 1898; 8°.

* **Sitzungsberichte** der philosophisch-philologischen und der historischen Classe der k. b. Akademie der Wissens. zu München, 1897, Bd. II, Heft III. München, 1898; 8°.

---

**Basile** (M.). Latifondi e poderi, ragionamenti economici fra proprietari, contadini e politici. Messina, 1898; 16° (*dall'A.*).

**Bosio** (A.). Nuovo alfabeto; 4° (*Id.*).

**Dalla Vedova** (G.). I recenti lutti della Società geografica italiana. Roma, 1898; 8° (*Id.*).

**La Mantìa** (Francesco) e (Giuseppe). Consuetudini di Linguagrossa ora per la prima volta pubblicate. Palermo, 1898; 8° (*dagli AA.*).

**Nésustroïeff** (A.). УКАЗАТЕЛЬ КЪ РУССКИМЪ ПОВРЕМЕННЫМЪ ИЗДАНІЯМЪ И СБОРНИКАМЪ за 1703-1802 г. г. и къ ИСТОРИЧЕСКОМУ РОЗЫСКАНІЮ О НИХЪ. С.-ПЕТЕРБУРГЪ, 1898; 8° (*dall'A.*).

**Roversi** (L.). Luigi Palma di Cesnola e il Metropolitan Museum of Art di New-York. New-York, 1898; 8° (*Id.*).

---

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

### Dal 15 al 29 Maggio 1898.

**Anales** del Museo Nacional de Montevideo, t. II, fasc. 8, 1898; 4°.

* **Annales** des Mines. 9me série, t. XII, 12me livr.; t. XIII, 1e-3e livr. Paris, 1897-98; 8°.

* **Atti** della R. Accademia dei Fisiocritici in Siena. Vol. VIII, n. 9, 10 (1897); IX (1898). Processi verbali delle adunanze 1-3 (1897-98); 8°.

* **Atti** e **Rendiconti** dell'Acc. Medico-chir. di Perugia; vol. IX, f. 4°. 1897; 8°.

* **Atti** e **Rendiconti** dell'Accademia di scienze, lettere e arti dei Zelanti di Acireale. Nuova serie, vol. VIII, 1897-98. Acireale, 1898; 8°.

* **Bulletin** of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XXXII, No. 1, 2. Cambridge, Mass., 1898; 8°.

* **Carta** geologica delle Alpi Apuane. Scala di 1 a 50.000 e Cenni relativi. Roma, 1897; f° (*dal R. Ufficio Geologico*).

** **Fortschritte** (Die) der Physik im Jahre 1892, II. Braunschweig, 1898; 8°.

* **Monthly Notices** of the Royal Astronomical Society. Vol. LVIII, No. 5. London, 1898; 8°.

**Osservatorio** meteorologico nel Seminario vescovile di Sarzana. Anno III. Osservazioni fatte dal 1° dicembre 1896 a tutto novembre 1897. Sarzana, 1898; 8°.

* **Proceedings** of the Royal Society. Vol. LXIII, No. 394. London, 1898; 8°.

* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Vol. XXXI, fasc. 8, 9. Milano, 1898, 8°.

* **Transactions** of the Kansas Academy of Science (1895-96). Vol. XV. Topeka, 1898; 8°.

* **Verhandlungen** der k. k. geologischen Reichsanstalt. Sitzung. N. 3 u. 6, 1898. Wien; 8°.

---

**Cantor** (M.). Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig, 1898; 8° (*dall'A.*).

**Macchiati** (L.). Sui pretesi granuli d'amido incapsulati dei tegumenti seminali della *Vicia narbonensis* L. Modena, 1898; 4° (*Id.*).

**Stossich** (M.). Filarie e Spiroptere. Trieste, 1897; 8° (*Id.*).

— Note parassitologiche. Trieste, 1897; 8° (*Id.*).

---

## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

---

### Dal 22 Maggio al 12 Giugno 1898.

---

** **Allgemeine** Deutsche Biographie. Bd. XLIV, Lfg. 216. Leipzig, 1898; 8°.

**Annali** della R. Università di Torino dal 1884 al 1898. Sommario storico-statistico. Torino, 1898; 4°.

**Annuario** Accademico della R. Università di Siena per l'anno 1897-98; 8°.

* **Berichte** über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (Philolog.-hist. Classe), 1898, I. Leipzig, 1898; 8°.

* **Cosmos**. Ser. II, vol. XII, 1894-96, fasc. VI-VII. Roma, 1898; 8°.

**Elenco** delle Società di Mutuo Soccorso. Roma, 1898; 8° (*dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio*).

* **Memorie** dell'Accademia di Verona. Vol. LXXIII, serie III, fasc. I-II. Verona, 1897; 8°.

** **Monumenta Germaniae historica.** Auctorum antiquissimorum, t. XIII, pars IV. Chronica minora saec. IV, V, VI, VII edidit Theod. Mommsen. Berolini, 1898; 4°.

* **Publications** de l'École des Lettres d'Alger. Bulletin de Correspondance Africaine. Légendes et Contes merveilleux de la Grande Kabylle; 2me partie. Paris, 1898; 8°.

* **Rendiconto** delle Tornate e dei Lavori dell'Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti della Società Reale di Napoli. N. S., Anno XII, Gennaio-Febbraio 1898. Napoli; 8°.

* **Sitzungsberichte** der philosophisch-philologischen und der historischen Classe der Akad. der Wissenschaften zu München. 1898, Heft I; 8°.

---

**De Feis** (L.). Storia di Liberio Papa e dello scisma dei semiariani. Roma, 1894; 4° (*Inviato per il premio Bressa*).

**Nani** (C.). Istromenti sigillati e stile sigillato: contributo alla storia dell'antica legislazione Sabaudo-Piemontese. Torino, 1898; 8° (*dall'A.*).

**Pizzi** (I.). Storia della poesia persiana. Torino, 1894; 2 vol.; 8° (*Inviato per il premio Bressa*).

** **Sanuto** (M.). I Diarii. T. LI, fasc. 218, 219. Venezia, 1898.

**Vaggioli** (F.). Storia della Nuova Zelanda e dei suoi abitatori. Parma, 1891-96, 2 vol.; 8° (*Inviato per il premio Bressa*).

** **Vandini** (R.). Appendice seconda al catalogo dei codici e manoscritti già posseduti dal marchese Giuseppe Campori. Modena, 1895; 8°.

---

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

---

### Dal 29 Maggio al 19 Giugno 1898.

---

* **Abhandlungen** der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathem.-Physikalische Classe. N. F. Bd. I, No. 2. Berlin, 1898; 8°.

* **Abstract** of Proceedings of the R. Society of New South Vales, November 3; December 1, 1897; 8°.

* **Anales** de la Sociedad Científica Argentina. T. XLV, Entrega II-IV. Buenos Aires, 1898; 8°.

* **Annales** de la Société Entomologique de Belgique; t. 41me. Bruxelles, 1897; 8°.

* **Annales** de la Société géologique de Belgique. T. XXII, 3e livr.; XXIII, 3e livr.; XXIV, 2e livr. Liège, 1894-98; 8°.

* **Annales** de la Société royale Malacologique de Belgique. Mémoires, T. XXVIII, XXIX et XXXI. Bruxelles, 1893, 1896, 3 vol.; 8°.

* **Annales** de la Société belge de Microscopie. T. XXII, 1r fasc. Bruxelles, 1897; 8°.

* **Annales** des Mines. 9me série, t. XIII, livr. 4me, 1898. Paris; 8°.

* **Annuario** 1898 del R. Museo Industriale italiano in Torino. Torino, 1898; 8°.

* **Atti** della R. Accademia Peloritana. Anno VII (1889-91); XI (1896-97); 2 vol. 8°. Messina, 1891, 1896.

* **Atti** della Società dei Naturalisti di Modena; serie III, vol. XV, fasc. 1; XVI, fasc. 1. Modena, 1898; 8°.

**Atti** del Collegio degli ingegneri e degli architetti in Palermo. Agosto-dicembre 1897; gennaio-aprile 1898; 8°.

* **Atti** dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Anno LI, sess. III del 13 febbraio 1894. Roma; 4°.

* **Atti** del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; t. LVI, disp. 7a. Venezia, 1897-98; 8°.

* **Berichte** der Naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg I. B., X Bd., 1897-98; 8°.

**Boletín** mensual del Observatorio Meteorológico central de Mexico; Octubre-Diciembre 1897; Enero 1898; Resumenes mensuales de las Observac. meteorológ. correspond. à los años de 1891 y 1892. Mexico, 1897-98; 4°.

**Boletín** mensual demográfico de Montevideo. Año VI, n. 59-64. Montevideo, 1897-98.

**Boletín** del Observatorio Astronómico Nacional de Tacubaya. Tom. II, n. 3. Mexico, 1898; 4°.

* **Bollettino** delle sedute dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania; fasc. L (1897); LI-LII (1898); 8°.

**Bollettino** statistico mensile della Città di Milano. Anno XIII, dicembre 1897 e Notizie riassuntive dell'anno 1897; XIV, gennaio-aprile, 1898; 4°.

**Bollettino** quindicinale della Società degli Agricoltori italiani. Anno III (1898), n. 1-12. Roma; 8°.

* **Bollettino** demografico della Città di Torino. Anno XXVII, n. 1-14, 1898; 4°.

* **Bollettino** mensuale della Società meteorologica italiana. Serie 2a, v. XVII, 1-2; XVIII, 1-4. Torino, 1897-98.

**Bollettino** dell'Associazione " Mathesis " fra gl'Insegnanti di matematica, delle scuole medie. Anno II, n. 4-5. Torino, 1897-98; 8°.

** **Bohrregister** nebst **Bohrkarte** zur geologischen Specialkarte von Preussen und Thüringischen Staaten. LXXIV Lief., Gradatheilung 14, No. 49-51, 55-57. Berlin, 1897; 8° e carte f°.

* **Bulletin** of the Johns Hopkins Hospital, vol. IX, No. 82-86. Baltimore, 1898; 4°.

* **Bulletin** de la Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Tom. X, fasc. I-II; XI, fasc. II-III. Bruxelles, 1897; 8°.

**Bulletin** mensuel de Statistique Municipale de la ville de Buenos-Ayres. XIe année, n. 11 (1897); 1-4 (1898); 4°.

* **Bulletin** of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XXVIII, No. 4; XXXI, No. 7; XXXII, N. 3-5. Cambridge, Mass., 1898; 8°.

**Bulletin** de la Société Philomatique de Paris. 8e série, t. IX, 1896-1897, n. 2; 8°.

* **Bulletin** de la Société Belge de Microscopie. XXIIe an., 1896-97, n. 11. Bruxelles; 8°.

* **Bulletin** de l'Académie Royale des sciences et des lettres de Danemark. 1898, n. 2, 3. Copenhague; 8°.

* **Bulletin** de l'Académie Imp. des Sciences de St-Pétersbourg. Ve sér., T. VI, n. 4, 5; VII, n. 1. 1897; 4°.

* **Bulletin** de la Société impériale des Naturalistes de Moscou. Ann. 1896, n. 4; 1897, n. 1. Moscou, 1897; 8°.

* **Bulletins** du Comité géologique de St-Pétersbourg, 1896; t. XV, n. 6-9; XVI, n. 1-2. St-Pétersbourg, 1897; 8°.

* **Comptes-rendus** de l'Académie des Sciences de Cracovie, décembre, 1897; janvier-mai, 1898; 8°.

* **Field Columbian** Museum. Report Series, vol. I, No. 3. Zoological series. vol. I, No. 8. Chicago, 1897; 8°.

* **Földtani** Közlöny havi Folyóirat kiadja a Magyarhoni Földtani Társulat. Vol. XXVIII, n. 1-4. Budapest, 1898; 8°.

* **Giornale** della R. Accademia di Medicina. A. LXI, n. 4. Torino, 1898; 8°.

**Istituto Geografico Militare.**

Elementi geodetici dei punti contenuti nei fogli 13-14 della Carta d'Italia. Firenze, 1897; 4°.

Triangolazione di 1° ordine. Abruzzi, Molise e Lazio. Osservazioni azimutali. Firenze, 1897; 4°.

* **Jahresbericht** der Kgl. Ung. geologischen Anstalt für 1895. Budapest, 1898; 8°.

* **Johns Hopkins** University Circulars. Vol. XVII, No. 134, 135. Baltimore, 1898; 4°.

* **Johns Hopkins** Hospital: Reports. Vol. VI. Baltimore, 1897; 8°.

* **Journal** of the R. Microscopical Society, 1898, part. 3. London, 1898; 8°.

* **Kansas** University Quarterly. Vol. VII, No. 2, April 1898. Series A: Science and mathematics. Lawrance, Kans.; 8°.

**Magnetische** und Meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1897. 58 Jahrgang. 1898; 4°.

* **Mémoires** de la Société Entomologique de Belgique. VI. Bruxelles, 1897; 8°.

* **Mémoires** de l'Acad. Roy. des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague. 6me sér., sect. des Sciences, t. VIII, n. 6. Copenhague, 1898; 4°.

* **Mémoires** de l'Académie Imp. des Sciences de St-Pétersbourg. Classe physico-mathématique. VIIIe série, V, n. 3-5. St-Pétersbourg, 1897; 4°.

* **Mémoires** du Comité Géologique de Russie. T. XIV, n. 5. St-Pétersbourg, 1896; 4°.

* **Memorie** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze matematiche e naturali. XVIII, fasc. V. Milano, 1898; 4°.

**Memorie** della Società degli Spettroscopisti italiani. Vol. XXVII, disp. 1ª-5ª. Roma, 1898; 4°.

* **Mitteilungen** des Vereins für Erdkunde zu Leipzig, 1897. Leipzig, 1898; 8°.

* **Mittheilungen** aus dem Jahrbuche der kgl. ungar. geologischen Anstalt. Bd. XI; Heft 8. Budapest, 1898; 8°.

* **Mittheilungen** aus der medicinischen Facultät der kaiserlich-japanischen Universität zu Tokio; Bd. III, n. III. 1897; 4°.

* **Monthly Notices** of the Royal Astronomical Society. Vol. LVIII, n. 8. London, 1898; 8°.

** **Morphologische** Arbeiten. Herausg. von Dr G. Schwalbe. 8 Bd., 1 Heft. Jena, 1898; 8°.

* **Proceedings** of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. XXXIII, No. 5-8. Boston, 1897; 8°.

* **Proceedings** of the Cambridge philosophical Society; vol. IX, Part VIII. 1898; 8°.

* **Proceedings** of the Zoological Society of London for the year 1898. Part I. London; 8°.

**Proceedings** of the Royal Institution of Great Britain. Vol. XV, Part II, n. 91. London, 1898; 8°.

* **Proceedings** of the Royal Society. Vol. LXIII. 395-398. London, 1898; 8°.

* **Proceedings** of the Academy of Natural Science of Philadelphia. Part II, 1897. Philadelphia; 8°.

* **Procès Verbaux** des Séances de la Société R. Malacologique de Belgique; 8 juin 1895-4 novembre 1896; vol. XXIV-XXV. Bruxelles; 8°.

* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Vol. XXXI, fasc. X-XII. Milano, 1898; 8°.

* **Rendiconti** del Circolo matematico di Palermo. Tom. XII, fasc. III-IV. Palermo, 1898; 8°.

**Rendiconto** dell'Ufficio d'Igiene della Città di Torino. Anno XXVII, n. 1-5, 1898; 4°.

* **Rivista** mensile del Club alpino italiano. Vol. XVII, n. 1-5. Torino, 1898; 8°.

* **Schriften** der Physikalisch-Oekonomischen Gesellschaft zu Königsberg in Pr., XXXVIII Jahrg., 1897. Königsberg; 4°.

* **Sitzungsberichte** der Kön. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. (6 Januar) I (21 April 1898) XXIII. Berlin, 8°.

* **Sitzungsberichte** der physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen. 29 Heft, 1897. Erlangen, 1898; 8°.

* **Stazioni** sperimentali agrarie italiane. Vol. XXX, fasc. 8-9; XXXI, fasc. 1-2. Modena, 1897-98; 8°.

* **Transactions** of the Manchester Geological Society. Vol. XXV, No. XV, XVI. 1898; 8°.

* **Transactions** of the Zoological Society of London. Vol. XIV, part 6, 1898; 4°.

** **Verhandlungen** der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. XVII, Nr 2-5. 1898; 8°.

* **Verhandlungen** der k. k. geologischen Reichsanstalt. Sitzung. N. 7, 8, 1898. Wien; 8°.

**Yearbook** of the United States. Department of Agricculture. 1897. Washington, 1898.

---

**Allievi** (L.). Cinematica della biella piana. Napoli, 1895; 8° (*inviato pel premio Bressa*).

**Camiolo** (A.). Riepilogo dell'opera per titolo: Il *ritmo vibratorio* principio scientifico nei rapporti dei suoni musicali. Miscemi, 1894; 8° (*Id.*).

**Cossa** (A.). Relazione sui lavori presentati al Concorso a premio per la ricerca di un metodo atto ad accertare le adulterazioni dei perfosfati d'ossa proposto dalla Federazione italiana dei Comizi agrari. Piacenza, 1898; 8° (*dall'A.*).

** **Dippel** (L.). Das Mikroskop und seine Anwendung. Zweite umgearbeitete Auflage, Zweiter Theil, 2ᵉ Abth. Braunschweig, 1898; 8°.

**Gallizia** (P.). Il teorema del minimo lavoro applicato alla ricerca degli effetti della scarica sulle armi da fuoco. Roma, 1898 (*dall'A.*).

**Guelbaum** (D.). The law of hydraulich obstruction in closed Streams. New-York, 1897; 8° (*Id.*).

**Guidi** (C.). Calcolo di stabilità delle scale metalliche aeree Viarengo. Torino, 1898; 8° (*Id.*).

**Martini** (T.). Intorno al calore che si sviluppa nel bagnare le polveri. Nuove ricerche termometriche e calorimetriche. Venezia, 1898; 8° (*Id.*).

**Omboni** (G.). Il gabinetto di geologia della R. Università di Padova. Padova, 1898; 8° (*Id.*).

**Palladino** (P.). Sul compartimento degli zuccheri nella fermentazione alcoolica e specialmente nella vinificazione. Modena, 1891; 8° (*inviato pel premio Bressa*).

— Nota sulla lavatura, filatura, imbianchimento e tintura della lana in Liguria. Genova, 1891; 8° (*Id.*).

— Gomma arabica e gomme affini: loro proprietà, composizione, provenienza, qualità commerciali, ecc. Pavia, 1891; 8° (*Id.*).

— Studio analitico sulle gomme solubili. Genova, 1891; 8° (*Id.*).

— Studio sulla miniera di solfato di magnesio del monte Ramazzo in Liguria e su alcuni minerali detti auriferi in Sanpierdarena, 1891 (*Id.*).

— Sulla funzione dell'acido solforico nella dissociazione elettrolitica dell'acqua e calcoli termici delle reazioni chimiche corrispondenti ecc. Genova, 1892; 8° (*Id.*).

— Contributo allo studio chimico dei fiori di Bassia. Genova, 1892-93; 8° (*Id.*).

— Trattato di merciologia e chimica merciologica. Genova, 1892, 2 vol.; 8° (*Id.*).

— Contributo allo studio chimico e merciologico della *Batata* detta comunemente *Patata americana*. Genova, 1893; 8° (*Id.*).

— L'olio delle castagne del Brasile. Milano, 1893; 4° (*Id.*).

**Pellegrini** (C.). L'infezione malarica, con appendice sulla cirrosi epatica. Catanzaro, 1896; 8° (*inviato pel premio Bressa*).
— Tre casi interessanti di cachessia malarica. Catanzaro, 1897; 8° (*Id.*).
**Rizzardi** (U.). Aracnidi di Vallombrosa; raccolti dal Dott. G. Cecconi. Pavia, 1898; 8° (*dall'A.*).
**Rosenbusch** (H.). Elemente der Gesteinslehre. Stuttgart, 1898; 8° (*dall'A.*).
**Sacco** (F.). Relazioni geologiche sopra progetti di derivazione d'acqua potabile. Torino, 1896-1898; 8° (*Id.*).
— Molluschi dei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria. Parte XIX-XXIV. Torino, 1896-97; 8° (*Id.*).
— Essai sur l'Orogénie de la terre (Abrégé). Torino, 1897; 8° (*Id.*).
— Novità malacologiche. Parma, 1897; 8° (*Id.*).
— I materiali da costruzione delle colline di Torino-Casale-Valenza. Torino, 1898; 8° (*Id.*).
— La geologia e le linee ferroviarie in Piemonte. Torino, 1898; 8° (*Id.*).
— Schema del corso di geologia applicata dettato durante l'anno scolastive 1897-98 nella R. Scuola d'applicazione degli Ingegneri in Torino. Torino, 1898; 8° (*Id.*).
— Il pozzo trivellato di Alessandria. Torino; 8° (*Id.*).
**Sars** (G. O.). An account of the Crustacea of Norway etc. Vol. II, Isopoda, Part IX, X. Bergen, 1898; 8° (*Id.*).
**Schiaparelli** (G.). Origine del sistema planetario eliocentrico presso i Greci. Milano, 1898; 4° (*Id.*).
**Sellier** (A.). Diagramma celerimetrico per riduzione all'orizzonte ed al zenit di punti rilevati con rapporti diastimometrici e per calcoli di seni e coseni. 1 tav. in f° (*inviato pel premio Bressa*).
**Sperino** (G.). Anatomia del Cimpanzè in rapporto con quella degli altri antropoidi e dell'uomo. Torino, 1897-98; (*dall'A.*).
**Valentini** (C.). Della sistemazione dei fiumi. Milano, 1893; 8° (*inviato pel premio Bressa*).
— Sulla sistemazione dei torrenti. Roma, 1893; 8° (*Id.*).
— Del modo di determinare il profilo di compensazione e sua importanza nelle sistemazioni idrauliche. Milano, 1895; 8° (*Id.*).
— Sulle acque del sottosuolo a Nord-Est di Milano. Milano, 1895; 8° (*Id.*).
— Corsi d'acqua della Valtellina. Sondrio, 1896; 8° (*Id.*).
— La sistemazione idraulica della Valtellina. Milano, 1896; 8° (*Id.*).
— Forma delle briglie. Milano, 1892; 8° (*Id.*).
**Volante** (A.). La luce nel terremoto. Torino, 1895 (*Id.*).

---

# Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

## Dal 12 al 26 Giugno 1898.

* **Abhandlungen** der k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1897; 4°.
* **Acta Borussica.** Die Behördenorganisation und die allgemeine Staatsverwaltung. Zweiter Bd. Berlin, 1898; 8° (*dalla R. Accad. d. Scienze*).
* **Analecta** Bollandiana. T. XVI, fasc. IV. Bruxelles, 1897; 8°.
* **Annales** de la Société d'Archéologie de Bruxelles. T. XII, liv. I. Bruxelles, 1898; 8°.
* **Annuaire** de la Société d'Archéologie de Bruxelles, 1898, t. IX$^{e}$. Bruxelles, 1898; 8°.
* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Classe di Scienze morali, storiche e filolog.; serie V, vol. VI. Notizie degli Scavi: marzo 1898; 4°.
* **Atti** della Reale Accademia di Scienze morali e politiche della Società Reale di Napoli; vol. 29°. Napoli, 1898; 8°.

** **Bibliografia** italiana. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Vol. 32. N. 1-11. Milano, 1898; 8°.

** **Bibliotheca** Philologica Classica. Vol. XXV, 1898. Trimestre primum. Berolini; 8°.

**Bollettino** della Associazione italiana per l'incremento della scienza degli Attuari. N. 1, 1898. Milano; 8°.

* **Bollettino** di Legislazione e Statistica doganale e commerciale. Anno XIV, Ottobre-Dicembre 1897. Roma; 8° (*dal Ministero delle Finanze*).
* **Bulletin** of the New York Public Library Astor Lenox and Tilden Foundations. Vol. II, No 1-5, 1898; 8°.
* **Bulletin** de l'Université de Toulouse; fasc. 1-4, juillet 1897-Février 1898. Toulouse; 8°.
* **Comptes-rendus** de l'Athénée Louisianais. 6$^{me}$ sér. Tom. 2$^{me}$, livr. 2$^{ème}$. Nouvelle-Orléans, 1898; 8°.
* **Comptes-rendus** des séances de la Société de Géographie; n. 4, 1898. Paris; 8°.
* **Consiglio** Comunale di Torino; sedute 3 gennaio-23 maggio 1898; N. I-XXIX; 4°.
* **Giornale** della Società di letture e conversazioni scientifiche di Genova. Anno XX, fasc. II, 1898; 8°.
* **Mémoires** de l'Académie des Sciences et des Lettres de Danemark. 6$^{e}$ sér. Section des lettres; t. IV, n. 4. Copenhague, 1898; 4°.
* **Miscellanea** di Storia italiana, pubblicata per cura della R. Deputazione sovra gli studi di storia patria per le antiche provincie e la Lombardia, serie 3$^{a}$, t. IV. Torino, 1898; 8°.

* **Notulen** van de Algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XXXV, Af. 1, 2. Batavia, 1897; 8°.

* **Rendiconto** delle Tornate e dei Lavori dell'Accademia di Scienze morali e politiche della Società R. di Napoli. Anno 36°. Napoli, 1897; 8°.

**Rosario** (Il) e la Nuova Pompei. Anno XIV, quad. X-XII; XV, quad. I-VI. Valle di Pompei, 1897-98; 8°.

**Sanskrit Critical Journal** of the Oriental Nobility Institute; Vol. XXVI, No. 12, 1897; XXVII, No. 1-5, 1898; Woking, England, 8°.

**Statistica** del commercio speciale di importazione e di esportazione, dal 1° gennaio al 31 maggio 1898. Roma; 5 fasc. 8° (*dal Ministero delle Finanze*).

* **Studi** e Documenti di storia e diritto. Anno XIX. fasc. 1°, 2°. Roma, 1898; 4° (*dall'Accademia di Conferenze storico-giuridiche*).

* **Tijdschrift** voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen etc.; Deel XL, Aflev. 1, 2. Batavia, 1897; 8°.

**Transactions** and **Proceedings** of the American Philological Association, 1897. Vol. XXVIII. Boston, Mass.; 8°.

* **Université** catholique de Louvain:

Annuaire: 1898.

Thèses de la Faculté de Théologie: 702-718.

Programme des cours de l'année académique 1897-98.

*Legrand* (G.). L'impôt sur le capital et le revenu en Prusse. Namur, 1894; 8°.

*Nerinx* (A.). Du régime légal de l'enseignement primaire en Angleterre. Gand, 1895; 8°.

*Moyersoen* (R.). Du régime légal de l'enseignement primaire en Hollande. Gand, 1895; 8°.

*Mélot* (A.). Des impôts sur les valeurs mobilières en France. Louvain, 1895; 8°.

*Genart* (C.). Les syndicats industriels. Louvain, 1896.

*Kerchove d'Exaerde* (H. de). De l'enseignement obligatoire en Allemagne. Gand, 1897.

*Kerby* (W.-J.). Le socialisme aux États-Unis. Bruxelles, 1897; 8°.

*Verhaegen* (P.). Socialistes anglais. Gand, 1897; 8°.

*Poels* (H. A.). Examen critique de l'histoire du Sanctuaire de l'Arche. Tome 1r. Louvain, Leide, 1897; 8°.

**Valsesia** (La) all'Esposizione Generale italiana. Torino, 1898. Catalogo ragionato e descrittivo degli oggetti presentati da C. A. Gianoli; 16° (*dall'A.*).

* **Verhandelingen** van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XLIX, 3e Stuck. Batavia, 1897; 8°.

**Ascoli** (A.). Onoranze centenarie a Giacomo Leopardi. Discorso. Pisa, 1898; 8° (*dall'A.*).

** **Borbonese** (E.). Guida di Torino, pubblicata per cura e a benefizio della Federazione degli Asili infantili suburbani. Torino, 1898; 16°.

**Botti** (G.). Plan de la ville d'Alexandrie à l'époque Ptolémaïque. Alexandrie, 1898; 8° (*dall'A.*).

**Chijs** (van der J. A.). Nederlandisch-Indisch Plakaatboeck 1602-1811. Deel XVI, 1810-1811. Batavia, 1897; 8° (*dalla Società di Arti e di Scienze di Batavia*).

* **Manno** (A.). Bibliografia storica degli Stati della monarchia di Savoia, vol. VI. Torino, 1898; 8° (*Pubblicata per cura della R. Deputazione di Storia Patria*).

**Marre** (A.). Instructions et bons avis relatifs à Madagascar d'après Étienne de Hacourt; Tananarive, 1897; 8° (*dall'A.*).

**Modona** (L.). Bibliografia del Padre Ireneo Affò. Parma, 1898; 8° (*Id.*).

**Poggi** (V.). Di una tavola dipinta nel secolo XI. Savona, 1898; 8° (*dall'A.*).

** **Sanuto** (M.). I Diarii. T. LI, fasc. 220, 221. Venezia, 1898.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

# CLASSI UNITE

## Adunanza del 21 Novembre 1897.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

Della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Cossa, Vice Presidente dell'Accademia, Berruti, D'Ovidio, Bizzozero, Naccari, Mosso, Giacomini, Camerano, Segre, Peano, Volterra, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi e Fileti.

Della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Peyron, Claretta, Manno, Bollati di Saint Pierre, Boselli, Brusa e Nani Segretario.

Il Socio Segretario Nani dà lettura dell' atto verbale dell'adunanza del 20 giugno 1897, che viene approvato.

Il Presidente comunica una lettera del Socio corrispondente Gustavo Mittag-Leffler, con cui trasmette i ringraziamenti di Sua Maestà il Re di Svezia e Norvegia per gli omaggi per suo mezzo trasmessi dall'Accademia in occasione del 25° anniversario della sua salita al trono. Presenta pure un volume offerto in dono dall'Università di Upsala stato pubblicato nella ricorrenza di tale festa.

Il Presidente annunzia la morte del Socio Prof. Senatore Tommaso Vallauri colle seguenti parole:

Egregi Colleghi,

" Adempio al triste ufficio di annunziarvi la perdita gravissima fatta dalla nostra Accademia per la morte del suo Socio più anziano per età, il Senatore Tommaso Vallauri, nato il 23 gennaio 1805 in Chiusa-Pesio presso Cuneo e deceduto in questa città il 2 settembre u. s.

" Ben si sapeva che il Vallauri, per causa di una disgraziata caduta capitatagli in Roma il 2 marzo 1896, era pressochè ridotto alla impossibilità di uscire di casa; ma si sapeva eziandio, per notizie più volte richieste dall'Accademia e comunicate dalla famiglia, che la sua fibra robusta aveva pressochè superato le conseguenze di una caduta, che per uomini della sua età sogliono spesso essere fatali. Egli infatti, malgrado i suoi 93 anni, aveva perfino ripreso le sue fatiche letterarie, come lo dimostra l'iscrizione da lui dettata, sul finire di agosto, per la chiesa di San Tommaso in questa città (1).

" Tutto quindi lasciava sperare che egli potesse ancora ristabilirsi e che potesse fors'anche realizzarsi il suo desiderio di dettare ancora una lezione di eloquenza latina all'Ateneo di Torino, allorchè avesse raggiunto il suo centesimo anno.

---

(1) L'iscrizione a cui si accenna è la seguente:

AEDEM · CVRIALEM · SANCTI · THOMAE · APOSTOLI
VETVSTATE · DILABENTEM
SODALES · FRANCISCALES
A · FVNDAMENTIS · RESTITVERVNT
ANNO · MDLXXXV.
FRONTE · ET · FORNICE · EXORNARVNT
ANNO · MDCCIII.
AMOTO · TANDEM · EVERSIONIS · PERICVLO
QVOD · VICI · AMPLIORES · ET · CIRCVMSTANTES · AFFERRENT
CAROLVS · CEPPIVS · COMES · ARCHITECTVS
NOBILIOREM · HANC · FORMAM · DELEGIT
ANNO · MDCCCXCVII.
CVRANTE · P · LVCA · ANTONIO · TVRBIGLIO · FRANCISCALI

THOMAS VALLAVRIVS *Scripsit.*

“ Pur troppo il pronostico non si è avverato, e il 2 settembre egli mancò di un colpo apopletico. La notizia fu immediatamente comunicata all'Accademia dall'egregia gentildonna vedova di lui, Elisabetta Gibellini, la quale poco dopo informò anche la Presidenza delle disposizioni testamentarie da lui dettate a favore dell'Accademia.

“ Non può qui essere il caso di commemorare la vita lunga ed operosa del Senatore Vallauri: dirò soltanto che la sua vita, pressochè centenaria, fu tutta spesa nello studio e nell'insegnamento e dedicata sopratutto al culto della classica antichità.

“ Egli ebbe un carattere, che talvolta potè apparire indomito, e che egli riconobbe talvolta essere alquanto proclive all'ostinazione (1), ma che intanto si mantenne sempre fiero ed indipendente e non piegò mai alle opportunità dei tempi e dei partiti.

“ La sua intelligenza fu lucida, chiara, limpida, come lo stile in cui dettò le sue numerose opere latine ed italiane; il suo conversare fu piacevole non solo, ma anche festevole ed arguto. Egli ebbe poi un senso ed un intuito della latinità classica veramente meraviglioso, che deve in parte essere attribuito al lungo studio ed amore da lui posto negli scrittori latini, in parte anche alla natura ed al temperamento del suo ingegno.

“ Tutti infine debbono riconoscere che il Vallauri fu un uomo veramente antico per la frugalità, la sobrietà, la parsimonia della vita, per l'onestà del costume, per la tenacità nei propositi, per la perseveranza con cui si mantenne fedele all'ideale, che egli si era proposto, dai giorni della sua tenera infanzia fino all'ultimo giorno della sua vigorosa vecchiaia.

“ Queste, a parer mio, sono le cause che spiegano la celebrità, a cui pervenne il nome del Vallauri in Italia e fuori. Non ignoro che contro di lui si scagliarono talvolta i critici e gli eruditi, nè voglio farmi giudice delle lotte e polemiche, che egli ebbe con essi. Solo mi piace osservare che il Vallauri non è uomo, che debba essere apprezzato alla stregua comune degli altri critici ed eruditi, poichè egli non pretese tanto ad essere un critico, un filologo ed un erudito, quanto piuttosto a far rivivere

---

(1) *Vita di Tommaso Vallauri scritta da esso*, 2ª ediz., 1886, p. 19.

la latinità classica nelle sue genuine bellezze. Egli fu un artista nel culto della latinità classica e, come appare dalla sua vita, lo scopo di tutti i suoi studii fu quello di rendersi per modo famigliari i classici latini, " da riuscire a scrivere qualunque cosa in latino con quella stessa proprietà ed eleganza con cui essi scrissero „ (1). Egli s'ispirò sopratutto all'esempio di un altro grande latinista, che trascorse i suoi primi anni nel castello ora diroccato di Chiusa-Pesio (2), che fu Anastasio Germonio, e cercò di continuare le tradizioni del suo grande maestro, Carlo Boucheron. A quel modo che altri con occhio moderno cerca di leggere e di interpretare le storie antiche e di trovare in esse le traccie ed i germi dei problemi attuali, così egli tentò di far rientrare i concetti e perfino le invenzioni moderne nelle forme della classica latinità. Sarà stato uno sforzo il suo, ma certo fu uno sforzo che ebbe del nobile e del grande, e che ebbe la sua importanza anche per il tempo in cui venne ad essere compiuto.

" Senza voler apprezzare le sue opinioni politiche, questo è certo che l'insegnamento da lui iniziato fin dall'epoca, in cui stavasi preparando il risorgimento del nostro paese, fu altamente patriottico ed utile alla causa nazionale, perchè mantenne vivo il senso della romanità classica, e lo ispirò ad una pleiade di insegnanti e di professori, che poi lo diffusero fra la gioventù studiosa dei ginnasii e dei licei delle varie regioni italiane. Questo è certo, Colleghi, che l'uomo che ha speso tutta la sua vita nel tener viva la tradizione di Roma classica e nel diffondere la conoscenza degli scrittori latini; che scrisse con lungo studio e fatica la storia della poesia, delle società letterarie e delle Università degli studii in Piemonte; che riuscì a narrare nelle forme classiche della latinità la storia e le gesta dei principi di Savoia, allorchè essi si avviavano a diventare i Re di Italia; che fu l' educatore della generazione che ha preparato e di quella che ha compiuto l'unità nazionale, non può e non potrà mai essere considerato come un uomo di reazione.

" E ciò egli confermò colle sue ultime disposizioni testa-

---

(1) *Vita di Tommaso Vallauri scritta da esso.* Ediz. cit., pag. 13.

(2) V. fra le *Novelle* di Tommaso Vallauri quella intitolata: *Il Castello della Chiusa.* 5ª ediz., Torino, 1873, pag. 207-239.

mentarie, scritte tutte di suo pugno, ad insaputa anche degli intimi suoi, in cui Egli, che pur si era lagnato qualche volta di essere stato troppo lungamente discusso prima di essere accolto nel seno dell'Accademia, il che accadde solo nel gennaio del 1867, chiamò tuttavia ad erede del patrimonio lentamente e onestamente raggranellato nella sua vita lunga e frugale l'Accademia delle Scienze coll'intento di istituire un premio quadriennale veramente cospicuo a favore della migliore opera in alcune delle scienze fisiche o di critica della letteratura latina „.

Dopo queste parole di commemorazione e di rimpianto il Socio Segretario dà lettura del testamento olografo del Vallauri in data 29 dicembre 1894, con cui Egli istituisce erede universale del suo cospicuo patrimonio l'Accademia, nell'intento di stabilire, appena cessato l'usufrutto spettante alla vedova, cogli interessi del patrimonio stesso, un premio quadriennale per lo scienziato italiano o straniero che abbia stampato l'opera più celebre e ragguardevole su alcuna delle scienze fisiche, o al letterato pure italiano o straniero che abbia pubblicato la migliore opera critica sulla letteratura latina, ed il Presidente invita l'Accademia a deliberare circa l'accettazione dell'eredità e circa le onoranze che debbono essere rese a chi ebbe a dare una prova così insigne di liberalità a vantaggio della scienza e di fiducia nell'Accademia chiamata ad eseguire le sue disposizioni testamentarie.

L'Accademia unanime delibera:

1° di accettare tale eredità, nelle forme stabilite dalla legge, incaricando la Presidenza di fare le pratiche occorrenti per l'autorizzazione sovrana;

2° di erigere in segno di onoranza, nel suo palazzo, un busto marmoreo con un'epigrafe, che ricordi l'atto munifico dell'illustre e benemerito donatore;

3° di comunicare, per mezzo della Presidenza, alla Signora Vedova del compianto Socio, questa deliberazione, non che i sentimenti di condoglianza e riconoscenza dell'intera Accademia.

# CLASSE

DI

## SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

### Adunanza del 21 Novembre 1897.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

---

Sono presenti i Soci: Cossa, Vice-presidente dell'Accademia, D'Ovidio, Direttore della Classe, Berruti, Bizzozero, Giacomini, Camerano, Segre, Peano, Volterra, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti e Naccari Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della seduta del 13 Giugno 1897.

Il Presidente partecipa la morte avvenuta il giorno 11 Giugno 1897 del Socio corrispondente Remigio Fresenius. Il Socio Cossa ricorda i meriti dell'estinto con le seguenti parole:

" Pochi giorni dopo l'ultima adunanza tenuta dalla nostra Classe nel passato anno accademico, pervenne alla Presidenza la dolorosa notizia della morte del nostro Socio corrispondente Remigio Fresenius, avvenuta repentinamente a Wiesbaden nel giorno 11 dello scorso mese di Giugno.

" Remigio Fresenius, nato a Francoforte sul Meno il 28 dicembre 1818, ottenne il diploma di farmacista nell'Università di Bonn (1840). Fu laureato in chimica nel 1842 a Giessen, dove fu assistente di Liebig per tre anni. Fondò nel 1847 un istituto privato di chimica a Wiesbaden, specialmente indirizzato agli studi di chimica analitica, che andò sempre crescendo d'importanza e che egli diresse fino all'epoca della sua morte.

“ Il nome del FRESENIUS rimarrà onorato nella storia della chimica per la benemerenza acquistata coll'avere ideato e diffuso quel metodo classico di analisi chimica elementare, che anche oggidì è seguìto in tutte le scuole di chimica.

“ Il trattato di analisi qualitativa pubblicato per la prima volta nel 1841 quando FRESENIUS studiava praticamente la chimica nel laboratorio del farmacista Marquart a Bonn, ebbe 16 edizioni, e fu tradotto in presso che tutte le lingue, compresa la chinese. L'edizione terza del 1843 fu tradotta in italiano dal compianto nostro collega Ascanio Sobrero, che insieme a Will ed Hofmann fu compagno al FRESENIUS nel laboratorio di Giessen.

“ Il trattato di analisi chimica quantitativa pubblicato per la prima volta nel 1846 ebbe in seguito sei edizioni.

“ Nel 1862 FRESENIUS fondò e continuò a dirigere fino alla sua morte la “ Zeitschrift für die analytische Chemie „, arricchendo così la letteratura chimica della prima opera periodica specialmente dedicata all' analisi. — I lavori originali del FRESENIUS versano tutti su argomenti di chimica analitica, e tra questi meritano di essere specialmente ricordati quelli che si riferiscono all'applicazione del cianuro di potassio all'analisi chimica, alle ricerche dell'arsenico e del fluoro „.

Il Presidente partecipa poi la morte del Socio corrispondente Rodolfo HEIDENHAIN, avvenuta il 13 ottobre, e comunica una lettera della Direzione dell'Osservatorio di Napoli, che partecipa la morte del secondo astronomo Arminio NOBILE.

A tutte queste partecipazioni di morte la Presidenza rispose inviando lettera di condoglianza.

Il Segretario presenta le pubblicazioni inviate dai Soci nazionali non residenti SCHIAPARELLI e FERGOLA e dai Soci corrispondenti VILLARI, WALDEY ed HELMERT. Presenta inoltre la raccolta di discorsi pronunciati nell'occasione dei funerali del Socio corrispondente Augusto DAUBRÉE e un Atlante meteorologico inviato dal Governo delle Indie Neerlandesi.

Vengono poi presentate ed accolte per l'inserzione negli *Atti* le seguenti note:

1° " *Generalità sulle equazioni differenziali ordinarie* „; nota del Socio Peano,

2° " *Su un problema relativo alle intersezioni di curve e superficie* „; nota del Socio Segre,

3° " *Quand'è che due curve piane dello stesso ordine hanno le stesse prime polari* „; nota del Socio corrispondente Bertini, presentata dal Socio Segre,

4° " *Sul calcolo delle travature reticolari non piane* „; nota dell'Ing. Elia Ovazza presentata dal Socio Guidi,

5° " *Forma più conveniente da darsi a' sostegni del cannocchiale nei teodoliti e nei livelli* „; nota dell'Ing. Vittorio Baggi, presentata dal Socio Jadanza,

6° " *Sulle emanazioni vulcaniche dell'età presente nella campagna romana* „; nota del Dott. G. B. Rizzo, presentata dal Socio Naccari.

Il Socio D'Ovidio presenta una Memoria del Prof. Mario Pieri, intitolata: " *Principii di geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo* „. Sarà esaminata da una Commissione composta dei Soci D'Ovidio, Segre e Peano.

# LETTURE

## *Generalità sulle equazioni differenziali ordinarie;*

Nota del Socio GIUSEPPE PEANO.

Abbiasi un sistema di equazioni differenziali ordinarie, ridotto a forma normale

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots x_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots x_n) \end{array}\right\} (1)$$

ove tutte le variabili sono essenzialmente reali.

Una dimostrazione dell'esistenza dell'integrale del sistema proposto è dovuta a CAUCHY; essa si riduce ad integrare per approssimazione, con una poligonale, le equazioni date, e poi passare al limite. Ma ciò che su questo soggetto ha pubblicato il MOIGNO, *Leçons de Calcul différentiel et intégral*, a. 1844, p. 385 e segg., è solo un abbozzo di dimostrazione; le condizioni restrittive non sono punto analizzate; il passaggio al limite è incompletamente fatto.

Il LIPSCHITZ (“ Bulletin de Darboux „, t. X, p. 149, a. 1876; “ Annali di Matematica „, t. II, p. 288) diede la dimostrazione dell'esistenza dell'integrale, quando, oltre alla continuità dei secondi membri delle (1), si supponga verificata una condizione sui rapporti incrementali di questi membri, condizione che suolsi indicare col nome dell'A., e di cui discorreremo in seguito.

In una Nota “ *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine* „, pubblicata negli “ Atti „ di quest'Accademia, a. 1886, limitandomi al caso di $n = 1$, cioè all'equazione

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

ne dimostrai l'integrabilità, supposto puramente continuo il secondo membro. L'integrale si presentava come limite inferiore, o superiore, delle funzioni soddisfacenti ad una delle diseguaglianze differenziali

$$\frac{dx}{dt} > f(t, x) \qquad \frac{dx}{dt} < f(t, x).$$

In un lavoro successivo " *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires* ", pubblicato nei " Mathematische Annalen ", t. 37, a. 1890, dimostrai l'esistenza dell'integrale del sistema generale (1), supposta puramente la continuità dei secondi membri. Dedussi come casi particolari i risultati del Lipschitz, e quelli da me ottenuti nella Nota precedente. Tutte le proposizioni sono ivi espresse coi simboli della Logica matematica, e tutte le dimostrazioni sono fatte colle regole di questa scienza. La mole di questo scritto è dovuta in parte alla lunga serie di teoremi sui limiti di gruppi di punti variabili, su cui basa la dimostrazione. Essa fu, nelle parti principali, tradotta in tedesco dal sig. Mie nei " Mathematische Annalen ", t. 43.

Il prof. C. Arzelà ottenne lo stesso risultato, come conseguenza dei suoi teoremi " *Sulle funzioni di linee* " nella Memoria " *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali ordinarie* " pubblicata dalla R. Acc. delle Scienze di Bologna nel 1895; e per nuova via vi arrivò pure in un' altra Memoria pubblicata ivi nel 1896.

Mi sono arrestato alquanto su questi lavori, i quali sono d'un reale vantaggio alla scienza, poichè dall' enunciato d'un teorema fondamentale fanno sparire le condizioni restrittive inutili e complicate, lasciando solo quelle che sono evidenti.

Il sig. Picard, nel 1891 (" Bulletin de la Société mathém. de France ", vol. XIX, e " Nouvelles Annales de Mathém. ", t. X), per dimostrare l'esistenza dell'integrale, adottò un procedimento, che chiamò delle *approssimazioni successive.* Ma per questa via l'A. riuscì solo a provare l'esistenza dell' integrale nelle precise ipotesi del Lipschitz. In una breve comunicazione da me fatta ai " Nouvelles Annales ", t. XI, p. 79, a. 1892, feci notare come già prima si era arrivati a risultati più com-

pleti di quello trovato dal sig. Picard; ed esposi, in forma breve, e usando le stesse sue notazioni, come, nelle ipotesi del Lipschitz, si dimostri anche l'unicità dell'integrale, di cui son dati gli elementi iniziali; unicità che il Picard dimostrò poi nel 1893, nel suo " *Traité d'Analyse* ", t. 2, p. 299, facendo l'ipotesi inutile della continuità delle derivate.

Limitandoci per un momento alle equazioni differenziali lineari, la questione fu già da tempo completamente risolta, poichè nella Nota " *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari* ", presentata a questa Accademia il 20 febbr. 1887, e riprodotta nei " Mathematische Annalen ", a. 1888, io diedi lo sviluppo dell'integrale in serie sempre convergente. Il teorema dimostrato in questa Nota è il seguente:

" Siano le equazioni differenziali lineari

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= r_{11}\,x_1 + \ldots + r_{1n}\,x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= r_{n1}\,x_1 + \ldots + r_{nn}\,x_n, \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

ove le $r_{ij}$ sono funzioni reali e continue della variabile $t$, in un determinato intervallo $p\urcorner q$.

Si sostituiscano nei secondi membri di queste equazioni alle $x$, delle costanti arbitrarie $a_1\ a_2 \ldots a_n$, e moltiplicati per $dt$, si integrino fra $t_0$ e $t$. Si otterranno $n$ funzioni di $t$: $a_1'\ a_2' \ldots a_n'$. Nei secondi membri delle equazioni proposte alle $x$ si sostituiscano le $a'$, e si integri fra $t_0$ e $t$; si otterranno le nuove funzioni $a_1''\ a_2'' \ldots a_n''$. Da queste, collo stesso procedimento, si dedurranno le $a_1''' \ldots a_n'''$, e così via. Le $n$ serie

$$x_1 = a_1 + a_1' + a_1'' + \ldots,\ \ldots,\ x_n = a_n + a_n' + a_n'' + \ldots \quad (\beta)$$

sono convergenti per ogni valore di $t$; le loro somme sono gli integrali delle equazioni proposte, che per $t = t_0$, assumono i valori iniziali $a_1 \ldots a_n$ ".

Il metodo con cui qui si formarono queste serie è quello

stesso che il sig. Picard nella Nota citata del 1891 chiamò metodo delle approssimazioni successive, e che io preferirei chiamare delle integrazioni successive. Ma che questo metodo conduca al nostro caso a serie (β) sempre convergenti, fu dai sigg. Lindelöf e Picard ritrovato solo nel 1894; vedasi la Memoria pubblicata nel " Bulletin de la Société Mathém. ", p. 52, avente per titolo " *Sur la méthode des approximations successives, et les équations différentielles ordinaires* ".

I teoremi ora enunciati sulle equazioni differenziali lineari o non, furono da me trovati coll'uso dei numeri complessi d'ordine qualunque, e delle loro sostituzioni; il che ne semplifica anche l'esposizione.

La teoria dei $q_n$, o numeri complessi d'ordine $n$ si può ritenere sufficientemente nota. Essa è contenuta ad es. nel *Formulaire de Mathématiques*, t. I, parte V, § 4 (Torino 1895).

Le sostituzioni dei numeri complessi sono una estensione delle sostituzioni finite studiate in Algebra; e sono meno note. Ne esposi la teoria nell'ultimo capitolo del mio " *Calcolo Geometrico* " (Torino 1888), e varie proprietà nei lavori citati sulle equazioni differenziali. Qui mi limiterò a richiamare le definizioni principali.

Dicesi sostituzione (o trasformazione lineare) dei $q_n$, e indicheremo con $S_n$, ogni operazione da eseguirsi sui $q_n$, il cui risultato è pure un $q_n$, ed avente la proprietà distributiva. Questa proprietà distributiva è espressa dalle proporzioni

$$r \in S_n \,.\, x,\ y \in q_n \,.\, \supset .\, r(x+y) = rx + ry.$$
$$r \in S_n \,.\, x \in q_n\, k \in q \,.\, \supset .\, r(kx) = k(rx),$$

delle quali la seconda si deduce dalla prima per $k$ razionale; ma si deve fare qualche altra ipotesi, p. e. la continuità, per dedurla per $k$ irrazionale; onde è più semplice darla come definizione. La definizione simbolica di $S_n$ è

$$1. \quad S_n = (q_n \mathrm{f}\, q_n) \cap \overline{r\epsilon}[x, y \epsilon q_n \,.\, \supset_{x,y} .\, r(x+y) = rx + ry :$$
$$x \in q_n \,.\, k \in q \,.\, \supset_{x,k} .\, r(kx) = k(rx)]. \qquad \text{Df.}$$

Una $S_n$ è data dando le $n^2$ coordinate degli $n$ elementi cor-

rispondenti agli $n$ elementi fondamentali; cioè è rappresentata dalla matrice d'un determinante d'ordine $n$.

Si definisce la somma e il prodotto di due sostituzioni:

2. $r, s \in S_n \,.\, x \in q_n \,.\, \supset \,.\, (r + s)x = rx + sx$ Df.

3. „ „ $.\, \supset \,.\, (rs)x = r(sx).$ Df.

Si dimostra che la somma di due $S_n$ è pure una $S_n$, e così pure pel prodotto; e continuano a sussistere le proprietà commutativa e associativa della somma, le proprietà associativa e distributiva del prodotto; ma questo non ha la proprietà commutativa, potendo essere $rs$ diverso da $sr$.

Nelle nostre questioni, e in tutte quelle in cui si passa al limite, è conveniente introdurre la definizione del modulo d'una sostituzione $r$. Esso è il massimo dei valori del rapporto

$$(\text{mod}\, rn) / (\text{mod}\, x), \text{ ove } x \text{ è un } q_n \text{ qualunque.}$$

In simboli:

4. $r \in S_n \,.\, \supset \,.\, \text{mod}\, r = \max \}[(\text{mod}\, rx)/(\text{mod}\, x]\, \bar{x}\, q_n\{$ Df.

e si dimostra l'esistenza di questo massimo, e le proprietà:

5. $r, s \in S_n \,.\, \supset \,.\, \text{mod}\,(r + s) \leq \text{mod}\, r + \text{mod}\, s$

6. „ $.\, \supset \,.\, \text{mod}\,(rs) \leq \text{mod}\, r \times \text{mod}\, s.$

I $q_n$ sono anche detti punti nello spazio ad $n$ dimensioni, e le $S_n$, delle quali in Geometria si considera il solo prodotto, ne sono le proiettività. È noto che ogni $S_n$ ha $n$ invarianti, dei gradi 1, 2, ... $n$ negli elementi suoi. Ci basta, per queste ricerche, ricordare quello di grado massimo, che è detto il suo determinante, poichè è il determinante della matrice che rappresenta la sostituzione, e che indicando con $[x_1 \,.\, x_2 \ldots x_n]$ il prodotto progressivo degli $n$ complessi d'ordine $n$, $x_1\, x_2 \ldots x_n$, secondo Grassmann, e con $i_1, \ldots, i_n$ gli elementi di riferimento, viene espresso da:

7. $r \in S_n \,.\, \supset \,.\, \text{determ}\, r = [ri_1 \,.\, ri_2 \ldots\ldots ri_n] / [i_1 \,.\, i_2 \ldots\ldots i_n].$

Gli altri invarianti sono i coefficienti delle successive potenze del numero reale $k$ nello sviluppo di determ $(r+k)^n$. È interessante l'ultimo, di 1° grado, che indicheremo con inv $r$, e che è la somma degli elementi che stanno nella sua diagonale principale:

8. $r \epsilon S_n . \supset . \text{inv} r = \{[r i_1 . i_2 \ldots . i_n] + \ldots + [i_1 . i_2 \ldots . r i_n]\} / [i_1 . i_2 \ldots . i_n]$.

Ciò premesso, dicasi $x$ il complesso $(x_1, x_2 \ldots x_n)$; e $r$ la sostituzione i cui elementi sono i coefficienti $r_{ij}$. Allora le equazioni date sono espresse da

$$\frac{dx}{dt} = rx, \qquad (\alpha')$$

e l'integrale da

$$x = (1 + \int r dt + \int r dt \int r dt + \int r dt \int r dt \int r dt + \ldots) a, \quad (\beta')$$

ove gli integrali sono presi fra $t_0$ e $t$, ed $a$ è il valore iniziale del complesso $x$. Nella mia Nota sta pure dimostrato che se si pone $m = \text{mod}\, r\, (t - t_0)$, i termini della serie entro parentesi sono minori dei corrispondenti termini della serie esponenziale

$$1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \ldots,$$

onde si deduce la convergenza assoluta della serie $(\beta')$, e la sua convergenza equabile sia variando $t$ in un intervallo finito, sia variando la sostituzione $r$ in un campo, in cui il limite superiore dei valori del suo modulo sia finito.

Pongasi

$$E(r, t_0, t) = 1 + \int r dt + \int r dt \int r dt + \ldots$$

allora l'integrale $x$ della $(\alpha')$, che per $t = t_0$ ha il valore $a$, sarà dato da

$$x = E(r, t_0, t)\, a.$$

$E(r, t_0, t)$ è una nuova sostituzione, le cui principali proprietà sono enunciate nella mia Nota del 1888 (" Math. Ann. ", t. 32, p. 456). Qui basti ricordare che se $n = 1$, e più in generale se i varii valori di $r$ sono commutabili fra loro, $E(r, t_0, t)$ vale $e^{\int r dt}$.

Si ha poi sempre

$$\text{Determ}\, E(r, t_0, t) = e^{\int \text{inv} r dt}.$$

Ritornando ora alle equazioni differenziali in generale, mi propongo di far vedere come, seguendo la via indicata, si possano studiare facilmente altre proprietà degli integrali, le quali furono oggetto di recenti ricerche.

Le equazioni (1) si possono ridurre all'equazione unica

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1'}$$

ove $x$ è un complesso d'ordine $n$, ed $f$ una funzione complessa della variabile reale $t$ e del complesso $x$.

La condizione introdotta dal Lipschitz, di cui già si è parlato, è che esistano $n^2$ quantità positive $c_{ij}$, in modo che per ogni valore di $t$, di $x$ e di $x'$ nel campo considerato, si abbia sempre

$$\operatorname{mod}[f_i(t, x_1 \dots x_n) - f_i(t_1, x_1' \dots x_n')] \leq$$
$$c_{i1} \operatorname{mod}(x_1' - x_1) + c_{i2} \operatorname{mod}(x_2' - x_2) + \dots + c_{in} \operatorname{mod}(x_n' - x_n).$$

Essa, introdotti i numeri complessi, equivale all'esistenza d'un numero positivo $p$ tale che si abbia

$$\operatorname{mod}[(f, t, x) - f(t, x')] \leq p \operatorname{mod}(x - x'). \tag{2}$$

Ciò posto, siano $x$ ed $x'$ due integrali della (1'). Si avrà

$$\frac{d(x - x')}{dt} = f(t, x) - f(t, x').$$

Prendiamo i moduli d'ambo i membri; tenendo conto che la derivata d'un modulo è minore o eguale al modulo della derivata, e tenendo conto dell'ipotesi di Lipschitz, si avrà

$$\frac{d \operatorname{mod}(x - x')}{dt} \leq p \operatorname{mod}(x - x'). \tag{3}$$

Questa diseguaglianza differenziale si integra come la corrispondente equazione; per non dividere per fattori che possono essere nulli, la si moltiplichi pel fattore integrante $e^{-p(t-t_0)}$. Se $t > t_0$, si deduce

$$\operatorname{mod}(x - x') \leq e^{p(t-t_0)} \operatorname{mod}(x_0 - x_0'), \tag{4}$$

ove $x_0$ ed $x_0'$ indicano i valori di $x$ ed $x'$ per $t = t_0$.

Se ora i due integrali $x$ ed $x'$ hanno lo stesso valore iniziale, sarà $x_0 = x_0'$; onde, dalla (4), si ha $x = x'$; così risulta provata l'unicità dell'integrale, datone il valore iniziale. (Nel mio lavoro del 1892 questa dimostrazione è tradotta in modo da non far uso dei numeri complessi).

Se invece nella (4) suppongo $x_0$ fisso, ed $x_0'$ variabile tendente ad $x_0$, sarà $\lim(x_0 - x_0') = 0$, onde anche $\lim(x - x') = 0$; cioè l'integrale $x$ è funzione continua del suo valore iniziale $x_0$.

Quest'ultimo risultato è dovuto al D[r] O. Niccoletti, il quale, nella Nota " *Sugli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, considerati come funzioni dei loro valori iniziali* „ (Rendiconti Acc. Lincei, 15 dicembre 1895), lo dedusse dalla menzionata dimostrazione del Picard sull'esistenza dell' integrale. Si vede che esso si poteva ottenere pure facilmente dalla mia del 1890.

Il D[r] Niccoletti si dimostra, nei suoi scritti, giovane di molto ingegno e valore; e questa è la ragione che mi spinge a pubblicare questa Nota, per riesaminare le sue proposizioni. L'A. in seguito studia la derivabilità degli integrali delle equazioni differenziali proposte, rispetto ai loro valori iniziali. Ma, oltre al supporre l'esistenza e la continuità delle derivate parziali dei secondi membri delle equazioni date, l'A. è ancora stato obbligato, dal procedimento seguìto, a supporre che queste derivate parziali soddisfino a condizioni analoghe a quelle che il Lipschitz aveva supposte per le funzioni; mentrechè l' esame diretto della questione non solo ci fa vedere non necessarie queste condizioni, ma ci fornisce equazioni che determinano le derivate cercate.

Infatti, suppongasi che il valore iniziale $x_0$ di $x$ dipenda da una nuova variabile reale $u$, ed abbia derivata $dx_0 / du$. Anche l'integrale $x$ dipenderà da $u$. Dato ad $u$ un incremento $\Delta u$, e detto $\Delta x$ l'incremento di $x$, si avrà

$$\frac{d(x + \Delta x)}{dt} = f(t, x + \Delta x). \tag{5}$$

Sottraendo la (1)

$$\frac{d\Delta x}{dt} = f(t, x + \Delta x) - f(t, x). \tag{6}$$

Chiamasi $\mathrm{D} f(t, x)$ la derivata del complesso $f(t, x)$ fatta rispetto al complesso $x$. Cosa si intenda per derivata d'un complesso rispetto ad un complesso variabile è detto nel mio " *Calcolo Geometrico* ", a. 1888, p. 151. Qui basti osservare che con $\mathrm{D} f(t, x)$ si può intendere la sostituzione rappresentata dalla matrice formata colle derivate di $f_1 f_2 \dots f_n$ rispetto ad $x_1 \dots x_n$. Pel teorema di calcolo, sull'incremento d'una funzione, esteso ai numeri complessi, la (6) si trasforma in

$$\frac{d \Delta x}{dt} = [\text{Medio } \mathrm{D} f(t, x + \theta \Delta x)] \Delta x, \tag{7}$$

poichè l'incremento d'una funzione complessa si ottiene moltiplicando l'incremento della variabile per un valore medio fra quelli assunti dalla derivata (che non sempre è un valore della derivata).

Dividendo per $\Delta u$ si ha:

$$\frac{d}{dt} \frac{\Delta x}{\Delta u} = [\text{Medio } \mathrm{D} f(t, x + \theta \Delta x)] \frac{\Delta x}{\Delta u}. \tag{8}$$

Questa è un'equazione differenziale lineare in $\frac{\Delta x}{\Delta u}$, il coefficiente dipende ancora da $\Delta x$. Quindi si avrà

$$\frac{\Delta x}{\Delta u} = \mathrm{E}\,[\text{Medio } \mathrm{D} f(t, x + \theta \Delta x),\ t_0,\ t]\, \frac{\Delta x_0}{\Delta u}.$$

Facciasi tendere $\Delta u$ a 0; $\Delta x_0 / \Delta u$ ha per limite $dx_0 / du$ per ipotesi. $\Delta x$ tende a zero, come si è già dimostrato; Medio $\mathrm{D} f$ $(t, x + \theta \Delta \mathrm{x})$ tende a $\mathrm{D} f(t, x)$, e vi tende uniformemente, qualunque sia $t$, a causa della continuità di questa derivata. Nella serie E si può passare al limite prendendo il limite dei singoli termini; quindi esiste il limite di $\frac{\Delta x}{\Delta u}$, che vien dato dalla formula

$$\frac{dx}{du} = \mathrm{E}\,[\mathrm{D} f(t, x),\ t_0,\ t]\, \frac{dx_0}{du}.$$

Dicasi variazione di $x$, e si indichi con $\delta x$, la derivata di $x$ rispetto ad $u$. Il considerare le variazioni come derivate presenta alcuni vantaggi sul metodo ordinario di considerarle come

incrementi infinitesimi. (Vedansi le mie " *Lezioni di Analisi infinitesimale* „, a. 1893, § 447). Allora si ha che le variazioni degli integrali dell' equazione differenziale (1') soddisfano all'equazione lineare

$$\frac{d\delta x}{dt} = [\mathrm{D}f(t, x)]\,\delta x \tag{9}$$

da cui, per $n = 1$, si ricava $\delta x$ con una quadratura (cfr. " Mathem. Annalen „, t. 37, p. 288).

Sopprimendo la nomenclatura dei numeri complessi, si ha il teorema:

" Siano le equazioni differenziali (1), ove i secondi membri hanno derivate continue rispetto ad $x_1 \ldots x_n$. Se agli elementi iniziali si dà una variazione, anche gli integrali corrispondenti ricevono variazioni, determinate dalle equazioni differenziali lineari:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\delta x_1}{dt} = \dfrac{df_1}{dx_1}\delta x_1 + \ldots\ldots + \dfrac{df_1}{dx^n}\delta x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d\delta x_n}{dt} = \dfrac{df_n}{dx_1}\delta x_1 + \ldots\ldots + \dfrac{df_1}{dx_n}\delta x_n \text{ „.} \end{array}\right\} \tag{9'}$$

Se, oltre al dare una variazione ai valori iniziali degli integrali, si dà pure una variazione alla forma delle equazioni differenziali stesse, cioè se i secondi membri sono funzioni d'un parametro, che pure varia, allora le variazioni degli integrali sono date dalle equazioni che si ottengono dalle (9') aggiungendo ai secondi membri i termini $\delta f_1$, ..... $\delta f_n$.

Questi risultati sono la generalizzazione dei noti teoremi sulla derivazione di un integrale; e sono a notarsi per la loro semplicità; poichè si possono compendiare nella proporzione. " Si ottiene la variazione degli integrali d'un sistema di equazioni differenziali facendo le variazioni di queste equazioni stesse „.

# *Su un problema relativo alle intersezioni di curve e superficie;*

Nota del Socio CORRADO SEGRE.

Ad uno scritto (*), in cui io mi difendevo da alcune critiche che il prof. Del Pezzo (**) aveva mosso ad una mia memoria (***), questi ha fatto seguire una replica (****). Pel modo com'essa è fatta io preferirei astenermi dal rispondere altro. Ma ciò non è possibile: qualche spiegazione può ancora esser utile ai lettori.

Il Prof. Del Pezzo ripete l'accusa che già mi aveva fatta di non aver io citato in quella mia memoria un suo scritto intorno ai punti singolari delle superficie algebriche. Nella prima risposta che gli avevo dato io mi ero giustificato, senza entrare nell'esame di quel lavoro, pensando così di usargli un riguardo. Ma poichè egli ribatte, interpretando come gli fan comodo le mie espressioni cortesi, e vuole che io attribuisca a lui la dimostrazione del fatto che con una successione finita di trasformazioni Cremoniane (monoidali) si scioglie qualunque singolarità di una superficie, io non posso più astenermi dal rispondere: che per quel risultato egli non ha alcun diritto di esser citato, perchè quel risultato non è punto stabilito nel suo scritto. In fatti egli trasforma le curve singolari in curve di minor singolarità (come

(*) *Intorno ad una mia memoria sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche.* " Atti Accad. Torino ", t. 32.

(**) *Osservazioni su una memoria del Prof. Corrado Segre e risposta ad alcuni suoi appunti.* " Atti Accad. Pontaniana ", t. 27.

(***) *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche.* " Annali di matematica ", (2) 25, 1896-97.

(****) *Replica ad una nota del Prof. Corrado Segre in risposta ad alcune mie osservazioni.* " Atti Accad. Pontaniana ", t. 27.

già altri avevan fatto), ma senza badare che la trasformazione stessa può produrre un certo numero di punti eccezionali, od isolati, cioè di punti dotati di singolarità superiore a quella dei punti generici delle linee su cui stanno. D'altra parte egli crede di mandar via ogni punto singolare isolato mediante una trasformazione che lo abbia per punto fondamentale, e lo muti in una o più linee singolari. Ma che il passaggio alternato che così si verrebbe a fare da linee singolari a punti singolari isolati, e da questi punti a nuove linee singolari, abbia per effetto, dopo un numero finito di trasformazioni, di ridurre la superficie ad aver sole singolarità ordinarie, non è in alcun modo dimostrato dai suoi ragionamenti. La risoluzione delle singolarità con un numero finito di trasformazioni non gli può esser attribuita, perchè nel suo lavoro *non è fatta!*

Un'altra cosa, che può apparire molto strana ai lettori di questa polemica fra due matematici, e sulla quale dovrò trattenermi alquanto per mia difesa, è una disputa fra un 9 ed un 10! Il prof. Del Pezzo, allo scopo d'infirmare una formola con cui io calcolavo la multiplicità d'intersezione di una curva ed una superficie, aveva enunciata la seguente proposizione: “ Sia “ O un punto doppio uniplanare di una superficie F ed $\omega$ il suo “ piano tangente; sia $\gamma$ un ramo di terz'ordine con l'origine in “ O ed osculatore in O al piano $\omega$; il numero delle intersezioni “ assorbite in O fra $\gamma$ ed F è 10 „. Io gli ho risposto che invece quel numero vale 9, proprio come dà la mia formola, ed ho soggiunto che egli poteva accorgersene subito ricorrendo alla rappresentazione parametrica del ramo $\gamma$ mediante sviluppi in serie... Non ho dato quel calcolo, perchè lo ritenevo tale che chiunque potesse rifarlo in un momento. Ma siccome il professore Del Pezzo, insistendo sul suo numero 10, mi domanda se io l'ho fatto quel calcolo (!), eccolo qua. Assumiamo il punto O come origine delle coordinate, $\omega$ come piano $x=0$, la tangente a $\gamma$ come asse $x=y=0$. La superficie F sarà

$$F \equiv x^2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \dots,$$

indicando le $\varphi$ forme di $xyz$ degli ordini indicati dai loro indici;

ed il ramo $\gamma$ del 3° ordine si potrà rappresentare con serie di potenze intere crescenti di un parametro $t$ così (*):

$$x = at^5 + ..., \quad y = bt^4 + ..., \quad z = ct^3 + ...,$$

ove $c \neq 0$. Per avere la multiplicità d'intersezione di F e $\gamma$ in O sostituiamo queste serie in F. Allora, se si rappresenta con $pz^3$ il termine di $\varphi_3$ contenente la sola $z$, il termine più basso rispetto a $t$ nel risultato della sostituzione sarà $pc^3t^9$. Si conclude che la multiplicità d'intersezione è veramente 9 in generale; e sarà maggiore di 9 solo quando $p = 0$, cioè quando la tangente in O a $\gamma$ sia una tangente singolare (quadripunta) di F.

È strano che il sig. Del Pezzo non abbia fatto egli stesso questa verifica; e quindi abbia ripetuto, e tentato di dimostrare, che quelle intersezioni sono 10: attribuendo invece il mio risultato ad una strana allucinazione (così egli si esprime!), che m'avrebbe fatto danzare costantemente innanzi agli occhi quel fatale numero 9!! Ben è vero che egli ammette ora che effettivamente in un certo caso quel numero d'intersezioni si riduca a 9: si tratta, in sostanza, del caso che il ramo di terz'ordine $\gamma$ abbia col piano osculatore $\omega$ un incontro, non solo 5-punto come in generale, ma 6-punto (il coefficiente $a$ di sopra sia $= 0$). Ma come mai non s'è egli accorto della assurdità di questo suo risultato, che la multiplicità d'intersezione possa *diminuire* passando dal caso generale a quel caso particolare?

Se ora ci facciamo a ricercare il difetto del ragionamento con cui egli ottiene il numero 10 pel caso generale, osserviamo che egli, applicando ad F e $\gamma$ una trasformazione quadratica, le riduce ad una superficie F′ toccata da un piano $\omega'$ lungo una retta $s'$, e ad una curva $\gamma'$ che passa semplicemente per un punto T′ di $s'$ toccandovi questa retta ed osculando il piano $\omega'$. E poi si basa su ciò che, secondo lui, F′ e $\gamma'$ avranno allora in T′ *quattro* intersezioni. Orbene quelle intersezioni invece sono soltanto *tre!* Nè vale l'invocare, come fa il sig. Del Pezzo, una cert'altra proposizione; la quale sarebbe applicabile se $\gamma'$ giacesse nel piano $\omega'$, ma non nell'attuale caso, più generale.

---

(*) V., ad esempio, HALPHEN, *Sur les singularités des courbes gauches algébriques.* " Bulletin Société mathém. de France ,, t. 6 (1877).

Occorre al mio contradittore che, come prima ho dimostrato l'errore del 10 invece di 9, gli dimostri ora distesamente l'errore del 4 al posto di 3? Ma questo è anche più evidente; e si verifica subito in casi particolari tanto ovvî (*). Del resto, per trattare la questione completamente, faccia una nuova trasformazione quadratica col punto T' come fondamentale, ed otterrà una superficie F'' ed una curva $\gamma''$ con incontro *bipunto*..... O, se preferisce che facciamo di nuovo uso di serie, sia $\omega'$ il piano $x=0$, ed $s'$ la retta $x=y=0$; sicchè sarà

$$F' \equiv x(\varphi_0+\varphi_1+\ldots)+y^2(\psi_0+\psi_1+\ldots),$$

dove le $\varphi$ e le $\psi$ sono forme degli ordini indicati dai loro indici, ed è $\varphi_0 \neq 0$ se l'origine delle coordinate è punto semplice per F' (il punto T') (**); ed il ramo lineare $\gamma'$ si potrà rappresentare così:

$$x=at^3+\ldots,\quad y=bt^2+\ldots,\quad z=ct+\ldots$$

(*) Così, prendiamo una superficie $\Phi$ d'ordine $n$ composta del piano $\omega'$ e di una superficie residua d'ordine $n-1$ non passante per T': la sua multiplicità d'intersezione in T' con $\gamma'$ sarà 3, com'è quella fra $\omega'$ e $\gamma'$. Un'altra superficie d'ordine $n$ tangente a $\omega'$ lungo la retta $s'$ determinerà con $\Phi$ un fascio di superficie tangenti a $\omega'$ lungo $s'$: la multiplicità d'intersezione in T' di una superficie generica del fascio con $\gamma'$ non potrà essere 4, poichè è solo 3 per $\Phi$. — Ancora: vogliasi la multiplicità d'intersezione in T' di $\gamma'$ con un *cono* tangente a $\omega'$ lungo la generatrice $s'$. Essa, mediante proiezione dal vertice del cono (supposto diverso da T'), si riduce alla multiplicità d'intersezione di una curva piana (proiezione di $\gamma'$) in una sua cuspide con un'altra curva che passi semplicemente per questo punto toccandovi la tangente cuspidale: questa multiplicità d'intersezione è 3, se la cuspide è di 1ª specie, cioè se $\gamma'$ ha in T' incontro solamente tripunto col piano osculatore $\omega'$.

(**) In un nuovo scritterello diretto contro di me il sig. Del Pezzo vuol insinuare (pare) che nel caso suo sia $\varphi_0=0$: vale a dire che il punto T' sia doppio per F'. Ora non solo ciò è falso, ma non è neppur possibile che il sig. Del Pezzo lo creda od abbia creduto: giacchè nella sua citata *Replica ad una Nota* ecc., a pag. 5-6, diceva esplicitamente che F' passa semplicemente per la retta $s'$, e poi su $s'$ prendeva il punto T' senza dire di volerlo doppio per F' (e trattandolo in seguito effettivamente come punto semplice). E doppio, in verità, non poteva essere T' per F': perchè il sig. Del Pezzo non aveva messo l'ipotesi che la tangente in O a $\gamma$ sia una tangente singolare (quadripunta) di F in O!

(Nota aggiunta in novembre 1897).

Sostituendo queste serie in F′, il termine più basso rispetto a $t$ sarà $a\varphi_0 t^3$. Dunque veramente la multiplicità d'intersezione è 3; e sarà maggiore di 3 solo quando $a = 0$, cioè quando $\gamma'$ avesse in T′ incontro più che tripunto col piano $\omega'$. — Si noti poi che questo caso particolare non può presentarsi nel ragionamento del prof. Del Pezzo; se no il ramo iniziale $\gamma$ sarebbe d'ordine superiore al terzo. Per conseguenza l'asserzione di lui che $\gamma'$ ed F′ hanno nel punto semplice T′ *quattro* intersezioni non è vera *in nessun caso*. —

In conclusione, volendo dimostrare che una mia formola è errata, il prof. Del Pezzo non ha fatto altro che dire e ripetere con insistenza cose erronee. Stabilito ciò, io non intendo fare altre discussioni. Tanto pei dubbi da me esposti intorno a certi lavori del sig. Del Pezzo, quanto per la difesa dalle critiche che questi mi ha mosso, nulla ho da modificare e nulla voglio aggiungere a quanto ho già detto. Il prof. Del Pezzo interpreti pure a suo piacere (come già accenna a fare nella sua *Replica*) il mio silenzio. Io dichiaro che non risponderò altro!

Torino, 27 Giugno 1897.

---

## *Quand'è che due curve piane dello stesso ordine hanno le stesse prime polari?*

Nota del Socio Corrispondente EUGENIO BERTINI.

### I.

Si tratti prima l'analogo problema per i gruppi di elementi di un ente razionale. La corrispondenza fra i poli e i primi gruppi polari rispetto ad un gruppo fondamentale di $n$ elementi, cessa di essere biunivoca (proiettiva) allora e allora soltanto che questo gruppo è un elemento $n^{\text{uplo}}$, nel qual caso i primi gruppi polari sono tutti i possibili gruppi di $n - 1$ elementi. L'essere infatti la prima polare di un elemento indeterminata, significa che il gruppo fondamentale è quell'elemento $n^{\text{uplo}}$. Se

invece due poli hanno lo stesso gruppo polare, questo è gruppo polare di qualsiasi elemento e quindi anche, quando il gruppo fondamentale non fosse un elemento $n^{\text{uplo}}$, di ogni suo elemento $r^{\text{uplo}}$ $(1 \leq r < n)$; e siccome tale elemento sarebbe pure $r^{\text{uplo}}$ per il gruppo polare, si avrebbe l' assurdo che a questo gruppo apparterrebbero tutti gli elementi del gruppo fondamentale.

Adunque, esclusi gli elementi $n^{\text{upli}}$, rispetto a qualsiasi altro gruppo fondamentale di $n$ elementi, la corrispondenza fra i poli e i gruppi polari è una proiettività non degenere. Segue che, se due gruppi fondamentali ammettono la stessa involuzione (non indeterminata) di gruppi polari, fra i due poli di ognuno di tali gruppi rispetto ai due gruppi fondamentali, sussiste pure una proiettività non degenere. Se tale proiettività ha due elementi uniti distinti, si rappresenti colle formole $y_1 = az_1$, $y_2 = bz_2$. Allora, indicando $f = 0$, $\varphi = 0$ i due gruppi fondamentali di $n$ elementi, dovrà essere identicamente

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = a \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = b \frac{\partial \varphi}{\partial x_2},$$

donde

$$(a - b) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Escluso $a = b$, che condurrebbe alla coincidenza dei due gruppi fondamentali, rimane $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$, e quindi deve essere

$$\varphi = \mathrm{A}x_1^n + \mathrm{B}x_2^n.$$

Che se la suddetta proiettività è con un solo elemento unito, si hanno invece le formole:

$$y_1 = az_1, \quad y_2 = \lambda z_1 + az_2; \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = a \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = a \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}:$$

dalle quali (escludendosi che sia $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0$) segue $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0$ e però $\varphi = x_1^{n-1}(\mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}x_2)$. Viceversa, è evidente che le due forme trovate, qualsiansi A, B, hanno gli stessi gruppi polari.

Si può quindi affermare che negli enti razionali (forme binarie) possono darsi tre soli casi, in cui gruppi fondamentali dello stesso ordine $n$ abbiano gli *stessi* gruppi polari: e cioè quando

1° I gruppi fondamentali sono gli elementi $n^{\text{upli}}$ dell'ente.

2° I gruppi fondamentali sono i gruppi di una involuzione di 1ª specie con due dati elementi $n^{\text{upli}}$ (cioè i gruppi ai quali è apolare una data coppia di elementi).

3° I gruppi fondamentali sono costituiti da un dato elemento $(n-1)^{\text{uplo}}$ e da un altro qualunque.

## II.

Passiamo alle forme ternarie. Qui pure si può notare che la corrispondenza fra i poli e le prime polari rispetto ad una curva fondamentale non è biunivoca nel solo caso che la curva sia il sistema di $n$ rette passanti per un punto. Ciò accade infatti se la prima polare di un punto è indeterminata. Se invece due punti e però tutti i punti della retta $r$ che li congiunge hanno la stessa prima polare $C_{n-1}$ rispetto ad una curva fondamentale $C_n$ di ordine $n$, ed $r$ non contiene un punto $n^{\text{uplo}}$ di questa curva, i punti comuni ad $r$, $C_n$ (colle loro molteplicità) devono manifestamente appartenere a $C_{n-1}$; cioè $r$ deve appartenere a $C_{n-1}$ e quindi a $C_n$. Ma allora la polare di ogni punto di $r$ rispetto a $C_n$ si compone di $r$ e della prima polare $C_{n-2}$ del punto rispetto alla curva residua, d'ordine $n-1$, che fa parte di $C_n$; cosicchè, se questa curva residua non ha un punto $(n-1)^{\text{uplo}}$ sopra $r$, dovrà $r$ staccarsi pure da essa. Continuando, si conclude che $C_n$ è composta della retta $r$ $n^{\text{upla}}$, se non è formata di $n$ rette concorrenti in un punto di $r$ (fra le quali figuri eventualmente la stessa $r$ una o più volte).

Adunque, *escluse le curve fondamentali d'ordine $n$ che hanno per prime polari tutte le curve d'ordine $n-1$ del piano, le quali curve fondamentali sono tutte e sole quelle dotate di punto $n^{\text{uplo}}$, la corrispondenza fra i poli e le prime polari è un'omografia non degenere.*

Si può dedurne di passaggio una osservazione relativa ad una rete di coniche. Una tal rete, quando è generica, si può sempre pensare come rete di prime polari rispetto ad una certa cubica (*), anzi si può costruire facilmente una equazione sim-

---

(*) CREMONA, *Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane* (“ Annali di Matematica pura ed applicata „, t. VI, 1864), n. 21.

bolica di questa curva (*). Se la rete acquista una sola o due sole rette doppie (distinte o successive) le coniche della rete non possono costituire più un sistema di polari. Che cosa diventa allora la suddetta equazione? Siccome la detta impossibilità si dimostra coll'aiuto della corrispondenza biunivoca fra le coniche polari e i loro poli (**), si vede *a priori* che quell'equazione, se non diviene indeterminata, si ridurrà a rappresentare il sistema di tre rette per un punto.

Se due curve fondamentali d'ordine $n$ $f=0$, $\varphi=0$ hanno le stesse prime polari (non indeterminate) sussisterà adunque, per ciò che si è detto, fra i loro poli una omografia non degenere. Suppongasi dapprima che tale omografia sia con tre punti uniti distinti. Assunti come vertici del triangolo di riferimento, si hanno le formole $y_1=az_1$, $y_2=bz_2$, $y_3=cz_3$;

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=a\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=b\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\quad \frac{\partial f}{\partial x_3}=c\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}:$$

dalle quali segue

$$(a-b)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}=(b-c)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3}=(c-a)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\partial x_1}=0,$$

e quindi $\varphi=Ax_1^n+Bx_2^n+Cx_3^n$. Viceversa, queste forme, qualsiansi A, B, C, hanno le stesse prime polari.

Che se $a=b$, cioè si considera un'omologia col centro esterno all'asse di omologia, dall'essere

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3}=0,$$

segue $\varphi=Ax_3^n+u_n$, ove $u_n$ è una forma binaria in $x_1, x_2$; e analogamente $f=A'x_3^n+u'_n$. Ma, ritornando alle condizioni superiori, cioè alle

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=a\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=a\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\quad \frac{\partial f}{\partial x_3}=c\frac{\partial\varphi}{\partial x_3},$$

---

(*) Rosanes, *Ueber Systeme von Kegelschnitten* („Mathem. Annalen", B. VI), n. 12.

(**) Cremona, l. c., n. 22 e segg.

si trova inoltre che deve essere identicamente $u'_n = a u_n$ e $A' = cA$. Dunque, dicendo punto d' iperosculazione per una curva di ordine $n$ un punto semplice nel quale la tangente ha un contatto $n^{\text{punto}}$:

1° *Hanno le stesse prime polari le* $\infty^2$ *curve di ordine* $n$ *aventi sopra ogni lato di un dato trilatero (basta sopra due lati* (*)*)* $n$ *punti d'iperosculazione, di cui le tangenti concorrono nel vertice opposto (ovvero, rispetto alle quali curve le coniche inscritte nel trilatero sono apolari).*

2° *Hanno le stesse prime polari le* $\infty^1$ *curve di ordine* $n$ *che posseggono gli stessi* $n$ *punti d'iperosculazione in linea retta ed ivi le medesime tangenti concorrenti in un punto.* Per $n=3$ il fascio di cubiche (equianarmoniche) definito nel 2° caso è contenuto nella rete (di cubiche pure equianarmoniche) definito nel 1°.

Se l'omografia fra i poli ha due punti uniti successivi e uno distinto, si prendano in essi due vertici del triangolo di riferimento e il terzo vertice in un punto qualunqne della retta che congiunge i due punti uniti successivi. Allora le formole sono: $y_1 = az_1 + \lambda z_2$, $y_2 = az_2$, $y_3 = bz_3$;

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = a\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = b\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}.$$

Da queste seguono le

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3} = 0,$$

per le quali si vede facilmente che deve essere

$$\varphi = A x_3^n + C x_1 x_2^{n-1} + D x_2^n$$

ed analogamente

$$f = A' x_3^n + C' x_1 x_2^{n-1} + D' x_2^n.$$

Riapplicando poi le formole superiori si trova,

$$b = \frac{A'}{A}, \quad a = \frac{C'}{C}, \quad \lambda = \frac{n(D'C - DC')}{C^2}.$$

(*) Per $n=3$ basta sopra un lato.

La equazione $\varphi = Ax_3^n + Cx_1x_2^{n-1} + Dx_2^n = 0$, qualsiansi $A, C, D$, è caratteristica di curve che hanno un punto $(n-1)^{\text{uplo}}$ in $x_2 = x_3 = 0$ coll' unica tangente $x_2 = 0$ e un punto d'iperosculazione sopra $x_3 = 0$, la cui tangente, $Cx_1 + Dx_2 = 0$, passa per $x_1 = x_2 = 0$. Dunque

3° *Hanno le stesse prime polari le* $\infty^2$ *curve dotate di un medesimo punto* $(n-1)^{\text{uplo}}$ *colla medesima unica tangente e aventi ciascuna un punto d'iperosculazione, così che i punti d'iperosculazione giacciano in una retta per il punto* $(n-1)^{\text{uplo}}$ *e le tangenti in quelli passino per un punto della tangente in questo.*

Esaminiamo qui il caso in cui si abbia una omologia fra i poli, di cui l'asse passi per il centro. Basta porre nelle formole precedenti $a = b$, cioè partire dalle

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = a\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = a\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$$

onde ne seguono soltanto le

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

e quindi si ha

$$\varphi = Ax_2^{n-1}x_1 + Bx_2^n + Cx_2^{n-1}x_3 + \ldots + Dx_3^n$$
$$f = A'x_2^{n-1}x_1 + B'x_2^n + C'x_2^{n-1}x_3 + \ldots + D'x_3^n.$$

Riprendendo le precedenti equazioni si trova poi che deve essere

$$a = \frac{A'}{A} = \frac{C'}{C} = \ldots = \frac{D'}{D}, \quad \lambda = \frac{n(B'A - BA')}{A^2}:$$

e quindi che delle due forme $f$, $\varphi$ una è arbitraria combinazione lineare dell'altra e di $x_2^n$. Per conseguenza:

4° *Hanno le stesse prime polari le* $\infty^1$ *curve di ordine* $n$ *(di un fascio), che posseggono un medesimo punto* $(n-1)^{\text{uplo}}$ *colla medesima tangente e le cui ulteriori* $n$ *intersezioni cadono pure nel punto* $(n-1)^{\text{uplo}}$ *(cioè che hanno raccolte in questo punto tutte le* $n^2$ *intersezioni).*

Rimane da ultimo il caso in cui l'omografia tra i poli abbia tre punti uniti successivi, cioè, per opportuna scelta del triangolo fondamentale, sia data dalle formole

$$y_1 = az_1 + \lambda z_2 + \mu z_3, \quad y_2 = az_2 + \nu z_3, \quad y_3 = az_3.$$

Si avrà

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = a \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + a \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}:$$

da cui si ricava

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} = \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2_2}.$$

Dalle prime due di queste si ottiene $\varphi = A x_3^{n-1} x_1 + u_n$ ($u_n$ forma binaria in $x_2, x_3$) e dalla terza (escluso che sia

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2_2} = 0$$

perchè $\varphi = 0$ risulterebbe un sistema di $n$ rette per un punto)

$$u_n = B x_3^n + C x_3^{n-1} x_2 + D x_3^{n-2} x_2^2$$

colla condizione $(n-1)\lambda A = 2\nu D$. Dunque deve essere

$$\varphi = x_3^{n-2}(A x_1 x_3 + B x_3^2 + C x_2 x_3 + D x_2^2)$$

$$f = x_3^{n-2}(A' x_1 x_3 + B' x_3^2 + C' x_2 x_3 + D' x_2^2),$$

ove

$$\frac{A}{D} = \frac{A'}{D'} = \frac{2\nu}{(n-1)\lambda}.$$

Se ora si ritorna alle equazioni primitive si trovano le relazioni

$$a = \frac{A'}{A} = \frac{D'}{D}, \quad \lambda = \frac{C' - aC}{A}, \quad \nu = \frac{(n-1)(C' - aC)}{2D},$$

$$\mu = \frac{n(B' - aB) - \nu C}{A};$$

nelle quali è compresa la condizione suddetta, che nasce dal confronto della seconda e della terza e dalla prima; e che mostrano potersi prendere arbitrariamente A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ colla sola limitazione $\frac{A}{A'} = \frac{D}{D'}$, giacchè allora le relazioni stesse determinano $a$, $\lambda$, $\nu$, $\mu$. Dunque:

5° *Hanno le stesse prime polari le $\infty^2$ curve di ordine $n$ costituite da una data retta $(n-2)^{\text{upla}}$ e dalle coniche che la toccano in un dato punto ed ivi ne osculano tutte una fissata (cioè che hanno in quel punto il medesimo circolo osculatore).*

Così sono esauriti tutti i casi possibili.

## *Sul calcolo delle travature reticolari non piane;*

Nota dell'Ing. ELIA OVAZZA.

La statica delle travature reticolari non piane può con vantaggio ridursi a quella di travature reticolari piane, operando nel modo che indichiamo in questa Nota e da noi già applicato in casi pratici.

1. — Sulla superficie di un poliedro a faccie *tutte triangolari* si consideri una poligonale chiusa A formata di $n$ spigoli consecutivi, che divida la superficie in due parti. I vertici di una di queste parti e gli spigoli sieno i centri dei nodi e gli assi delle aste di una travatura reticolare, i cui appoggi sieno agli $n$ nodi collegati dalle aste corrispondenti ai lati della poligonale A. Una tale travatura diremo *triangolare.*

2. — Dei punti di appoggio uno sia *fisso,* un altro vincolato senza attrito ad una *linea fissa,* la quale per causa della estrema piccolezza delle deformazioni elastiche potremo sostituire con la sua tangente in corrispondenza della posizione media del punto ad essa vincolato; gli altri punti d'appoggio sieno vincolati senza attrito ad altrettante *superficie fisse,* che pure potremo sostituire coi loro piani tangenti nelle posizioni medie dei punti ch'esse vincolano.

Salvo eccezioni, dipendenti da speciali disposizioni degli appoggi e delle aste, una tale travatura è *staticamente determinata* (*).

3. — Supposto infatti per primo caso che la travatura sia *soltanto caricata ai nodi,* le equazioni utili di equilibrio sono in

(*) Benchè la cosa sia notoria, crediamo non priva d'interesse la dimostrazione che qui ne diamo.

numero di 3N, cioè di 3 per ognuno degli N nodi. Detto $a$ il numero delle aste, sono incognite le $a$ tensioni nelle aste, più gli elementi determinanti le reazioni di appoggio, che sono evidentemente in numero di

$$(n-2)+2+3.$$

Quindi, tra forze interne ed esterne, le incognite sono

$$a+n+3.$$

Ma se immaginasi alla porzione di superficie poliedrica, da cui partimmo per definire la travatura triangolare, attaccata, per l'orlo costituito dalla poligonale A di $n$ lati, un'altra analoga superficie poliedrica a faccie tutte triangolari ed in eguale numero, la superficie che risulta dal complesso delle due avrà $2N-n$ vertici, $2a-n$ spigoli, e $\frac{2}{3}(2a-n)$ faccie. Applicando ad essa il teorema di Eulero, risulta:

$$\frac{2}{3}(2a-n)+(2N-n)=(2a-n)+2,$$

e quindi

$$3N=a+n+3. \tag{1}$$

Il numero delle incognite è dunque eguale a quello delle equazioni utili di equilibrio, le quali, essendo di primo grado, valgono a determinare le incognite, salvo casi eccezionali in cui di tali equazioni qualcuna o dipenda dalle altre oppure sia con altre incompatibile.

4. — Il ragionamento fatto presuppone la resistenza delle aste a sforzi assiali. Qualora invece *i carichi,* oltrechè ai nodi, fossero *anche applicati a punti intermedî degli assi delle aste,* queste verrebbero pure cimentate a taglio ed a flessione. Ora, ammessa la resistenza delle aste anche a tali sorta di sollecitazioni, non cessa per la diversa distribuzione dei carichi di essere staticamente determinata una travatura nelle suindicate

condizioni di appoggio e di costituzione, sempre fatta riserva per casi eccezionali. È noto infatti che (*) la condizione di statica determinabilità coincide con quella della stretta indeformabilità, la quale evidentemente non dipende dalla disposizione dei carichi.

5. — Direttamente ragionando del resto, se carichi sono applicati a punti intermedî dell'asse di un'asta, o, più in generale, se è nullo il momento del sistema dei carichi gravitanti sull'asta rispetto all'asse della medesima, è sempre possibile ridurre questo sistema in due forze F passanti pei centri dei nodi limitanti l'asta, e di queste sono determinate le componenti normali all'asse dell'asta, mentre delle componenti secondo l'asse è solo determinata la somma algebrica. Se quindi si prendono per incognite le tensioni assiali delle singole aste ai loro estremi, le incognite fra reazioni e tensioni sono in numero di

$$(a+n+3)+a=2a+n+3.$$

Ma alle 3N equazioni d'equilibrio dei nodi si aggiungono $a$ equazioni, una per asta, esprimenti che la differenza fra gli sforzi assiali alle estremità di ciascun'asta equivale alla somma delle proiezioni dei carichi diffusi lungo l'asta sull'asse di questa; con che si hanno tante equazioni quante incognite. Le componenti, normali all'asse di ciascun'asta, delle reazioni dei nodi che la limitano devono per altro essere eguali ed opposte alle componenti normali delle forze F; son così determinabili staticamente le reazioni delle singole cerniere contro le aste, epperciò anche le sollecitazioni per tutte le sezioni trasversali di tutte le aste.

6. — Ciò posto, riprendiamo a considerare le *travature reticolari triangolari* soltanto *caricate ai nodi.*

Ad evitare considerazioni troppo generali, e perciò oziose per la maggioranza dei tecnici, e pur senza troppo nuocere alla

---

(*) Cfr. A. Föppl, *Das Fachwerk im Raume.* Leipzig 1892.

generalità della trattazione, supporremo che *gli appoggi sieno tutti su uno stesso piano orizzontale — piano degli appoggi —*, sicchè su questo piano combacino tutti i piani di appoggio e giacciano il punto fisso e la retta fissa.

7. — Proiettata sul piano degli appoggi la travatura triangolare T, si immagini la *travatura reticolare piana, t,* che ha per nodi e per aste le proiezioni dei nodi e delle aste della travatura T, vincolata al medesimo punto fisso ed alla medesima retta fissa, sollecitata da carichi $p$ eguali alle proiezioni sul piano di appoggio dei carichi P agenti sulla travatura T nello spazio.

Questa travatura piana $t$ è staticamente indeterminata. Invero si hanno in essa, tra tensioni e reazioni, incognite in numero di $a + 3$, essendo solo più 3 gli elementi determinanti le reazioni del punto fisso e della retta fissa; le equazioni utili della statica sono per altro in numero di 2N. Ma dalla (1) è

$$a + 3 = 3N - n;$$

quindi nella travatura piana $t$ considerata avremo

$$(3N - n) - 2N = N - n$$

incognite in più che equazioni. Occorrerebbero perciò equazioni di elasticità in numero di $N - n$; cioè tante quanti sono i nodi della travatura T nello spazio esclusi quelli di appoggio, cioè quanti sono i *nodi interni.*

8. — Qui però non è il caso di ricorrere alla teoria dell'elasticità. Se infatti immaginiamo proiettati sul piano degli appoggi anche i poligoni storti d'equilibrio dei nodi della travatura T nello spazio, le proiezioni sono altrettanti poligoni chiusi; devono quindi equilibrarsi sulla travatura piana $t$ le proiezioni $p$ dei carichi P, le proiezioni $c$ delle reazioni C di appoggio insieme con le proiezioni $s$ delle tensioni S agenti lungo le aste della travatura T.

9. — Si privi idealmente la travatura $t$ di un numero

$$i = N - n$$

di aste in modo da ridurla staticamente determinata, cioè alla *travatura principale* (*), e si indichino rispettivamente con $x_1$, $x_2, \ldots x_i$ le tensioni $s$ nelle aste così scartate, che considereremo come forze esterne applicate alla travatura principale, denotando con $X_1, X_2, \ldots X_i$ le tensioni S nelle aste della travatura T dello spazio, che in quelle $x$ si proiettano.

Dalle equazioni d'equilibrio per i nodi della travatura $t$, di primo grado ed omogenee nelle quantità $s$, $c$, $x$, $p$, deducesi per ognuna delle $s$ una relazione del tipo:

$$s = s_0 + s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots\ldots + s_i x_i, \tag{2}$$

ove con $s_0$ indicasi una funzione lineare ed omogenea dei soli carichi $p$, con $s_1, s_2, \ldots s_i$ dei numeri indipendenti dai $p$ e dalle $x$.

10. — La quantità $s_0$ misura la tensione nell'asta corrispondente della travatura principale solo carica delle forze $p$, essendo nulle le $x$; uno qualunque, $s_r$, dei numeri $s_1, s_2, \ldots s_i$ misura invece lo sforzo nella corrispondente asta della travatura principale, scarica delle forze esterne $p$, ma sollecitata da due forze eguali ad *uno* applicate ai nodi collegati dall'asta la cui tensione è $x_r$, e dirette lungo l'asse dell'asta ma in versi opposti, cioè per la *sollecitazione* $x_r = 1$.

Mediante tanti diagrammi Cremona quante sono le $x$ più uno, cioè quanti sono i nodi interni della travatura T più uno (ovvero con qualunque altro metodo equivalente), si possono adunque ottenere le quantità $s_0, s_1, s_2, \ldots s_i$ relative a ciascun'asta (**).

---

(*) È il metodo adoperato per le travature staticamente indeterminate in generale. Cfr. Müller-Breslau, *Die neueren Methoden der Festigkeitlehre*. Leipzig, 1886. — Id., *Beitrag zur Theorie des raümlichen Fachwerks*. Berlin, 1892.

(**) Si noti che anche per ognuna delle aste immaginate tolte dalla travatura piana $t$, per ricavarne la travatura principale, sta un'equazione del tipo (2), potendosi scrivere per ognuna di esse:

$$s = x_r = 0 + 0 \,.\, x_1 + 0 \,.\, x_2 + \ldots + 1 \,.\, x_r + \ldots + 0 \,.\, x_i.$$

11. — Restano a determinare le quantità $x_1$, $x_2$, ... $x_i$.

Indicando genericamente con $\alpha$ l'angolo che una qualunque delle aste della travatura T fa col piano degli appoggi, e con $\varphi$ l'angolo che con detto piano fa un carico qualunque P applicato alla travatura T, per l'equilibrio alla traslazione verticale di uno qualunque dei nodi interni, dovrà essere

$$\Sigma \, \mathrm{S} \, \mathrm{sen} \, \alpha + \Sigma \, \mathrm{P} \, \mathrm{sen} \, \varphi = 0,$$

estese le sommatorie a tutte le forze agenti sul nodo. Ossia, introducendo le proiezioni $s$ (inclusevi le $x$):

$$\Sigma s \, \mathrm{tg} \, \alpha + \Sigma \, \mathrm{P} \, \mathrm{sen} \, \varphi = 0,$$

od anche, in virtù delle (2):

$$\Sigma s_0 \, \mathrm{tg} \, \alpha + x_1 . \Sigma s_1 \, \mathrm{tg} \, \alpha + x_2 . \Sigma s_2 \, \mathrm{tg} \, \alpha + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + x_i . \Sigma s_i \, \mathrm{tg} \, \alpha + \Sigma \, \mathrm{P} \, \mathrm{sen} \, \varphi = 0. \qquad (3)$$

Di tali equazioni potendosi scrivere una per caduno dei nodi interni, cioè quante sono le $x$, queste risultano determinate e di conseguenza le $s$ e le $S$.

12. — Le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale dei nodi di appoggio della travatura T servono a determinare le componenti verticali $c'$ delle reazioni d'appoggio.

Sarà infatti per ognuno di tali nodi:

$$c' + \Sigma s \, \mathrm{tg} \, \alpha = 0 ,$$

estesa la sommatoria a tutte le aste concorrenti nel nodo (incluse le $x$).

Le componenti orizzontali coincidono con le reazioni provocate dai carichi $p$ sulla travatura $t$, od anche con le reazioni $c_0$ provocate dai carichi $p$ sulla travatura principale dedotta dalla $t$, poichè per la sollecitazione generica $x_r = 1$ non vengono cimen-

tati gli appoggi a reagire. Le reazioni $c_0$ si determinano quindi insieme con le $s_0$ mediante uno stesso diagramma Cremona (*).

13. — Nel caso speciale in cui tutti i carichi P sieno *pesi*, e perciò normali al piano degli appoggi, si annullano i carichi $p$ e perciò le forze $c_0$ ed $s_0$; sono allora sufficienti altrettanti diagrammi Cremona quante sono le $x$, e le equazioni determinanti queste $x$ riduconsi alla forma:

$$\Sigma P + x_1 . \Sigma s_1 \operatorname{tg} \alpha + \ldots\ldots + x_i . \Sigma s_i \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

14. — Suppongasi ora che carichi P sieno anche applicati a punti delle aste intermedî tra i nodi, cioè si consideri il caso delle travature reticolari *ad aste caricate.*

Ognuno dei carichi applicati a punti intermedî dell'asse di un'asta si decomponga in una forza Q′ normale all'asse dell'asta ed in una Q″ secondo l'asse medesimo. La Q′ si decomponga in due parallele P′ e P″ ai nodi limitanti l'asta, mentre ad uno qualunque di questi nodi si applichi come forza esterna la Q″, il cui punto di applicazione, per quanto si riferisce alle condizioni necessarie di equilibrio, qui sole a considerarsi, può scegliersi comunque lungo l'asse dell'asta. Converrà per semplicità scegliere il centro di un medesimo nodo come punto di applicazione di tutte le forze Q″ relative ai carichi gravanti una medesima asta. Si operi poscia sulla travatura reticolare come se fosse caricata ai soli nodi dalle forze determinate P′, P″, Q″ e dai carichi P agenti direttamente sui nodi.

Le tensioni $s$ (od $x$), che risultano, devono intendersi come proiezioni, fatte sul piano degli appoggi, delle tensioni nelle corrispondenti aste alle sezioni infinitamente prossime a quelle cerniere limitanti le aste, a cui non si sono applicate le forze Q″. La tensione assiale di cadun'asta varierà lungo l'asta per l'addizione algebrica, alla tensione S (od X) delle componenti as-

(*) Siccome per detta sollecitazione generica $x_r = 1$ saranno di norma poche le aste cimentate, saranno pochi i termini delle sommatorie sopra scritte, e di conseguenza non troppo faticosa riesce l'applicazione pratica del metodo di calcolo da noi indicato.

siali $Q''$, che appunto alla tensione S (od X) si sovrappongono in corrispondenza dei punti di applicazione dei relativi carichi.

**15.** — La maggiore complicazione, derivante necessariamente dall'essere parte dei carichi applicati lungo gli assi delle aste, trova in pratica un compenso nel minor numero di aste costituenti la travatura. Notevoli semplificazioni, che qui non è il luogo di indicare, si possono introdurre all'atto dell'applicazione del metodo qui indicato ai casi singolari.

**16.** — La trattazione precedente facilmente estendesi al caso in cui le aste costituenti la travatura triangolare staticamente determinata, anzichè rettilineo, abbiano *asse curvo comunque.*

Se infatti i carichi sono applicati ai nodi soltanto, ogni asta è in equilibrio sotto l'azione delle sole reazioni dei nodi che la limitano, epperciò queste reazioni agiscono secondo la congiungente detti nodi. Basterà quindi, per quanto riguarda il calcolo delle reazioni di appoggio e degli snodi, sostituire alla travatura con aste curve un'altra avente altrettante aste rettilinee e gli stessi nodi.

Se invece i carichi sono anche applicati a punti intermedî delle aste, ma il sistema dei carichi sollecitanti cadun'asta ha momento nullo rispetto alla congiungente i centri dei nodi limitanti l'asta, si scomponga detto sistema, ciò ch'è possibile ed in un solo modo, in due forze passanti pei centri dei detti nodi, una delle quali sia normale alla congiungente i centri medesimi. Si operi quindi nel modo indicato sulla travatura così caricata ai soli nodi. Stanno per essa le cose dette pel caso di aste rettilinee, quando le forze X ed S si intendano agenti secondo le congiungenti i nodi limitanti le corrispondenti aste, e le componenti $Q'$ e $Q''$ si intendano dirette normalmente a dette congiungenti e secondo queste medesime.

**17.** — Non crediamo soffermarci a considerare travature staticamente determinate di *tipo diverso* dal triangolare, ovvie essendo le modificazioni che la diversità di tipo conduce ad introdurre.

18. — Una ulteriore generalizzazione della trattazione si può fare al caso in cui gli attacchi delle aste fra di loro *non sieno a snodo.*

Se gli assi delle aste sono *rettilinei,* per analogia con quanto si usa per le travature piane, nel caso in cui i carichi sieno applicati ai *soli nodi* si può fare astrazione dalla rigidità degli attacchi. Nel caso di *aste caricate,* fatta la scomposizione dei carichi nelle componenti $Q'$ e $Q''$ normale all'asse dell'asta e secondo l'asse, la $Q''$ si applicherà al centro di una delle sezioni terminali dell'asta, mentre la $Q'$ si spartirà in due componenti $P'$ e $P''$ ai centri di dette due sezioni, stimando *in via di approssimazione* i cedimenti degli attacchi. I rapporti delle $P'$ e $P''$ ai relativi carichi $P$ si deducono mediante la teoria delle travi inflesse.

19. — Se poi le membrature del sistema sono *curve,* oltre ad essere gli attacchi rigidi, purchè il complesso dei carichi gravanti cadun'asta abbia momento nullo rispetto alla retta dei centri delle sezioni estreme dell'asta, si farà la scomposizione ora indicata dei carichi in componenti $Q''$ e $Q'$ secondo detta retta ed in direzione normale. Ogni componente $Q''$ si applicherà al centro d'una delle sezioni terminali della membratura, ed ogni $Q'$ si scomporrà in due applicate ai centri di dette sezioni, determinabili mediante la teoria delle travi ad arco.

Eseguite tali scomposizioni, si procede come per travature con aste collegate a snodo.

20. — È noto che lo studio della resistenza delle travature elastiche *staticamente indeterminate* riducesi coi moderni metodi della scienza delle costruzioni a quello di travi staticamente determinate. Tali travi, nel caso ch'esse non sieno piane, possono con vantaggio calcolarsi secondo fu indicato nella presente nota, con che diventa possibile l'applicazione dei metodi della statica grafica, i quali notevolmente semplificano i calcoli da eseguirsi.

Torino, 21 Novembre 1897.

# *Sulla forma più conveniente da dare ai sostegni del cannocchiale nei teodoliti e nei livelli;*

Nota dell' Ing. VITTORIO BAGGI.

Il problema di ridurre orizzontale l'asse di un cilindro mediante una livella è assai frequente in pratica, ed esso interessa tanto l'astronomo nelle sue delicate osservazioni, quanto il topografo nelle semplici operazioni di livellazione.

Per *albero di rotazione* intenderemo il pezzo metallico materiale al quale è fissato il cannocchiale di un teodolite: chiameremo invece *asse di rotazione* l' asse della superficie di rivoluzione secondo la quale è tornito l'albero di rotazione.

Nei teodoliti, le due estremità dell'albero di rotazione del cannocchiale terminano ciascuna con un *perno* che appoggia sopra un apposito *cuscinetto* solidale ai montanti dell'alidada. Allorchè trattasi di un livello a cannocchiale amovibile, i perni prendono generalmente il nome di *collari*.

Sono noti i procedimenti che si seguono in pratica per rendere orizzontale l'asse del cilindro costituito dalla superficie avvolgente i perni (oppure i collari) allorchè essi si suppongono cilindrici, a *base circolare* e dello stesso diametro.

È anche noto che tale asse non può essere ridotto orizzontale per mezzo diretto della livella se la superficie avvolgente i perni o collari non forma un'unica superficie a generatrici parallele.

I due perni o collari che devono far parte di uno stesso teodolite o livello si lavorano generalmente insieme, poscia si innestano alle estremità dell'albero, oppure si adattano al tubo del cannocchiale, e con una livella poggiante su di essi si ritoccano in modo che risultino soddisfatte le condizioni richieste

per la loro esattezza, compatibilmente colla sensibilità della livella (*).

I cuscinetti d'appoggio dei perni, nonchè le estremità delle braccia della livella da sovrapporre ad essi, possono essere foggiati in uno dei tre modi indicati nelle figure 1ª, 2ª, 3ª.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

La disposizione indicata nella fig. 3ª si applica raramente nei teodoliti; essa si trova invece applicata in alcuni livelli a cannocchiale mobile e livella mobile.

Allorchè le livelle sono molto sensibili, succede che difficilmente si raggiunge la correzione dell'albero in modo che la bolla rimanga centrata *prima* e *dopo* l' inversione della livella sui perni, nonchè durante il lieve cullamento che si fa subire alla livella per la sua correzione laterale (**).

Ed è appunto per questo fatto che nelle osservazioni astro-

(*) Nelle livellazioni geometriche di precisione, nonchè nelle osservazioni astronomiche, si adoperano livelle di grande sensibilità. In alcuni strumenti universali le livelle hanno anche la sensibilità di circa 0",5. Quelle che fanno parte dei livelli a cannocchiale che si adoperano nelle livellazioni geometriche di precisione, hanno una sensibilità che generalmente non supera 2" (Per sensibilità intendiamo il numero dei secondi contenuti fra le due tangenti centrali alla bolla, allorchè questa si sposta di un millimetro lungo il tubo della livella).

(**) Nell'ipotesi che i perni siano circolari, è noto che dopo aver fatta la correzione dell'asse di rotazione orizzontale di un teodolite, si culla la livella e si osserva se la bolla si sposta longitudinalmente. Se essa si sposta sempre da una medesima parte, comunque si culli la livella, si conchiude che la superficie avvolgente i perni è conica, in caso contrario si deduce che l'asse della livella e quello dei perni sono due rette sghembe fra loro.

nomiche si procede alla correzione dell'albero sino a ridurre la bolla oscillante di poche parti dalla sua posizione media, finchè si giudica opportuno di smettere le correzioni meccaniche. Dallo spostamento della bolla si deduce poi l'inclinazione $i$ dell'asse dei perni che si traduce in secondi di tempo.

Oltre all'errore dovuto all'inclinazione $i$, bisogna poi tener conto della correzione per l'ineguaglianza dei perni, inquantochè è noto che raggiungere l'eguaglianza dei perni è per il meccanico un problema più difficile di quello di costruire una livella molto sensibile capace di constatarla, perciò quando si aspira al massimo di precisione possibile, l'osservatore deve rimediare a questa residua deficienza o coll' impiegare i noti metodi di misura i quali conducono all'eliminazione degli errori di cui è causa, oppure deve tenerne calcolo nel rilevare l'inclinazione dell'asse mediante la livella.

Sappiamo che l' inclinazione che si rileva colla livella è quella della linea d'appoggio della livella stessa coi perni se trattasi della fig. 3ª: è la generatrice superiore di contatto se trattasi della fig. 1ª, ed è invece la retta che passa per i vertici dei due angoli corrispondenti ai due piedi della livella se trattasi della fig. 2ª.

Le formole adoperate dagli astronomi per queste correzioni sono generali, e servono per tutti i casi ora detti, inquantochè nel caso della fig. 2ª gli angoli di apertura delle due faccie dei cuscinetti d'appoggio dei perni, nonchè quelli dei due piedini della livella, si fanno uguali fra loro, la qual cosa è facile conseguire dal meccanico che lavora le due coppie di pezzi insieme (*).

Un'altra condizione alla quale devono soddisfare i perni dell'albero orizzontale di un teodolite od i collari del cannocchiale di un livello, sappiamo essere quella di avere le loro sezioni rette perfettamente circolari.

Se facendo muovere il cannocchiale in altezza e mantenendo fissa la livella, la bolla di questa indica che vi sono difetti di forma nei perni, bisogna esaminarli secondo diverse inclinazioni del cannocchiale, e trovare così, mediante la livella, un altro

---

(*) Cfr. Salmoiraghi, *Strumenti e Metodi moderni di Geometria pratica.* Vol. I, pag. 584.

termine da introdurre nel calcolo per valore dell'inclinazione $i$ dell'asse, funzione della distanza zenitale della stella che si ha da osservare.

Tali indagini sono ben note agli astronomi, che devono eseguire scrupolosi esami per i grandi circoli meridiani dei loro Osservatori.

Poichè è impossibile lavorare i perni in modo che non vi siano irregolarità nella loro forma, vediamo di studiare la foggia da dare ai cuscinetti ed alle estremità delle braccia della livella di un teodolite, affinchè la irregolarità nella forma dei perni abbia da influire il meno possibile nei risultati delle osservazioni.

Esaminiamo cioè quale delle tre forme presentate nelle figure 1ª, 2ª e 3ª sia più conveniente da adottare in pratica.

Se nelle loro sezioni rette i perni non sono circolari, è logico ritenere che siano a sezione ellittica, ed appunto tali li supporremo nel ragionamento che segue.

Allorchè detti perni vengono fissati alle estremità dell'albero di rotazione di un teodolite, si possono verificare i due seguenti casi:

1° I perni possono essere fissati all'albero in guisa che la superficie che li avvolge risulti a generatrici parallele, come

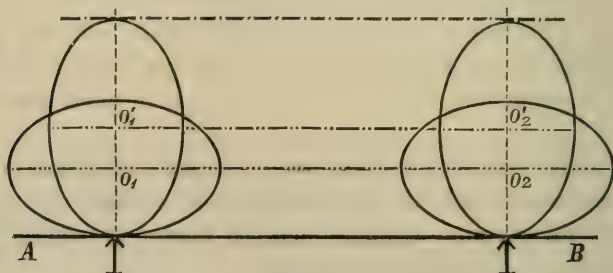



Fig. 4.

è indicato nella fig. 4ª. In questo caso, che è il più favorevole, i perni presentano le loro sezioni rette ugualmente orientate, vale a dire gli assi maggiori delle due ellissi, sezioni rette dei perni (ritenuti questi perfettamente uguali perchè lavorati insieme), risultano paralleli fra loro.

L'irregolarità di forma nei perni non ha in questo caso influenza nociva nei risultati delle osservazioni, inquantochè riesce sempre possibile rendere l'asse della livella parallela all'asse $0_1$ $0_2$ dei perni.

Il solo inconveniente che si manifesta in questo caso si è che movendo il cannocchiale in altezza per collimare a punti situati a distanze zenitali variabili una dall'altra, e supposto che la superficie avvolgente le due ellissi appoggi sopra di un piano AB orizzontale, l'asse $0_1$ $0_2$ di tale superficie non rimane fisso, ma si sposta parallelamente a se stesso mantenendosi perciò costantemente orizzontale.

Il massimo spostamento di tale asse sarà dato dalla differenza dei due semidiametri dell'ellisse sezione retta dei perni, ed in pochissimi casi potrà riuscire nocivo nei risultati delle osservazioni (*).

2° I perni possono riuscire disposti colle sezioni rette non

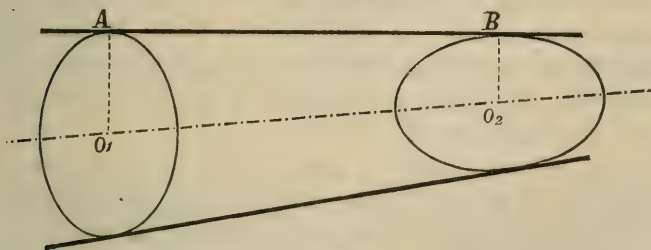



Fig. 5.

ugualmente orientate fra loro (fig. 5) (questo è il caso più generale che si presenta nella pratica) e perciò della superficie

(*) Infatti se indichiamo con $z$ la distanza zenitale di un punto collimato situato alla distanza D dal centro del circolo verticale di un teodolite, e con $\epsilon$ l'angolo formato dalle due rette che dall'oggetto vanno ai centri $0_1$ e $0_2$ si ha:

$$\epsilon = \frac{(a - b) \cdot \operatorname{sen} z}{D \cdot \operatorname{sen} 1''}$$

nella quale $a$ e $b$ rappresentano i semiassi della ellisse che costituisce la sezione retta dei perni. Supponendo che sia $a - b = 0^m,0005$; $D = 100^m$; $z = 90°$ si ha che $\epsilon = 1'',03$. Però nelle osservazioni geodetiche ed astronomiche nelle quali si ha per D un valore quasi sempre grandissimo, il valore di $\epsilon$ riesce per lo più trascurabile.

che li avvolge sarà possibile ridurre orizzontale la generatrice superiore AB d'appoggio della livella sui perni, e l'asse $0_1\, 0_2$ risulterà inclinato all'orizzonte.

Muovendo il cannocchiale in altezza per collimare a punti di differente distanza zenitale, l'asse $0_1\, 0_2$ si sposterà continuamente variando la sua inclinazione; il che è quanto dire che non si riuscirà mai a mantenere centrata la bolla durante il cullamento della livella sui perni, inquantochè le successive generatrici di contatto della livella coi perni non sono fra loro parallele, e non sarà nemmeno possibile dedurre con sicurezza se lo spostamento della bolla è dovuto all'essere l'asse della livella sghembo con quello dei perni oppure all'essere questi a sezione retta non circolare.

Perciò questo caso, che è il più generale in pratica, è anche il più nocivo.

Evidentemente in entrambi i casi ora considerati, allorchè gli appoggi della livella sui perni (nonchè quelli dei cuscinetti) sono foggiati ad arco di circolo (fig. 1ª) oppure a faccie piane orizzontali (fig. 3ª), l'asse $0_1\, 0_2$ cambia di posizione per ogni inclinazione del cannocchiale.

*Si tratta di esaminare se è possibile far sì che nei due casi ora considerati l'asse* $0_1\, 0_2$ *possa rimanere fisso per qualsiasi inclinazione del cannocchiale, e nel caso 2° vedere se è anche possibile di rendere l'asse della livella parallelo all'asse* $0_1\, 0_2$ *quando anche i perni abbiano sezioni ellittiche disposte in modo che la superficie che li avvolge non risulti a generatrici parallele.*

Consideriamo perciò la fig. 6ª: le rette PM e PN rappresentino schematicamente l'estremità delle braccia di una livella mobile: l'ellisse segnata in figura indichi la sezione retta di ciascuno dei due perni dell'albero di rotazione di un teodolite. Le rette QR e QS rappresentino invece i sopporti dell'albero ora detto.

Il problema che trattasi di risolvere consiste nel cercare il valore che devono avere gli angoli $MPN = \alpha$ e $RQS = \beta$ affinchè rotando comunque l'ellisse nel suo piano, e quindi il cannocchiale attorno al suo centro 0, i vertici P e Q rimangano fissi, e viceversa movendo la forcella MPN mantenendo costan-

temente le faccie MP ed NP a contatto del perno, il vertice P si mantenga costantemente alla medesima distanza dal punto 0, cioè il vertice P descriva una circonferenza di centro 0.

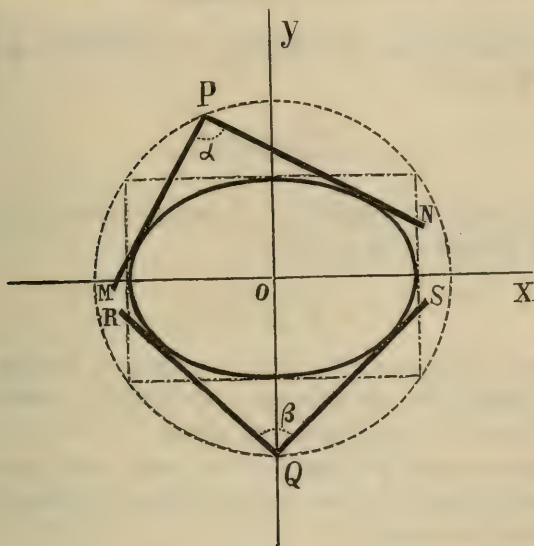



Fig. 6.

Se indichiamo con $a$ e $b$ i semidiametri di una ellisse, e con $n$ il coefficiente angolare di una tangente ad essa, si può esprimere l'equazione della tangente nel seguente modo:

$$Y = nX \pm \sqrt{a^2n^2 + b^2}.$$

Se poniamo la condizione che la tangente passi per un punto P di coordinate $x$ ed $y$ dovrà essere:

$$y = nx \pm \sqrt{a^2n^2 + b^2}.$$

Questa equazione può essere scritta anche così:

$$n^2(a^2 - x^2) + 2nxy + (b^2 - y^2) = 0$$

la quale rispetto ad $n$ rappresenta un'equazione di secondo grado le cui radici dànno le direzioni delle due tangenti condotte all'ellisse per il punto P.

Volendo che il punto P si mantenga costantemente sopra di una circonferenza di centro 0, dovrà essere

$$x^2 + y^2 = \text{costante}.$$

Si vede facilmente che affinchè sia soddisfatta questa condizione deve essere:

$$\frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2} = -1$$

od in altre parole gli angoli α e β devono essere retti.

In tale ipotesi si ha quindi:

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

il che significa che essendo retto l'angolo α, il vertice P ha per luogo geometrico una circonferenza di centro 0, circoscritta al rettangolo costruito sugli assi dell'ellisse.

Ne segue che se gli angoli α o β sono retti, comunque si faccia girare l'ellisse nel suo piano attorno al centro 0, i punti P e Q non si spostano.

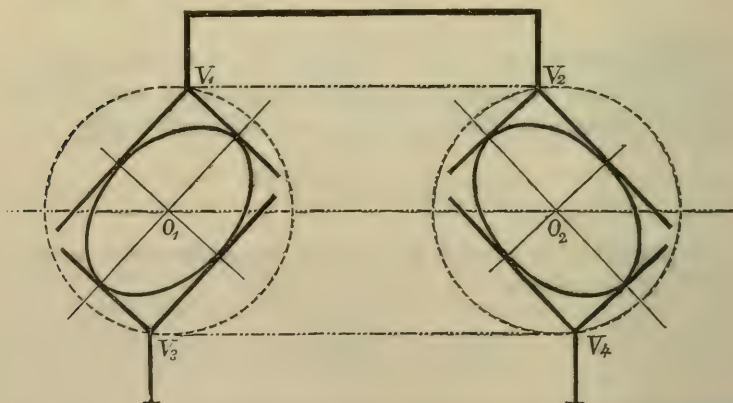



Fig. 7.

*Se adunque i perni dell'albero di rotazione orizzontale di un teodolite non sono circolari, ma hanno per sezioni rette delle ellissi uguali fra loro, quand'anche essi non siano bene orientati sull'albero di rotazione (vedi fig. 7ª) si può fare in modo che l'asse* $0_1\ 0_2$

*risulti fisso e costantemente parallelo alle rette* $V_1, V_2$; $V_3, V_4$ *che uniscono i vertici delle forcelle d'appoggio della livella e dei sopporti, purchè queste forcelle abbiano ciascuna l'apertura di* 90°.

Se le sezioni rette dei due perni non sono circoli od ellissi, saranno delle ovali, ed in ogni caso le forcelle a V ora dette sono sempre da preferire a quelle circolari.

Segue inoltre che sono da ritenere dannosi i mezzi meccanici applicati in molti teodoliti nei quali la correzione dell' albero di rotazione orizzontale, nonchè quella della livella a cavalcione sul detto asse, si fa alterando con viti a contrasto l'angolo delle forcelle che costituiscono i sopporti dei perni o le estremità delle braccia della livella.

Sino ad ora si è supposto che i perni adattati a ciascuna delle due estremità dell'albero di rotazione di un teodolite avessero per sezione retta una medesima ellisse: ma quand' anche ciò non fosse, adottando la disposizione delle forcelle a 90° tanto per la livella quanto per i sopporti dei perni, è evidente che facilmente si riesce a distinguere in qual caso l' asse della livella e quello dell' albero sono sghembi fra loro oppure sono compiani ma inclinati l'un l'altro.

Infatti, se le sezioni rette dei due perni sono due ellissi differenti fra loro, quand'anche non risultino ugualmente orientati sull'albero di rotazione, la retta $V_1 V_2$ che unisce i vertici delle forcelle che terminano le braccia della livella si potrà sempre ridurre ad essere la generatrice della superficie avvolgente due circoli situati in piani paralleli e normali all'asse $O_1 O_2$ che unisce i loro centri, circoscritti rispettivamente ai rettangoli aventi per lati gli assi delle due ellissi.

A tal fine basterà agire sulle viti laterali che spostano la livella nella propria armatura, finchè la bolla si sposti costantemente da una medesima parte comunque si culli la livella.

Soltanto allora si potrà essere certi che l'asse della livella e quello dei perni giaciono in uno stesso piano, e lo spostarsi della bolla sempre da una medesima parte rispetto all'osservatore, indicherà con certezza che le sezioni rette dei due perni non sono uguali.

Tutto quanto si è precedentemente esposto è naturalmente applicabile anche ai livelli a cannocchiale amovibile, e siccome nelle livellazioni di precisione i livelli ritenuti migliori sono quelli a cannocchiale mobile con una livella fissa al cannocchiale ed un'altra mobile sul cannocchiale stesso (*), converrà anche in questi strumenti dare alle forcelle d'appoggio del cannocchiale, nonchè alle estremità delle braccia della livella mobile, la foggia a V ad angolo retto.

Possiamo quindi concludere che adottando la disposizione ora indicata, l'esame dei perni dell'albero di rotazione orizzontale di un teodolite, che molto interessa gli astronomi, nonchè quello dei collari di un livello a cannocchiale adoperato nelle livellazioni geometriche, risulta di molto semplificato.

Torino, 1° ottobre 1897.

---

## *Sulle emanazioni vulcaniche dell'età presente nella campagna romana;*

Nota del Dott. G. B. RIZZO.

> On peut former une série unique, par des transitions nombreuses, depuis les sources chaudes, les geyser et les soffioni, jusqu'aux solfatares et aux volcans proprement dits.
>
> A. Daubrée, *Les eaux souterraines à l'époque actuelle*, t. II, p. 216.

### I.

L'Italia possiede uno dei più attraenti distretti vulcanici che occupa la maggior parte della provincia romana e si estende fino alle parti meridionali della penisola. I geologi sogliono dividere questo grande sistema in diversi gruppi, che prendono il loro nome dall' antico vulcano di Bolsena, dal Cimino,

(*) Cfr. Vogler, nella " Zeitschr. für Vermess. ", 1877.

da quello di Bracciano ecc. E questi si distinguono gli uni dagli altri non solamente perchè in ciascuno di essi le bocche vulcaniche sembrano veramente raggruppate fra di loro, ma perchè le massime intensità della potenza eruttiva si manifestarono successivamente nei diversi gruppi, dando origine a delle formazioni ben distinte.

Ora questa attività non può dirsi affatto spenta, neppure nei sistemi più antichi, perchè in tutta la campagna Romana sono frequentissime le sorgenti termali e gasose; e si hanno qua e là dei veri getti di gas e di vapori che erompono dagli antichi crateri, oppure segnano il confine delle formazioni vulcaniche, ultime manifestazioni di quelle energie alle quali si devono gli enormi ammassi di trachiti, di basalti, di lave e di tufi, che costituiscono buona parte del territorio di Roma e dei paesi vicini.

L'esame di tali emanazioni gasose è pieno di attrattive per i fisici e per i chimici, ma interessa anche da vicino i geologi, perchè se ne possono trarre delle conseguenze importanti per la teoria generale del vulcanismo. Ed è notevole che appunto oggi, allorchè si fa più necessaria la divisione del lavoro scientifico, o come si dice, la specializzazione, vi sono dei campi di studio come questo, in cui la geologia, la chimica e la fisica concorrono insieme alla risoluzione dei più importanti problemi.

In nessun'altra regione meglio che nella nostra risulta chiaramente dimostrata la *continuità* dei fenomeni vulcanici. Quivi infatti le poderose eruzioni che nei tempi più antichi hanno agitato i luoghi dove ora sorge il Monte Amiata, seguendo la grande linea di frattura parallela all'Appennino, hanno invaso successivamente il territorio di Bolsena, il Cimino, Bracciano, il Lazio; poscia giunsero agli Ernici e a Roccamonfina; ed ora il massimo dell'attività endogena occupa il territorio di Napoli e le adiacenze, dove ha la sua più grande manifestazione nel Vesuvio.

E siccome le emanazioni di gas e di vapori e le sorgenti termali sono gli ultimi fenomeni dell'attività vulcanica, così lo studio comparativo di queste emanazioni serve a stabilire la relazione che passa fra i caratteri delle emanazioni medesime e l'antichità delle formazioni a cui appartengono, la qual cosa è molto utile per fare la storia dei fenomeni endogeni, e può anche fornire dei dati preziosi intorno alle attuali condizioni degli strati profondi della crosta terrestre.

Ma recentemente lo studio accurato delle sorgenti termali e delle emanazioni gasose del suolo ha raggiunto una nuova importanza sotto un aspetto diverso.

Sul cominciare dell'anno 1895 il prof. Ramsay (1) aveva scoperto che trattando con acido solforico diluito la polvere di cleveite (un minerale d'uranio, varietà di uraninite, trovato in Norvegia dal Nordenskjöld) si ottiene un gas, il quale, anzi che essere azoto, come prima aveva supposto l' Hillebrand (2); oltre ad una piccola quantità di argon, contiene ancora un gas che dà tra le altre, allo spettroscopio, una riga gialla, $\lambda = 587.49$, coincidente colla $D_3$ dello spettro solare: e concluse che quel gas doveva essere lo stesso *helium* dell'atmosfera del sole.

La scoperta commosse vivamente tutti gli scienziati, i quali, per non parlare della soddisfazione che reca sempre ogni nuovo progresso, erano lieti che si fosse trovato fra gli elementi che compongono la superficie della terra anche quel misterioso *helium* che fino allora erasi creduto appartenesse soltanto al sole.

Ma se al chimico inglese spetta il merito di aver fatto conoscere molte proprietà del nuovo gas, spetta senza dubbio al nostro compianto Palmieri la gloria di averne pel primo rivelato l'esistenza sulla superficie terrestre. Infatti in una nota da lui pubblicata nell'anno 1881 (3) egli scriveva: " ..... raccolsi una sostanza amorfa di consistenza butirracea e di color giallo sbiadito sublimata sull'orlo di una fumarola prossima alla bocca di eruzione. Saggiata questa sublimazione allo spettroscopio, ho ravvisato le righe del sodio e del potassio e una riga lineare ben distinta che corrisponde esattamente alla $D_3$ che è quella dell'*helium* „.

Il Ramsay e il Lockyer fecero numerosissime ricerche in-

---

(1) W. Ramsay, *Helium, a gaseous constituent of certain minerals*, " Proc. R. S. „, LVIII, pag. 81, 1895. La Cleveite è propriamente un uranato di piombo contenente delle terre rare.

(2) W. F. Hillebrand, *On the accurence of Nitrogen in Uraninite*, " Bull. of the U. S. Geological Survey „, n. 78, p. 43.

(3) L. Palmieri, " Rendic. dell'Accad. delle Sc. Fis. e Mat. di Napoli „, t. XX, p. 233, 1881.

torno al nuovo gas (1), e si trovò che, sebbene la cleveite sia finora il minerale più ricco di helium, perchè da un grammo di minerale se ne possono ricavare 7.2 $cm._3$, tuttavia in proporzioni minori esso è molto diffuso: un grammo di broggerite ne contiene 1 $cm.^3$, la samarskite 0.6, la fergusonite 1.1 $cm.^3$ per ogni grammo.

La columbite (una varietà di tantalite, che è un miscuglio isomorfo di niobato e di tantalato di ferro e di manganese) dà per ogni grammo 1.3 $cm.^3$ di un gas che è quasi tutto helium.

In generale all'helium non trovasi associato l'argon, se si hanno le precauzioni necessarie per non introdurne coll'aria; solo in un solfato di zirconio proveniente da Hitteroe in Norvegia se ne trovò una quantità notevole.

Più ricche di argon sono le sorgenti termali, come hanno dimostrato il Ramsay stesso e il Bouchard (2). Le sorgenti minerali degli alti Pirenei, e specialmente quelle che contengono dei solfuri, sono note per contenere molto azoto, ma vi si trovano eziandio in gran copia l'argon e l'helium. L'analisi spettroscopica ha dimostrato che i gas svolti nelle acque della sorgente di *Raillère* contengono dell'argon e sono ricchissimi di helium, così quelli della sorgente *des Oeufs* ne hanno ancora delle quantità notevoli, mentre nei gas delle sorgenti *Espagnol* e *Caesar* le righe gialle e verdi dell'helium si vedono più difficilmente.

Appena si ebbe notizia delle ricerche del Ramsay e del Lockyer, il prof. Nasini incominciò tosto fra noi ad esaminare diverse emanazioni gasose d' Italia e sta ora compiendo un grande lavoro su questo argomento. Alla sua cortesia devo la notizia che nei gas dei soffioni boraciferi del Sarderello abbondano tanto l'argon quanto l'helium.

Il rapido progredire di queste ricerche ne dimostra la singolare importanza; e certamente anche per lo studio dei fenomeni endogeni considerati in sè stessi riescono di grande interesse, perchè, come risulta specialmente dai lavori del Ramsay, i nuovi gas trovansi associati ai minerali che li contengono in

---

(1) W. Ramsay a. M. W. Travers, *The gaseous constituents of Certain Mineral Substances and Natural Waters*, " Proc. R. Soc. „, LX, p. 442, 1897. — J. N. Lockyer, " Proc. R. Soc. „, LIX *passim*, 1896.

(2) Dr. H. C. Bouchard, " C. R. „, t. 121, p. 392, 1897.

modo analogo a quello con cui l' idrogeno si trova associato a diversi metalli e in determinate condizioni l'ossigeno all' argento; laonde ogni progresso intorno all'argon e all'helium è un progresso per la chimica e per la fisica dell' interno del globo.

## II.

Mi sono proposto di studiare sistematicamente le emanazioni gasose della provincia di Roma per cercare se vi siano l'argon e l'helium, per determinare quali relazioni passino fra le emanazioni appartenenti ai medesimi gruppi vulcanici, e infine per vedere se vi siano qui le tracce di quel *gas non ancora scoperto*, che secondo il Ramsay (1) dovrebbe avere il suo posto fra l'helium e l'argon, col peso atomico di 20 all'incirca.

In questa breve nota rendo conto dei risultati ottenuti esaminando i gas che si sprigionano dalle acque del *Lago della solfatara* presso Tivoli.

Ho raccolto il gas occorrente per l'analisi riempiendone per spostamento un buon numero di palloncini di vetro, della capacità di 300 e di 250 $cm^3$, che poi chiudevo alla lampada sul posto; e nel laboratorio del prof. Cossa, alla Scuola d'applicazione per gli Ingegneri in Torino, ne sottoposi alcuni ad un'analisi preliminare. Sopra 847 $cm^3$ di gas non ne trovai che 0,12 di acido solfidrico, cioè 0,14 per 1000; facendo quindi assorbire dalla potassa l'anidride carbonica, che è il maggior componente dei gas raccolti, trovai una diminuzione di 732,2 $cm^3$.

Allora raccolsi senz'altro il gas residuo nella campanella destinata all' assorbimento dell' azoto. È una piccola campana, simile a quelle che si adoperano per eudiometro, e munita, presso l'estremità superiore, di due elettrodi di platino affacciati l'uno all'altro alla distanza di 0,75 cm.

Quando si ha sotto la campanella una mescolanza di azoto e di ossigeno in presenza di potassa caustica, che può costituire lo stesso bagno idropneumatico, e si collegano i due elettrodi colle estremità polari di una macchina elettrica ad influenza, oppure

---

(1) W. Ramsay; nel discorso tenuto all'apertura della Sezione B (Chimica) dell'Associazione Britannica in Toronto il 19 agosto 1897.

coi poli di un rocchetto di induzione, l'azoto, al passaggio delle scintille, si combina direttamente coll'ossigeno. Di questo procedimento si valsero già lord Rayleigh e il prof. Ramsay per isolare l'argon dall'azoto atmosferico, e, sebbene sia più lento, è per molti riguardi preferibile al metodo della combustione del magnesio.

Facendo adunque passare nel tubo la scarica di un rocchetto di Ruhmkorff di media grandezza, eccitato di tre coppie Bunsen, si incominciò tosto a vedere una diminuzione di volume nel gas, e continuando l'operazione fino a tanto che non fosse cessata interamente la concentrazione, cioè per 12 ore, alla fine si trovò una diminuzione di 13,21 $cm^3$, dovuta alla combinazione dell'azoto con la piccola quantità di ossigeno che è contenuto nel gas esaminato.

Il residuo gasoso rimasto sotto la campanella non doveva più esser altro che azoto associato con qualche altro gas che non aveva potuto venir assorbito. Per eliminare interamente l'azoto continuai ad applicare il metodo ricordato delle scintille, dopo aver aggiunto a quel residuo una quantità conveniente di ossigeno puro. Quando poi fu completa la combinazione dell'azoto con questo gas raccolsi l'eccesso di ossigeno, insieme con gli altri gas prima associati con l'azoto, in una pipetta contenente una soluzione alcalina di acido pirogallico. Da questa venne interamente assorbito l'ossigeno, lasciando un ultimo residuo gasoso di 0,95 $cm^3$, che venne liberato dal vapor acqueo sopra l'acido solforico concentrato e quindi raccolto sopra un bagno di mercurio.

L'esame spettroscopico di questo gas presentava qualche difficoltà, poichè, essendo così piccola la quantità disponibile, non si potevano applicare i metodi ordinari per riempire dei tubi di Plücker. E non credo neppure che si possa adottare senz'altro il metodo suggerito dal Berthelot (1), che consiste nel fare arrivare il gas da studiarsi in una specie di camera torricelliana munita di elettrodi, perchè in tal modo riesce assai difficile liberarsi intieramente dall'aria atmosferica.

Ma si può conciliare la grande semplicità di questo metodo

---

(1) BERTHELOT, "Ann. de Chim. et de Phys. „, ser. 7, t. XI, p. 43, 1897.

con una notevole precisione nel modo seguente. Si prende una canna barometrica, munita di una porzione capillare, vicino all'estremità chiusa, e senza aggiungervi elettrodi di sorta la si riempie di mercurio. Quindi la si riscalda lentamente con una lampada fino al punto da far bollire il mercurio, e ciò si può fare senza pericolo di rottura, non essendovi degli elettrodi saldati nella canna. Allora questa è priva affatto d'aria e capovolgendola sopra un bagno di mercurio si ottiene nella camera torricelliana un vuoto quasi perfetto.

Con una pipetta si introduce nella canna barometrica così preparata una bollicina del gas da esaminare, e questo va ad espandersi nella camera libera dove si può fargli acquistare la rarefazione che si desidera sollevando, oppure abbassando opportunamente la canna sul bagno di mercurio, il quale perciò deve essere alquanto profondo.

A questo punto basta avvolgere sul tubo di vetro, al disopra e al disotto della parte capillare, due foglioline di stagnola e poi farvi arrivare i poli del rocchetto di induzione, perchè al passaggio della corrente, il gas si illumini di una viva luce che si può esaminare facilmente collo spettroscopio.

L'esame spettroscopico del gas ottenuto dalle emanazioni del lago della Solfatara presso Tivoli, dopo che ne sono stati eliminati l'acido solfidrico, l'acido carbonico, l'ossigeno e l'azoto, dimostra che il residuo è argon; e non vi si osservano le linee caratteristiche dell'helium, nè altre linee che rivelino la presenza di gas non ancora conosciuti.

Sono lieto di poter tributare qui i miei più vivi ringraziamenti al signor Prof. Naccari, il quale mi ha dato i mezzi per fare questo studio, che spero di poter proseguire.

---

*L'Accademico Segretario*
ANDREA NACCARI.

# CLASSE
DI
# SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

## Adunanza del 28 Novembre 1897.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Socii: Claretta, Direttore della Classe, Peyron, Bollati di Saint Pierre, Pezzi, Ferrero, Cognetti de Martiis, Brusa e Nani Segretario.

Aperta la seduta il Presidente dà comunicazione del Regio Decreto 20 luglio 1897, con cui venne approvata l'elezione del Socio Nani a Segretario della Classe per un triennio, in sostituzione del Socio Ferrero, scaduto dalla carica per compiuto sessennio, accompagnando l'annuncio con gentili parole riguardo ad ambedue. L'uno e l'altro ringraziano.

Legge quindi il Segretario l'atto verbale dell'ultima seduta, che viene approvato.

Lo stesso Segretario informa che numerosissime furono le pubblicazioni inviate in dono alla Classe durante le vacanze accademiche, e tra queste segnala in modo speciale le seguenti: *I Reali di Savoia nell'esiglio (1799-1806);* Torino, 1898, del Socio residente Domenico Perrero. — *Foscolo, Manzoni, Leopardi. Saggi;* Torino, 1898, del Socio residente Arturo Graf. — *Contributo al Catalogo generale degli oggetti d'arte e d'antichità della*

*Liguria;* fasc. I e II, del Socio corrispondente Vittorio Poggi. — *Les mines d'or du Jucon - La fin de l'humanité - Unité de l'espèce humaine;* del Socio corrispondente de Nadaillac. — *The Whitney Memorial Meeting* inviato dalla Società orientale americana.

Il Socio Ferrero presenta, a nome degli Autori, *Relazione del Prof.* Giuseppe Gatti *a nome della Commissione archeologica comunale di Roma.* — *Histoire de la Princesse Djouher-Manikam, Roman traduit du Malais par* A. Marre; nonchè una comunicazione fatta alla " Société nationale des Antiquaires de France „ (Séance 17 février 1897), dal sig. E. Michon.

Il Presidente offre, a nome dell'autore Prof. Lando Landucci, la terza ed ultima parte del 1° volume della *Storia del diritto romano*, contenente la storia del diritto penale, colle seguenti parole:

" Ho già avuto l'onore di presentare alla Classe le due prime parti del 1° volume della 2ª edizione della storia del diritto romano del Prof. Lando Landucci della R. Università di Padova. La prima parte si riferiva alla *Storia delle fonti;* la seconda alla *Storia del diritto pubblico;* ed ora di incarico dell'autore presento alla Classe la terza parte ed ultima del primo volume, che contiene la *Storia del diritto penale.*

" Delle varie parti dell'erudita opera del Landucci, questa è certamente quella che ha dovuto costargli maggior studio e fatica. Mentre per le altre due parti egli aveva a sua disposizione una grandissima copia così di trattati generali, che di monografie, per la storia del diritto penale invece se erano abbastanza numerose le trattazioni monografiche, erano ben poche le trattazioni generali e complessive, che avessero tentato di coordinare la difficile ed intricata materia.

" Malgrado di ciò il Landucci è riescito a descrivere con ordine e chiarezza prima lo svolgimento storico del concetto del delitto presso i Romani, poscia quello della pena e da ultimo ha anche delineato brevemente ma perspicuamente le configurazioni speciali dei singoli delitti, prendendo le mosse dalla distinzione fondamentale fra delitti privati e delitti pubblici e discorrendo sopratutto di questi ultimi, perchè a suo

avviso la trattazione dei delitti privati deve essere attribuita alla storia del diritto privato, che farà parte di altro volume.

" Ha poi terminato opportunamente il suo lavoro con uno sguardo sintetico allo svolgimento del diritto penale in Roma, in cui, dopo aver accennato ai caratteri speciali dei varii periodi ed aver accennato alle cause per cui il diritto penale presso i Romani non giunse alla eccellenza del diritto privato e pubblico, cerca tuttavia di mettere in rilievo l'influenza benefica che esercitarono su di esso i Giureconsulti e finisce per conchiudere che anche coi suoi difetti il diritto penale Romano è sempre un punto non indegno di partenza per il diritto penale moderno, e che la conoscenza della sua storia è un preliminare indispensabile per la teoria e la pratica criminale, e deve perciò essere maggiormente curata, che non per il passato.

" Da ultimo vuolsi osservare che il pregio dell'intiera opera è accresciuto dalla limpida prefazione, in cui l' autore spiega l'intento che egli si è proposto, dai copiosi indici sintetici, analitici e dagli autori citati, i quali, mentre agevolano le ricerche agli studiosi, dimostrano anche la copiosa sua erudizione e la ricchissima letteratura, a cui egli ha dovuto attingere per compiere l'opera sua „.

Il Presidente annuncia, oltre il decesso del Socio Tommaso Vallauri, già commemorato nell' adunanza delle Classi Unite, quello del Socio nazionale non residente, Mons. abate D. Luigi Tosti, avvenuto in Montecassino il 24 settembre 1897, e del Socio straniero Alfredo v. Arneth, avvenuto in Vienna il 30 luglio 1897.

Comunica che l'Accademia si associò alle onoranze rese al Prof. C. Francesco Gabba, dell'Università di Pisa, Socio corrispondente, in occasione del 35° anno del suo insegnamento, incaricando il Socio corrispondente Prof. Senatore Francesco Bonamici di rappresentarla; per il che ebbe una lettera di ringraziamento dello stesso Prof. Gabba.

Comunica eziandio che, giusta la deliberazione presa dalla Classe, furono incaricati l'Accademico straniero Prof. Gastone

Maspero ed il Socio corrispondente Aristide Marre di rappresentare l'Accademia all'XI Congresso degli Orientalisti, tenutosi recentemente a Parigi.

Infine il Socio Ferrero legge una sua nota, da inserirsi negli *Atti*, intitolata: *I titoli di vittoria dei figli di Costantino.*

Chiusa l'adunanza pubblica la Classe si costituisce in adunanza privata.

---

Nell'adunanza privata la Classe nomina, in sostituzione del Socio Nani attualmente Segretario, il Socio Ferrero a delegato della Classe nel Consiglio d'Amministrazione.

# LETTURE

## *I titoli di vittoria dei figli di Costantino;*

Nota del Socio ERMANNO FERRERO.

Se scarse sono le iscrizioni, nelle quali al nome di Costantino seguono titoli di vittoria (1), scarsissime sono quelle, in cui i suoi figli fanno uso di titoli sì fatti (2).

Esse si riducono a queste tre sole:

1. *[I]mp(erator) Caes(ar) Constantinus maximus Guth(icus)* (sic) *victor ac trium[f]ator Aug(ustus) et Fl(avius) Cla(udius) Constantinus Alaman(nicus) et F[l(avius) I]ul(ius) Constantius n(o)b(ilissimi) [C]aes(ares)* ecc. — Alikjel (*Orcistus* nella Frigia). *C. I. L.*, III, n. 352 III = 7000 III.

Editto del 30 di giugno 331.

2. *Im[p(eratores) Caes(ares)] Fl(avius) Cl(audius) Constantinus Al[amann(icus) ma]x(imus) G[..........* (3) *et] Fl(avius) Iul(ius) Constantius Sarm(aticus), [P]ersicus [max(imus) et] Fl(avius) Iul(ius) Constans Sarm(aticus) pii felices Aug(usti)* ecc. — Iglitza (*Troesmis*). Tocilescu, nelle *Archaeol.-epigraph. Mittheilung. aus Oesterreich-Ungarn,* XVII, 1894, p. 85 (4).

---

(1) V. la mia nota: *I titoli di vittoria di Costantino,* negli *Atti della R. Acc. delle scienze di Torino,* vol. XXII, p. 657 e segg.

(2) Come per Costantino, così per i suoi figli nessuna moneta reca titoli di vittoria.

(3) Nella lapide pare vi siano traccie delle due lettere XG.

(4) Qualche leggera differenza vi è nell' edizione di questo testo epigrafico data dal Toutain nei *Mél. d'arch. et d'hist.*, XI, 1891, p. 243 (cfr. Dessau, *Inscr. sel.*, n. 724), da una copia non definitiva fornitagli dallo stesso Tocilescu.

Questa iscrizione, che ricorda lavori di difesa sul confine della Mesia inferiore, fu posta tra la fine del 337 (i figli di Costantino assunsero il titolo di Augusti il 9 di settembre di quest'anno) ed il principio della primavera del 340, in cui perì Costantino II.

3. *Imp(erator) Caes(ar) Fla(vius) Iul(ius) Constantius pius fel(ix) Aug(ustus) victor maximus, triumfator aeternus, Divi Constantini optimi maximique principis (f(ilius)), Divorum Maximiani et Constanti(i) nepos, Divi Claudi(i) pronepos, pontifex maximus, Germanicus, Alamamnicus* (sic) *maximus, Germ(anicus) max(imus), Gohticus* (sic) *maximus, Adiabin(icus)* (sic) *max(imus), tribuniciae potestatis XXXI, imp(erator) XXX, consuli* (sic) *VII, p(ater) p(atriae), proconsuli* (sic) ecc. — Milliario. Mitrovic' (*Sirmium*). *C. I. L.*, III, n. 3705; cf. p. 10617 ed *Ephem. epigr.*, II, n. 746.

Dopo il 1° gennaio 354, in cui principia il settimo consolato di Costanzo, e prima dell'8 di novembre del medesimo anno, in cui per questo principe ricorse la trigesimaprima salutazione imperatoria.

Costantino il giovane, ancora Cesare, nel 331 è detto *Alamannicus*. Costanzo è sprovvisto di titoli: Costantino padre usa quello di *Gothicus*. Padre e figlio hanno titoli diversi: quegli mai non fu detto *Alamannicus*, quantunque abbia dato sconfitte agli Alamanni; con tutta probabilità l'appellazione di *Germanicus* per lui, come per altri imperatori precedenti, servì a designare le vittorie su questo popolo e sui Franchi (1). È ignota l'impresa, che fece meritare al Cesare il suo titolo: di lui conosciamo la vittoria sui Goti del 20 di aprile 332 (2); conviene quindi anticipare il principio della sua vita militare, dappoichè, come sembra, in questo tempo, a differenza del passato, i titoli di vittoria non si assumevano più anche per trionfi di colleghi, ma si usavano soltanto per proprie imprese. Già Costantino,

(1) V. *Atti* cit., p. 662.
(2) *Consul. Const.*, ad a., in *Chron. min.*, ed. Mommsen, t. I, p. 234.

che, in principio del regno, si attribuiva o si lasciava dare i titoli, che suo padre ebbe comuni con gli altri membri della tetrarchia dioclezianea, più tardi non adopra che quelli derivanti dalle sue vittorie. È però facile indovinare la parte di comandante solamente di nome, che il Cesare giovanetto (1) ha avuto in tali guerre: a Costantino premeva porre presto in vista i suoi figli non solo negli onori e nell' amministrazione, ma anche nella guerra (2).

L'iscrizione dei tre fratelli Augusti scoperta a Troesmis (n. 2) (3) doveva contenere un altro titolo di Costantino II, di cui resta solo l'iniziale, che, meglio di *G*[*erm*(*anicus*)], come propose l'editore, crediamo sia quella di *G*[*oth*(*icus*)], epiteto ricordante la vittoria del 332.

In questa medesima iscrizione Costanzo è detto *Sarmaticus, Persicus maximus,* Costante solamente *Sarmaticus.* Quegli ha lottato coi Persiani sin dal principio del suo regno. E sebbene non si abbia memoria d'imprese delle sue armi e di quelle di Costante contro i Sarmati, tuttavia si può benissimo supporre che presto essi od i loro generali abbiano dovuto guerreggiare

---

(1) Nel 331 egli aveva soltanto quindici anni; poichè sembra sia nato nel 316. Aurelio Vittore (*Epit.*, XLI, 4) e Zosimo (II, 20) dicono che era appena nato, quando fu creato Cesare (1° marzo 317): conviene tuttavia collocarne la nascita nell'anno prima, poichè, il 7 d'agosto 317, sua madre generò un altro figlio, Costanzo, il cui anno di nascita si desume da Ammiano Marcellino (XXI, 15), che gli dà quarantaquattro anni e pochi mesi alla morte avvenuta sulla fine del 361, e il giorno si ha nei fasti Filocaliani (*C. I. L.*, I, 2ª ed., p. 255, 268; cf. p. 302), secondo cui si devono correggere quelli di Polemio Silvio (*ibid.*, p. 269) e la c. 10 Cod. Th. (VI, 4).

(2) Costanzo aveva sette anni quando fu fatto Cesare nel 324; Costante dieci (cfr. Aurelio Vittore, *Epit.*, XLI, 9) o tredici (cf. Eutropio, IX, 9), allorchè fu assunto alla stessa dignità nel 333. Costantino giovane è console prima dei quattro anni (320) e Costanzo prima dei nove (326). Quando Costantino spartì il governo delle provincie tra i suoi figliuoli nel 335, il primo aveva diciannove anni, il secondo diciotto, e Costante quindici o appena dodici. Non si sa la data della nascita di Crispo: certo egli era assai giovane quando già guerreggiava contro i Franchi prima del 321 (Nazario, *Paneg.* X, 36) e giovanissimo quando divenne Cesare con Costantino II e con Licinio figlio. Cf. Seeck, *Gesch. des Untergangs der antiken Welt*, t. I, Berlin, 1895, p. 442.

(3) Si noti che nell'editto di Spello del 333-337 (*C. I. L.*, XI, n. 5265) i tre figli di Costantino non hanno titoli di vittoria, mentre ne ha il padre.

con quelle popolazioni, che con significato assai largo i Romani chiamavano *Sarmatae* (1), e le quali appunto si trovavano presso i confini di provincie amministrate dai due fratelli. Costante in fatti aveva avuto l'Illirico, e nei nuovi accordi tra i fratelli, dopo la morte di Costantino e l'uccisione di Delmazio e di Annibaliano, a cui erano pure toccate provincie da governare, sembra che la Tracia, già di Delmazio, sia passata a Costanzo (2).

Nel 354 Costanzo ha cambiato i suoi titoli: nel milliario di Sirmio egli è *Germanicus, Alamannicus maximus, Germanicus maximus, Gothicus maximus, Adiabenicus maximus*: non più *Sarmaticus* e *Persicus,* salvo che il primo titolo si celi in uno dei due *Germanicus*: l'epigrafe è scorretta, ed un *Germ(anicus)* per *Sarm(aticus)* non è errore tanto straordinario. Nelle spedizioni contro i Persiani, che si ripetono ogni anno in Mesopotamia dal principio dell'impero di Costanzo sino al 350, per riprendersi alla fine di esso, è possibile qualche punta nell'Adiabene (3), onde il titolo di *Adiabenicus* sostituito a quello di *Persicus.*

Nel 354 Costanzo ha riunito tutto l'impero sotto la sua potestà, obbligando Vetranione, che, alla morte di Costante, si era fatto gridare imperatore nell'Illirico, a rinunciare alla porpora (350), e sconfiggendo Magnenzio (351-353), che si era impadronito delle altre provincie dell'Occidente, già di Costante, e per difendersi si era valso pure di aiuti datigli da genti germaniche (4). Nella primavera di quest' anno Costanzo ha condotto una spedizione contro Gundomado e Vadomario, re degli Alamanni, e concesso loro la pace (5). Di qui chiara la ragione

---

(1) Cf. Mommsen, *Röm. Gesch.*, t. V, p. 221 e segg.

(2) Schiller, *Gesch. der römischen Kaiserzeit*, t. II, p. 229.

(3) Libanio (*Or.* III, p. 123 e seg.) parla di una città appartenente ai Persiani, sorpresa da Costanzo, che ne trasportò gli abitanti nella Tracia; ma non dice dove si trovava. Giuliano (*Or.* I, p. 22) accenna a passaggi del Tigri nella guerra del 338.

Nei fasti di Polemio Silvio (*C. I. L.*, I, 2ª ed., p. 257, cf. p. 309; mancano in quelli di Filocalo, come pare, per sola ommessione di scrittura) sono indicati, al 31 di gennaio: *circenses Adiabenis victis.* Questi ludi sono stati istituiti per la vittoria adiabenica, a noi sconosciuta, di Costanzo II, ovvero commemorano le conquiste transtigrine nella guerra persiana condotta nel 297 da Diocleziano e da Galerio, che si dissero pure *Adiabenici*?

(4) Giuliano, *Or.* I, p. 34 e seg.

(5) Ammiano Marcellino, XIV, 10.

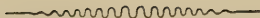
dei titoli di *Germanicus* e di *Alamannicus* nell'iscrizione sirmiense; oscura rimane quella di *Gothicus*, non avendosi ricordo di guerre coi Goti combattute da Costanzo, il quale anzi, al principio del suo regno, li ebbe ausiliarii, nella guerra persiana (1).

(1) Libanio, *Or.* III, p. 126. — Il Mommsen, commentando il titolo sirmiense (*Bull. dell'Inst. di corr. arch.*, 1868, p. 142; *C. I. L.*, III, n. 3705), ha creduto che i titoli di Costanzo fossero disposti in ordine cronologico, ed attribuendo quello di *Adiabenicus* alla guerra di Mesopotamia nel 338 e quello di *Gothicus* alla vittoria del 332, ha giudicato gli altri appartenere a guerre non abbastanza note fra il 324 e il 332. Ciò, come si vede, è contraddetto dall'epigrafe di Troesmis posteriormente scoperta.

*L'Accademico Segretario*
CESARE NANI.

Torino — VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

# CLASSE

DI

## SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

### Adunanza del 5 Dicembre 1897.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ALFONSO COSSA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

---

Sono presenti i Socii: D'Ovidio, Direttore della Classe, Salvadori, Bizzozero, Mosso, Spezia, Camerano, Segre, Volterra, Jadanza, Foà, Guareschi, Fileti e Naccari Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della precedente seduta.

Il Presidente partecipa la morte del Socio corrispondente Alberto Schrauf, Professore di Mineralogia nell'Università di Vienna. Il Presidente prega il Socio Spezia di fare in altra seduta un cenno commemorativo dell'illustre defunto.

Il Socio Segre presenta una nota del Dott. Beppo Levi, sulla *Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche.*

Il Socio Fileti presenta una nota del Dott. Giacomo Ponzio, intitolata: *Sull'ossidazione delle idrazossime.*

Ambedue queste note saranno inserite negli *Atti.*

# LETTURE

## *Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche;*

Nota di BEPPO LEVI, a Torino.

In un lavoro recentemente apparso negli " Annali di Matematica „ (¹) ho studiato il modo di trasformarsi di un punto singolare di una superficie algebrica dello spazio ordinario per una successione di trasformazioni quadratiche, quando si assumano il punto stesso e i suoi trasformati successivi (o meglio i punti di una determinata — ma arbitraria — successione di trasformati del punto considerato) come punti fondamentali isolati delle trasformazioni successive: ed ho fissato quando e in qual senso si può dire che si ottiene in tal modo una riduzione della singolarità. Con ragionamenti analoghi a quelli usati quivi si può dimostrare la possibilità di risolvere tutte le singolarità puntuali d'una superficie con trasformazioni birazionali della medesima; di costruire cioè una superficie (dello spazio ordinario) che si possa riferire algebricamente e biunivocamente alla data, e che non abbia altre singolarità che una linea doppia biplanare con un numero finito di punti cuspidali ordinari (²) per la superficie e ordinari per la linea, e un numero finito di punti tripli ordinari (cioè a tangenti distinte) per la linea e tripli e triplanari per la superficie (e, si può anche chiedere, tale che

(¹) Levi, *Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche dello spazio ordinario per trasformazioni quadratiche.* Memoria 1ª. " Annali di Matematica „, (2), XXVI, 1897, p. 221. Mi permetterò di ricordare brevemente questa memoria con: *A*.

(²) Cioè punti che siano cuspidi ordinarie sulle sezioni piane generiche della superficie, passanti per essi.

ai punti singolari della superficie data corrispondano solo punti semplici della nuova superficie) [1].

Questo mi propongo di dimostrare nella presente nota.

Adoprerò soltanto trasformazioni Cremoniane; quindi mi esimo dal ripetere l'aggettivo.

## § 1.

1. — Farò uso della seguente proposizione che mi riservo di dimostrare altrove (anche più completa): Si consideri una superficie F dello spazio [2] Σ e in essa un punto singolare A,

---

[1] Molti autori si sono già occupati di questo problema, o di quello equivalente (cfr. n. 3) di risolvere le singolarità delle superficie con trasformazioni birazionali dello spazio. Ricordo, tacendo dei lavori in cui si analizzano solo particolari singolarità, Del Pezzo, *Estensione di un teorema di Noether*, " Rend. Circ. Mat. Palermo ", II, 1888, e *Sui punti singolari delle superficie algebriche*, id., VI, 1892. — Segre, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*, " Annali di Matematica ", (2), XXV, 1896. — Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques des deux variables*. T. I, p. 77. Paris, Gauthier-Villars, 1897. Nessuno però giunse alla completa dimostrazione della resolvibilità del problema. — Non è necessario ricordare che si può supporre la superficie data immersa in uno spazio qualunque, anche quando, come io farò, si ragioni soltanto su superficie dello spazio ordinario, poichè una proiezione riconduce dall'un caso all'altro; che inoltre ridotta la superficie ad una, dello spazio ordinario, con sole singolarità ordinarie quali ho ricordate nel testo, risulta pure provata la possibilità di ricondurla ad una superficie iperspaziale (e precisamente di un $S_5$) con soli punti semplici: determinata una trasformazione algebrica (non birazionale) dello spazio che muti la superficie data nella sua trasformata con sole singolarità ordinarie definita nel testo, basterà costruire il sistema lineare somma del sistema dei piani dello spazio di una di queste superficie e del sistema delle superficie di questo spazio, imagini dei piani dell'altro, e riferirlo proiettivamente al sistema degl'iperpiani di un conveniente spazio per ottenere definita in questo una superficie priva di punti multipli e biunivocamente riferita alla data (cfr., per un ragionamento analogo, il n° 4. — V. pure Picard et Simart, l. c., p. 79). Una proiezione conduce da questa alla richiesta superficie in un $S_5$. Il ragionamento del n° 4 si applica d'altronde direttamente alla determinazione di questa superficie senza passare per quella in $S_3$.

[2] Il teorema si estende alle varietà qualunque immerse in uno spazio di dimensione qualunque: io ne farò uso per quanto si riferisce alle superficie e alle curve dello spazio ordinario e del piano. Per le curve valgono gli enunciati del testo (relativi alle superficie) mutandovi le parole " un

e per questo un ramo arbitrario $\gamma$ tracciato su F: è definita una successione di numeri $s, s', s'', \ldots$, multiplicità per F dei punti successivi di $\gamma$ (1); dirò brevemente che $s, s', s'', \ldots$ sono le *multiplicità di composizione di* A *su* F *lungo il ramo* $\gamma$ (2). Orbene, si assoggetti $\Sigma$ ad una trasformazione $\Theta$ (3) che lo muti nello spazio $\Sigma'$ in cui ad F corrisponda F' e a $\gamma$, $\gamma'$:

1° A non sia punto fondamentale (isolato o non) della trasformazione, nè appartenga alle varietà fondamentali di questa; gli corrisponderà un unico punto A', origine di $\gamma'$, e le multiplicità di composizione rispettivamente di A e di A' su F e F' lungo $\gamma$ e $\gamma'$ sono uguali (4); dirò, per brevità di linguaggio, che *le singolarità di* F *e di* F' *in* A *e* A' *sono simili* (5); dirò inoltre

---

ramo $\gamma$ tracciato su F „ in “ un ramo $\gamma$ di F „, ove si indichi ancora con F la curva. Si deve notare che nel piano è privo di senso l'enunciato analogo al 3° del testo.

(1) Cioè dell'origine di $\gamma$ e delle origini dei rami trasformati di $\gamma$ con una successione di trasformazioni quadratiche aventi ciascuna il punto fondamentale nell'origine del ramo ultimo trasformato e il cono fondamentale non tangente a $\gamma$ in questo punto. Cfr. (anche per le curve dello spazio): Segre, *Sulla scomposizione ecc.*, “ Ann. di Mat. „, (2), 25-1896; per le curve piane: Noether, *Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function u. d. sing. Punkte einer alg. Curve*, “ Math. Ann. „, 9-1875.

(2) Locuzione che non differisce sostanzialmente da quelle usate già da altri autori. Cfr. p. e. Segre, l. c.

(3) Potrebbe anche supporsi la trasformazione semplicemente algebrica (non birazionale). Detta allora A' l'origine di $\gamma'$ dovrebbe, *in generale*, supporsi che nè A nè A' appartenessero alla Jacobiana della trasformazione (del rispettivo spazio), se A non è fondamentale; e che, se A è tale, $\gamma$ non sia tangente alla Jacobiana stessa.

(4) Questa parte della proposizione è implicitamente supposta vera in molti lavori precedenti, almeno per la forma sotto cui si presentano molti enunciati; perchè, quando si parla p. e. dell'influenza dell'insieme di più punti singolari p. e. sulla classe di una curva piana, si suppone implicitamente che, mentre si trasforma un punto singolare, i rimanenti si mutino in altri aventi la stessa composizione, cfr. p. es. Noether, l. c.

(5) Più volte, da vari autori, sono state paragonate le singolarità delle varietà algebriche con concetti diversi, e si è parlato di singolarità uguali e simili. Per le curve piane si tratta generalmente di paragonare le successive multiplicità di composizione e le diramazioni (cfr. p. e. De Franchis, *Sopra una teoria geometrica delle singolarità di una curva piana*, p. 48-49, “ Rend. Circ. Mat. Palermo „, t. XI, 1897). Per le superficie sono state considerate singolarità uguali p. e. dai sigg. Del Pezzo, Guccia, Castelnuovo; ma nè la definizione che il prof. Del Pezzo dà dell'ugual singolarità di uno

*simili rispetto a un ramo* $\gamma$ (*o a due rami* $\gamma$ *e* $\gamma'$ trasformati l'uno dell'altro nel modo qui considerato) *due trasformazioni o successioni di trasformazioni che trasformino* A, *come origine di* $\gamma$, (*o i punti* A *e* A' *di singolarità simili, come origini rispettivamente di* $\gamma$ *e di* $\gamma'$) *in punti di singolarità simili.*

2° A sia punto fondamentale isolato ordinario (¹) di $\Theta$ e le superficie fondamentali per esso non siano tangenti a $\gamma$; ad A, come origine di $\gamma$, corrisponda A', origine di $\gamma'$: le multiplicità di composizione di A' su F' lungo $\gamma'$ sono $s'$, $s''$, ... (²); e ogni altra trasformazione che abbia anch'essa A come punto fondamentale e le superficie fondamentali per A non tangenti a $\gamma$ è simile a $\Theta$ rispetto a $\gamma$ (³).

---

stesso punto su due superficie (*Sui sistemi di curve e di superficie*, " Rend. Circ. Mat. Palermo ", t. III, 1889), nè quella del prof. Castelnuovo (*Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica*, " Ann. di Mat. ", (2), 25, 1897) debbono essere ravvicinate a quella presente di singolarità simili. Piuttosto ricordo che il prof. Segre (l. c., p. 46) assume come *indice* della complicazione di una singolarità di una superficie il numero $h$ massimo per cui, fra i caratteri di composizione della superficie sui diversi rami pel punto ($s$, $s'$, $s''$, ...) vi sia una $s^{(h)}$ diversa da 1. In questo senso due singolarità simili (secondo la definizione del testo) hanno ugual complicazione. Rilevo ad ogni modo che quanto è detto nel presente lavoro non richiede affatto che si analizzi il concetto di singolarità simili o uguali: si accolgano le parole " singolarità simili " come una semplice locuzione, come nel testo è detto; e si noti che non si potrà (nel significato presente) parlare di singolarità simili in due superficie che non siano riferite fra loro biunivocamente da una trasformazione Cremoniana.

(¹) Cioè tale che a ogni direzione generica uscente da A corrisponda un punto e che, muovendosi detta direzione, si muova pure questo punto.

(²) Questa parte della proposizione è, almeno in parte, provata dal prof. Segre nel citato lavoro (p. 50-51); anch'essa è implicitamente supposta vera in molti lavori, perchè tale ipotesi si fa quando si parla di multiplicità di composizione, senza fissare le trasformazioni quadratiche che servono a determinarle (cfr. p. e. Noether e Segre, ll. cc.). Nel lavoro storico di Brill e Noether, *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit* (" Jahresbericht d. deutschen Math.-Vereinigung ", Bd. 3, 1892-93, p. 384), dopo che sono state definite le suddette multiplicità (per le curve piane) con trasformazioni quadratiche speciali, è detto " so " sind... statt der speciellen auch die allgemeinen quadratischen Cremona- " Substitutionen sogleich verwendbar und führen zu genau derselben Zusam- " mensetzung der Multiplicität ".

(³) Nel piano, ammesso l'enunciato 1°, segue senza difficoltà questo 2°, per essere notoriamente ogni trasformazione Cremoniana piana, prodotto di trasformazioni quadratiche.

3° A sia punto generico di una linea fondamentale ordinaria [1] di $\Theta$ e $\gamma$ non sia tangente, fuori di questa linea, alle superficie fondamentali per essa: ogni altra trasformazione che abbia la stessa linea fondamentale, soddisfacendo in A alle stesse condizioni di generalità imposte a $\Theta$ è simile a $\Theta$ rispetto a $\gamma$.

2. — Riterrò come equivalenti una trasformazione T e la trasformazione TP, prodotto di T e di una collineazione P [2] (non però T e PT). Le denominazioni introdotte nel n° prec. di *singolarità* e *trasformazioni simili* permettono di enunciare alcune proposizioni che è utile porre in rilievo: *Se* A *e* A′ *hanno per* F *e* F′ *singolarità simili, ad ogni successione di trasformazioni dello spazio* $T_1$, $T_2$, ... *applicata ad* F *ne corrisponde una* $T'_1$, $T'_2$, ... *applicata ad* F′, *trasformata della prima per la trasformazione* $\Theta$ *che muta* F *in* F′, *tale che le due successioni sono simili rispetto a due rami corrispondenti qualunque* $\gamma$ *e* $\gamma'$ *tracciati rispettivamente su* F *e* F′ *per* A *e* A′ (o, come brevemente si può dire, *sono simili rispetto ad* A *e* A′). In particolare, se con una successione di trasformazioni si riesce ad abbassare la multiplicità di A, come punto di F e origine di $\gamma$, esiste una successione di trasformazioni (simile a questa rispetto $\gamma$ e al ramo $\gamma'$, corrispondente a $\gamma$ su una superficie F′ avente nell'origine A′ di $\gamma'$ singolarità simile a quella di F in A) la quale abbassa la multiplicità di A′ come punto di F′ e origine di $\gamma'$.

Si assoggetti F ad una successione di trasformazioni Cremoniane T, $T_1$, $T_2$, ... e ad una trasformazione $\Theta$ simile a T rispetto a $\gamma$. Siano $\gamma_1, \gamma'$ i trasformati di $\gamma$ per T, $\Theta$; $T'_1$, $T'_2$,... le trasformazioni trasformate di $T_1$, $T_2$, ... per $T^{-1}\Theta$. Le successioni $T'_1$, $T'_2$, ... e $T_1$, $T_2$, ... saranno simili rispetto a $\gamma'$ e $\gamma_1$; quindi la successione $\Theta$, $T'_1$, $T'_2$, ... è simile alla T, $T_1$, $T_2$, ... rispetto a $\gamma$. Sia ora $\Theta_1$ una trasformazione simile a $T'_1$ rispetto a $\gamma'$ e siano $T''_2$, ... le trasformate di $T'_2$, ... per $T'^{-1}_1\Theta_1$; sarà analogamente $\Theta$, $\Theta_1$, $T''_2$, ... simile a T, $T_1$, $T_2$, ... rispetto a $\gamma$.

---

[1] Cioè tale che a ogni giacitura uscente dalla sua tangente in A (punto semplice della linea) corrisponda un punto, mobile con detta giacitura.

[2] Una collineazione (non degenere) muta ogni singolarità in una singolarità simile.

Il ragionamento si può proseguire finchè si siano esaurite tutte le trasformazioni T, e il risultato si può enunciare sotto questa forma: *Si considerino le due successioni di trasformazioni* $T, T_1, T_2, \ldots$; $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \ldots$ *e siano* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$; $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, \ldots$ *i rami successivi trasformati di* $\gamma$ *per la prima e per la seconda successione, e siano* T *e* $\Theta$ *simili rispetto a* $\gamma$, $T_1$ *e* $\Theta_1$ *simili rispetto a* $\gamma_1$ *e* $\gamma'_1$, $T_2$ *e* $\Theta_2$ *simili rispetto a* $\gamma_2$ *e* $\gamma'_2$ *e così via: le due successioni sono simili rispetto a* $\gamma$.

3. — Si trasformi lo spazio $\Sigma$ di F con una trasformazione $\Theta$, a punti e linee fondamentali ordinari, nella cui determinazione esistano elementi arbitrari. Sia F′ la trasformata di F per $\Theta$. Fra le singolarità di F′ distinguo:

*a)* i punti e le linee singolari di F′ che corrispondono a punti di F appartenenti a linee fondamentali di $\Theta$ non generici su tali linee (in particolare tali che in essi queste non si comportano come linee fondamentali ordinarie), ovvero che corrispondano alle origini di rami tracciati su F e tangenti alle superficie fondamentali di $\Theta$, e che, variando gli elementi arbitrari di $\Theta$, scompaiono oppure persistono, corrispondendo però alle origini di rami tracciati su F diversi dai precedenti; per modo che, nella $\Theta$ che si ottiene per una tal variazione le origini dei rami che erano per la $\Theta$ data nelle particolari posizioni, cessino di esser tali;

*b)* i punti e le linee singolari di F′ che corrispondono a punti e linee di F appartenenti alle superficie fondamentali di $\Theta$.

Tutti questi punti e queste linee dirò, per brevità di linguaggio, di *singolarità accidentale* e dirò la loro multiplicità *multiplicità accidentale.*

In seguito alla $\Theta$ si eseguisca una nuova trasformazione $\Theta_1$ a punti e linee fondamentali ordinari definita in funzione della $\Theta$ in modo che, per ogni $\Theta$ generica (relativamente alla scelta degli elementi arbitrari che compaiono nella sua definizione), esistano trasformazioni $\Theta_1$, e nella cui definizione possono inoltre comparire elementi arbitrari. Dirò *singolarità accidentali* pel prodotto $\Theta\,\Theta_1$ le trasformate per $\Theta_1$ delle singolarità accidentali per $\Theta$ e le singolarità accidentali per $\Theta_1$. Relativamente alle varietà fondamentali ordinarie della trasformazione prodotto si vede facilmente che questa definizione concorda colla precedente. Ana-

logamente si definiranno le singolarità accidentali per la trasformazione prodotto di un maggior numero di trasformazioni a varietà fondamentali ordinarie.

Le considerazioni ora fatte per una superficie si applicano, con maggior semplicità, alle curve. Così potremo parlare di *singolarità e multiplicità accidentali di un punto di una curva trasformata:* si può notare che, per le curve, i punti di singolarità accidentale corrispondono tutti a punti semplici della curva primitiva.

4. — Si consideri una trasformazione $\Theta$ a varietà fondamentali qualunque (prodotto di convenienti trasformazioni a varietà fondamentali ordinarie) e nella cui definizione esistano elementi arbitrari, e il sistema lineare somma del sistema dei piani dello spazio e dei sistemi omaloidici che determinano due trasformazioni $\Theta$ generiche l'una rispetto all'altra [1]. A questo sistema si faccia corrispondere proiettivamente il sistema degli iperpiani di un conveniente $S_d$. Risulterà definita una trasformazione della F in una superficie $F^*$ di questo $S_d$, di cui F e le due superficie $F'$, $F'_1$, trasformate di F per le due $\Theta$, sono proiezioni da tre $S_{d-4}$ incontranti $F^*$ in punti semplici o generici su linee multiple. La multiplicità di un punto di $F^*$ è $=$ (o $<$) alla minima del punto corrispondente in F, $F'$, $F'_1$. Proiettando la $F^*$ da un $S_{d-4}$ generico dell'$S_d$, si ottiene in $S_3$ una nuova superficie $\overline{F}$, trasformata birazionalmente di F, in cui ai punti semplici di F corrispondono, in generale, punti semplici; ai punti omologhi di F, $F'$ $F'_1$ di ugual multiplicità (in particolare di singolarità simile) corrispondono punti di al più ugual multiplicità; ai punti che su $F'$ e $F'_1$ hanno multiplicità minore dei punti corrispondenti di F, punti di pari o minor multiplicità; a quelli di multiplicità accidentale punti di multiplicità uguale a quella generica delle linee cui appartengono; alle linee di multiplicità accidentale punti generici delle linee già incontrate in $\overline{F}$.

Inoltre comparirà in $\overline{F}$ una linea doppia nodale, i cui punti generici corrispondono a punti semplici di F e che possiede un

---

(1) Cioè il sistema lineare (minimo) che contiene tutte le superficie costituite da un piano arbitrario e due arbitrarie superficie l'una dell'un sistema omaloidico, l'altra dell'altro.

numero finito di punti cuspidali ordinari in punti semplici per la linea, e, nei suoi punti d'incontro con se stessa punti tripli ordinari per la linea e tripli e triplanari per $\overline{F}$ e nei suoi punti d'intersezione colle altre linee multiple di $\overline{F}$ (punti che su queste sono del resto generici) punti planari, aventi per $\overline{F}$ multiplicità superiore di un'unità a quella massima delle due linee.

Il problema di sciogliere le singolarità puntuali della F con trasformazioni birazionali della medesima si riduce adunque all'altro di trasformare birazionalmente la F in una nuova superficie i cui punti siano tutti o semplici ovvero di multiplicità accidentale. Sarà quindi provato che si può risolvere il problema proposto quando, con un numero finito di trasformazioni birazionali, si sia giunti ad abbassare le multiplicità dei punti di F che per le trasformazioni non sono di singolarità accidentale, od anche si sia giunti ad abbassare la multiplicità di una sua linea o di un suo punto arbitrari senza introdurre nuove singolarità altro che in punti di singolarità accidentale. Questo io farò nel seguito.

È evidente che le considerazioni svolte in questo n° supponendo che F sia una superficie si applicano (anzi con maggior semplicità) al caso che F fosse una curva.

## § 2.

5. — Farò uso di trasformazioni dello spazio di due tipi, entrambi casi particolari delle trasformazioni monoidali [1].

---

[1] Cfr. per le proprietà delle generali trasformazioni monoidali: De Paolis, *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie di ordine n con un punto* $(n-1)$*plo*, " Giornale di Battaglini ", vol. 13, 1875, p. 226 e 282. Ricordo che nella trasformazione monoidale definita da monoidi di dato ordine $n$ le varietà fondamentali sono il vertice P comune a questi monoidi (punto fondamentale isolato) e una linea $l$ d'ordine $n(n-1)$ avente P come punto $(n-1)(n-2)$-plo (linea fondamentale); inoltre il cono K che da P proietta $l$, e il monoide M d'ordine $n-1$ di vertice P e passante per $l$. La trasformazione inversa, ancora definita da monoidi d'ordine $n$, ha varietà fondamentali analoghe. Le proprietà della trasformazione si verificano facilmente sulle formole che la rappresentano. Assunte nei due spazi (primitivo e trasformato) coordinate omogenee, rispettivamente $x_1 x_2 x_3 x_4$, $x'_1 x'_2 x'_3 x'_4$, essendo P e l'analogo P' rispettivamente i punti $x_1=x_2=x_3=0$, $x'_1=x'_2=x'_3=0$, e rappresentato con $M_4=0$ il monoide corrispondente

1° Supporrò il sistema omaloidico dell'uno spazio (e quindi anche dell'altro) specializzato in quanto il monoide fondamentale (M) divenga un cono di vertice il punto fondamentale isolato (o, come dirò brevemente, *punto fondamentale*) P; tutti i monoidi del sistema vengono allora ad avere in P (e, pel secondo spazio, nel punto analogo P') lo stesso cono tangente. Chiamerò K il cono proiettante da P la linea fondamentale $l$, T il cono tangente comune in P ai monoidi del sistema, K' il cono tangente comune in P' ai monoidi del sistema omaloidico nel 2° spazio, T' il cono proiettante da P' la linea fondamentale $l'$ del 2° spazio [1]. K e K', T e T' sono proiettivamente uguali. La corrispondenza trasforma le rette per P nelle rette per P', e il riferimento che ne risulta fra le due stelle è una collineazione; ai punti di $l$ fa corrispondere le rette di K', corrispondendosi nella detta collineazione le proiettanti questi punti da P e queste rette. Fra le punteggiate corrispondenti su due rette omologhe per P e per P' (non appartenendo l'una a K nè a T e quindi l'altra nè a K' nè a T') intercede una proiettività in cui P e P' sono punti corrispondenti.

Chiamerò ogni corrispondenza quale quella ora definita *trasformazione monoidale speciale* [2] (e scriverò brevemente t. m. s.). In essa, come in ogni trasformazione monoidale, ai piani per P corrispondono i piani per P' e la corrispondenza birazionale che risulta stabilita fra i due sistemi piani ha per varietà fondamentali le intersezioni dei piani colle varietà fondamentali dei rispettivi spazi.

Rilevo, perchè sarà utile in seguito, che, data una parte L di $l$ e dato P, fanno sempre parte di $l$ le corde di L per P e, in generale, le rette che congiungono P ai punti multipli di L. (Se il punto multiplo ha tutte le sue tangenti complanari in un

---

a $x'_4 = 0$, e con $M = 0$ il monoide M le dette formole si possono porre sotto la forma

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 : x_3 : \frac{M_4}{M}.$$

(1) M viene a coincidere con K, M' con T'; K, K', T, T' sono d'ordine $n-1$.

(2) Essa può sempre considerarsi come il prodotto di due convenienti trasformazioni monoidali generali aventi, nello stesso spazio, lo stesso monoide fondamentale; aventi quindi lo stesso ordine.

piano non passante per P possono i monoidi avervi soltanto un determinato contatto). Si può però scegliere l'ordine della trasformazione assai elevato perchè: 1° un'altra retta fissata ad arbitrio per P, appoggiata ad L non sia necessariamente parte di $l$ (1); 2° in un punto fissato ad arbitrio, diverso dai detti punti multipli e dai punti d'appoggio delle corde per P, il piano tangente ai monoidi del sistema non sia fisso (2).

2° Il secondo tipo di trasformazioni che avrò da applicare è quello delle trasformazioni quadratiche a conica fondamentale degenere, che chiamerò semplicemente *trasformazioni quadratiche speciali* (e scriverò brevemente t. q. s.). Se P è il punto doppio della conica fondamentale del primo spazio (P ha quindi significato diverso che nelle linee precedenti), P′ quello nel secondo, alle rette per P corrispondono quelle per P′ e la corrispondenza fra le due stelle è quadratica ed ha per rette fondamentali in ciascuna stella le rette della conica fondamentale del rispettivo spazio e la retta che da P (o da P′) proietta il punto fondamentale isolato (che dirò brevemente *punto fondamentale*) O (o O′). Su due rette corrispondenti l'una per P e l'altra per P′ (diverse l'una da PO, l'altra da P′O′) i punti si corrispondono in una proiettività in cui sono omologhi P e P′.

Un altro caso di trasformazione quadratica speciale è compreso nelle trasformazioni monoidali speciali, e si ha quando il punto fondamentale cada sulla conica fondamentale. Sotto il nome di trasformazione quadratica speciale si intenderà però sempre quella definita in 2°.

6. — Una superficie F abbia una linea L $s$-pla; si trasformi

(1) Poichè: " Se per le corde di una curva passanti per un punto si conduce un cono, esiste sempre un monoide che ha questo come sottocono — (cono tangente nel vertice) — e contiene la curva „. VALENTINER, *Zur Theorie der Raumcurven* (p. 170), " Acta Mathematica „, p. 136-230. In questo enunciato si suppone che la curva non possegga punti multipli generali (altro che doppi), ma facilmente si vede come esso basti al nostro oggetto (Si osservi p. e. che ogni punto singolare di una curva si scioglie con un numero finito di trasformazioni; cfr., anche per citazioni, *A.*, n° 3).

(2) La trasformazione è determinata quando è dato un monoide del sistema omaloidico e K (cioè detto monoide e su esso la $l$); il piano tangente in un punto di L non sarà fisso se per questo punto non passa una generatrice doppia di K; per esso non passerà allora altra parte di $l$.

F con una trasformazione monoidale qualunque, in particolare speciale, in cui L sia la linea fondamentale. Sia A un punto di L che non sia più che $s$-plo per F e sia generico su L rispetto alle varietà fondamentali della trasformazione. Sia inoltre K [1] la parte di K passante per L, K′ la corrispondente parte di K′ e sia $a'$ la generatrice di K′ corrispondente ad A. Alla superficie F la trasformazione fa corrispondere una superficie F′ che sega $a'$, fuori di P′ [2], nei punti $A'_1$, $A'_2$, ..., ma non contiene $a'$; la somma delle multiplicità d'intersezione di F′ e $a'$ in $A'_1$, $A'_2$, ... è $s$; la somma delle multiplicità di questi punti in F′ è quindi $\leq s$; e se è $= s$, $a'$ non è tangente ad F′.

L'analogo vale per una curva C e la sua trasformata C′. In particolare e inversamente se C′ interseca $a'$, C passa pel punto A corrispondente ad $a'$.

7. — Si considerino due superficie F e Φ per un punto A; chiamo *multiplicità d'intersezione di* F *e* Φ *in* A la somma dei prodotti delle multiplicità di A sulle diverse parti (curve algebriche irreduttibili) dell'intersezione di F e Φ per le multiplicità rispettive di queste parti (cfr. *A.*, nº 4); essa è uguale alla somma dei prodotti delle multiplicità di composizione di A su una sezione piana di F (non tangente in A a detta intersezione) rispettivamente per le omologhe multiplicità di composizione di A sulla sezione fatta in Φ dallo stesso piano. Se quindi A è $s$-plo per F, $\sigma$-plo per Φ e si opera una trasformazione quadratica di punto fondamentale A, e se — questo solo caso ci sarà utile — la trasformata di A sulle superficie trasformate F′, Φ′ è *una* retta, la multiplicità d'intersezione di F′ e Φ′ in un punto generico di questa è uguale a quella di F e Φ in A diminuita di $s\sigma$. E se A è punto generico (rispetto alle multiplicità) di una linea L $s$-pla per F, $\sigma$-pla per Φ, ed è semplice su L, e se si opera una trasformazione monoidale con linea fondamentale L, e se l'intersezione delle superficie trasformate F′ e Φ′ passa pel solo punto trasformato di A, A′, non toccando

---

[1] Conserverò costantemente, anche nel seguito, queste notazioni.

[2] Nelle considerazioni relative al comportamento delle generatrici di K′ o del cono stesso rispetto ad F′, il punto P′ dovrà sempre essere escluso. Può quindi ritenersi l'esclusione fatta implicitamente.

la $A'P'$ — in particolare, se $A'$ è $s$-plo per $F'$ o $\sigma$-plo per $\Phi'$ —; la multiplicità d'intersezione di $F'$ e $\Phi'$ in $A'$ è uguale a quella di F e $\Phi$ in A diminuita di $s\sigma$.

## § 3.

8. — Data una superficie $\Psi$ si può sempre, con una successione di trasformazioni (quadratiche speciali), mutarla in una nuova superficie F su cui non esistano punti multipli per essa, altro che generici (riguardo alla multiplicità) di linee multiple di F o punti di singolarità accidentale; nè punti multipli per le sue linee multiple (curve algebriche irreduttibili), altro che accidentali (*A.* n[i] 14, 17, 3 [1]).

Sia ora L una linea $s$-pla di F. Si assuma un punto P in posizione generica rispetto ad F e ad L e si determini una t. m. s. per cui L e P siano linea e punto fondamentali; F ne sarà mutata in una superficie $F'$ in cui ad L corrisponde $L'$ di multiplicità $\leq s$ e che, fuori di $L'$, possiede solo singolarità simili a quelle di F fuori di L e singolarità accidentali [2]. Può ora avvenire che la $L'$ abbia multiplicità $= s$ ovvero $< s$ contenendo però ancora punti $s$-pli, ovvero non contenga nemmeno tali punti. Nell'ultimo caso le singolarità di F si saranno abbassate; negli altri due si dovrà proseguire nelle trasformazioni.

Consideriamo il primo caso: nessuna generatrice di $K'$

---

[1] Infatti, come ho provato in *A.*, ogni punto m[plo] di una linea si può sciogliere con trasformazioni quadratiche speciali, e con tali trasformazioni si abbassa anche gradualmente la multiplicità di ogni punto multiplo di una superficie, finchè questo e i suoi trasformati che si considerano non appartengono a linee di ugual multiplicità delle corrispondenti superficie. Colle trasformazioni si introdurranno, oltre a singolarità accidentali, linee singolari, trasformate dei punti singolari su cui si è operato. Tali linee potranno eventualmente avere punti multipli per esse, ma la multiplicità, per la superficie, di questi punti è allora minore di quella del punto da cui provengono; e, poichè la multiplicità di un punto non può divenire $< 1$, dopo un numero finito di operazioni tale particolarità non potrà più prodursi.

Si può osservare che dalla $\Psi$ si può passare ad una F avente le proprietà suenunciate con trasformazioni quadratiche di cui si facciano passare pei punti da trasformarsi le coniche fondamentali.

[2] $F'$ possiede generatrici di $K'$ come linee singolari, ma tutte accidentali, essendo accidentali i punti multipli di L, e arbitrario P (n° 5).

($\equiv P'L'$) tocca $F'$, nè incontra $F'$ fuori di $L'$, o $L'$ due volte in punti (distinti o coincidenti) non accidentalmente singolari.

Assoggettiamo $F'$ ad una nuova t. m. s. in cui $L'$ e $P'$ siano linea e punto fondamentali. $F'$ si trasforma in $F''$ con singolarità analoghe a quelle enumerate per $F'$. Si supponga ancora $s$-pla $L''$, trasformata di $L'$: si assoggetti $F''$ ad una nuova t. m. s. di cui $P''$ e $L''$ siano punto e linea fondamentali; e così si prosegua. Dopo un numero finito $\lambda_1$ di trasformazioni si giungerà ad una superficie $F^{(\lambda_1)}$ su cui $L^{(\lambda_1)}$, trasformata di L, ha multiplicità $< s$. Infatti (n° 5, 1°), per la effettuata successione di trasformazioni, ad una sezione piana generica di F per P corrisponde una sezione piana generica di $F^{(\lambda_1)}$ per $P^{(\lambda_1)}$ e le due curve si ottengono, la seconda dalla prima, con $\lambda_1$ trasformazioni birazionali piane aventi punti fondamentali successivamente nei punti d'intersezione del primo piano segante con L e nei loro successivi trasformati: e il numero delle trasformazioni necessarie ad abbassare la multiplicità di dati punti singolari di una curva piana è finito.

Essendo $L^{(\lambda_1)}$ di multiplicità $< s$, si potranno ancora distinguere due casi: 1° su $L^{(\lambda_1)}$ non esistono punti $s$-pli per $F^{(\lambda_1)}$: le singolarità di F risultano diminuite; 2° su $L^{(\lambda_1)}$ esistono punti $s$-pli (non accidentali), e cioè: *a*) punti che appartengono a linee $s$-ple di $F^{(\lambda_1)}$ (trasformate di linee $s$-ple di F); *b*) punti che non appartengono a tali linee. I primi sono, in quanto alla multiplicità, punti generici delle linee $s$-ple suddette, cosicchè, se esistessero su $L^{(\lambda_1)}$ solo tali punti si sarebbero ancora diminuite le singolarità di F. Basta adunque cercare la risoluzione dei punti della seconda specie.

Sia $A^{(\lambda_1)}$ uno di questi punti. Si trasformi $F^{(\lambda_1)}$ con una successione di t. q. s. assumendo $P^{(\lambda_1)}$ e i suoi trasformati come punti doppi delle coniche fondamentali e $A^{(\lambda_1)}$ e una successione di suoi trasformati $s$-pli come punti fondamentali isolati. Dopo un numero finito di tali operazioni, o non si otterranno più trasformati $s$-pli, oppure si otterrà *una prima volta* una retta $s$-pla $L^{(\lambda_1\mu_1)}$ trasformata di $A^{(\lambda_1)}$ (*A*.). Se il primo caso si verifica per tutte le successioni di punti $s$-pli trasformati di $A^{(\lambda_1)}$, che sono allora sempre in numero finito, ed inoltre per tutti i punti di $L^{(\lambda_1)}$ quale $A^{(\lambda_1)}$, con una conveniente successione di t. q. s. (quella delle trasformazioni di cui ora si è parlato) $F^{(\lambda_1)}$ si muta in una

superficie in cui le singolarità, rispetto a quelle di F, sono diminuite, poichè, fuori dei trasformati dei punti di L, possiede solo singolarità simili alle omologhe di F e singolarità accidentali. Se si verifica il 2° caso, sia $F^{(\lambda_1\mu_1)}$ l'ultima trasformata di F, $P^{(\lambda_1\mu_1)}$ il corrispondente trasformato di P. $L^{(\lambda_1\mu_1)}$ non passa per $P^{(\lambda_1\mu_1)}$ e $P^{(\lambda_1\mu_1)}L^{(\lambda_1\mu_1)}$ non tocca $F^{(\lambda_1\mu_1)}$ nè la sega fuori di $L^{(\lambda_1\mu_1)}$ in punti di singolarità non accidentale.

Si operi sopra $F^{(\lambda_1\mu_1)}$ e $L^{(\lambda_1\mu_1)}$ come si è fatto su F e L, assumendo come punto fondamentale della t. m. s. $P^{(\lambda_1\mu_1)}$, e si prosegua per le successive superficie trasformate come fin qui. Dimostrerò che, dopo una successione finita di trasformazioni si giungerà ad una $F^{(\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2\ldots\lambda_r)}$ per cui $L^{(\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2\ldots\lambda_r)}$ (ultima trasformata di L, $A^{(\lambda_1)}$, $L^{(\lambda_1\mu_1)}$, $A^{(\lambda_1\mu_1\lambda_2)}$, ...) ha multiplicità $< s$ e non possiede punti $s$-pli della seconda specie sopra distinta.

9. — Rappresento per brevità con $F^{(\lambda)}$ una $F^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_i)}$ qualunque e suppongo che sulla corrispondente $L^{(\lambda)}$ esista un punto $A^{(\lambda)}$ $s$-plo per $F^{(\lambda)}$ della seconda specie. Distinguo due casi:

1° Per $A^{(\lambda)}$ passano più rami parziali di $L^{(\lambda)}$. Indichi $F_k^{(\lambda)}$ la k-ma polare di $P^{(\lambda)}$ rispetto ad $F^{(\lambda)}$ ($F_0^{(\lambda)} \equiv F^{(\lambda)}$): *esiste sempre un* $p$ ($0 \leq p < s-1$) *tale che* $F_p^{(\lambda)}$ *non passa per l'intersezione di* $F_{s-1}^{(\lambda)}$ *e* $K^{(\lambda)}$ *fuori delle generatrici comuni a* $K^{(\lambda)}$ *e* $T^{(\lambda)}$ [1]:

2° Per $A^{(\lambda)}$ passa un solo ramo parziale di $L^{(\lambda)}$: $L^{(\lambda)}$ sia $s'$-pla ($s' < s$) e $s'-p$ piani tangenti a $F^{(\lambda)}$ in un punto generico di $L^{(\lambda)}$ passino per $P^{(\lambda)}$. $F_p^{(\lambda)}$ *passa per* $L^{(\lambda)}$ *con multiplicità* $s'-p$ *avendo tutti i suoi piani tangenti nei punti generici di* $L^{(\lambda)}$ *tangenti a* $K^{(\lambda)}$; *mentre* $F_{s-1}^{(\lambda)}$ *passa semplicemente per* $L^{(\lambda)}$ *non essendovi tangente a* $K^{(\lambda)}$.

In ambi i casi $F_p^{(\lambda)}$, $F_{s-1}^{(\lambda)}$ hanno $A^{(\lambda)}$ rispettivamente $s$-$p$-plo e semplice; quindi, mentre o non hanno punti comuni su una generatrice generica di $K^{(\lambda)}$, ovvero hanno in un punto generico di $L^{(\lambda)}$ multiplicità d'intersezione $s'$-$p$, hanno in $A^{(\lambda)}$ multiplicità d'intersezione $\geq s-p$ (n° 7). $F_p^{(\lambda)}$ e $F_{s-1}^{(\lambda)}$ *s' intersecano quindi se-*

---

[1] Il ragionamento, d'altronde semplicissimo, con cui si prova questa proposizione e la seguente, è interamente analogo a quello contenuto in *A.*, n. 10.

*condo una linea* $C^{(\lambda)}$ *non giacente in* $K^{(\lambda)}$ *e passante per* $A^{(\lambda)}$ (¹) *e non tangente in esso a* $P^{(\lambda)}A^{(\lambda)}$.

Qui dobbiamo distinguere due casi: 1° Comunque cresca $r$, almeno finchè si suppone che si ottengano trasformati di L, $A^{(\lambda_1)}$, $L^{(\lambda_1\mu_1)}$, ... $s$-pli e finchè resta minore di un limite finito assegnabile, esiste un $i > r$ per cui $C^{(\lambda)}$ non è una linea trasformata di L (o di un punto di L); (in particolare, per $A^{(\lambda)}$ non passa una tal linea diversa da $L^{(\lambda)}$); 2° $C^{(\lambda)}$ è sempre una tal linea per $i$ superiore a un certo limite (naturalmente finchè si hanno trasformati $s$-pli). In questo n° e nel seguente tratto solo il primo caso.

Ogni $F_k^{(\lambda)}$ è trasformata, per le trasformazioni effettuate, della $F_k$ (poichè le punteggiate corrispondenti sulle rette per due punti P sono proiettive essendo omologhi i due punti P stessi (n° 5)). Si indichino con $A^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_j 1)}$ $A^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_j 2)}$ ... $A^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_j\mu_j)}$ $A^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_j\mu_j 1)}$ $A^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_j\mu_j 2)}$ ... i punti rispettivamente di $F^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_j 1)}$ $F^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_j 2)}$ ... $F^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_j\mu_j)}$ $F^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_j\mu_j 1)}$ $F^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_j\mu_j 2)}$ ... individuati dall'aver come trasformato $A^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_j\mu_j\lambda_{j+1})}$ (n° 6). Nel primo caso, che qui si considera, esiste dunque sempre una $F_p$ $(0 \leq p < s\text{-}1)$ che interseca $F_{s-1}$ secondo una curva di cui una parte irreduttibile C, diversa da L e dalle altre linee $s$-ple di F, passa per A e le sue trasformate (per le trasformazioni enumerate) rispettivamente per $A'$ $A''$ ... $A^{(\lambda_1\mu_1)}$ ... $A^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_i)}$.

**10.** — Premetto due osservazioni:

1° Se come punto P si assume un nuovo punto $P_1$ generico rispetto ad F e L, risulta definita come precedentemente una successione di t. m. s. e t. q. s. simile a quella relativa a P rispetto ad ogni ramo passante per A $A'$ $A''$ ... (n° 2). I punti omologhi ad $A'$ $A''$ ... per la nuova successione (di singolarità simili a quelle di questi) saranno indicati nel presente n° cogli stessi simboli;

2° La successione di trasformazioni considerata muta ogni cono G di vertice P successivamente in coni $G'$, $G''$, ... di vertici rispett. $P'$, $P''$, ... Passi G per PA e $G'$, $G''$, ... rispett.

(¹) Si noti che $A^{(\lambda)}$ non ha singolarità accidentale; per esso non passa quindi una generatrice di $K^{(\lambda)}$ appartenente a $F^{(\lambda)}$.

per $P'A'$, $P''A''$, ...: $G'$ ... $G^{(\lambda_1)}$ sono proiettivamente uguali a G; $G^{(\lambda_1 1)}$ è invece trasformato di $G^{(\lambda_1)}$ con una trasformazione quadratica nella stella per cui $P^{(\lambda_1)}A^{(\lambda_1)}$ è retta fondamentale; quindi è proiettivamente uguale al trasformato di G con una trasformazione quadratica nella stella di cui PA è retta fondamentale. Ripetendo il ragionamento si deduce che $G^{(\lambda_1 \mu_1 \dots \lambda_i)}$ è proiettivamente uguale al trasformato di G con $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{i-1}$ trasformazioni quadratiche della stella di cui sono rette fondamentali PA, la sua trasformata omologa a $P^{(\lambda_1 1)}A^{(\lambda_1 1)}$, la trasformata di questa omologa a $P^{(\lambda_1 2)}A^{(\lambda_1 2)}$ ecc. Dunque, crescendo convenientemente $i$, $P^{(\lambda_1 \mu_1 \dots \lambda_i)}A^{(\lambda_1 \mu_1 \dots \lambda_i)}$ ha per $G^{(\lambda_1 \mu_1 \dots \lambda_i)}$ multiplicità successivamente decrescente.

Su G sia tracciata una curva che passi per A senza toccarvi PA e le cui trasformate passino per $A'$ $A''$ ... senza toccarvi $P'A'$, $P''A''$, ..., e tale che G non ne sia cono di corde. Crescendo $i$ convenientemente la multiplicità di $A^{(\lambda_1 \mu_1 \dots \lambda_i)}$ per la curva trasformata decresce gradualmente fino a ridursi all'unità.

Fatte queste premesse, si proietti C (n° 9) da un punto $P_1$ fuori dei piani tangenti a F in A, del cono tangente a F da un punto generico fissato ad arbitrio di C e del cono proiettante da tal punto le linee $s$-ple di F. Sia $\Gamma$ il cono proiettante. Si dica $n$ l'ordine di F, $m$ quello di C; sarà

$$m \leq (n-p)(n-s+1) < n(n-s+1).$$

Sia $C_1$ l'intersezione di $\Gamma$ e F, $m_1$ il suo ordine: sarà $m_1 = mn$; e se $C_2$ è la curva costituita dalle parti (curve algebriche irreduttibili) di $C_1$ prese ciascuna una sola volta, $m_2$ il suo ordine, $m_2 \leq m_1$. $C_1$, e quindi $C_2$, passa per A, senza toccarvi PA, con una o più parti, ciascuna di multiplicità (per $C_1$) $< s$, mentre A ha multiplicità $\geq s$ per l'intersezione di $\Gamma$ e F. Dunque A è multiplo per $C_2$. La nuova successione di trasformazioni, simile alla precedente, che si ottiene assumendo $P_1$ come primo punto P, muta $\Gamma$ successivamente nei coni proiettanti da $P'_1, P''_1$, ... le corrispondenti trasformate di C, e muta C e quindi $C_1$ e $C_2$ in curve, successivamente, per $A'$ $A''$..., non tangenti rispettivamente a $P'_1A'$, $P''_1A''$, ... ; e, come A per $C_2$, $A'$ $A''$ ... saranno multipli per la corrispondente trasformata

di $C_2$. Si consideri ora la nuova successione di trasformazioni, simile alle precedenti, relativa ad un nuovo punto $P_2$, preso come punto P, generico rispetto ad F ed L e che non sia vertice d'un cono di corde di $C_2$. Le trasformate di $C_2$ avranno ancora rispettivamente in A′ A″ ... punti multipli e non vi saranno tangenti a $P'_2$ A′, $P''_2$ A″, ... Ma il fatto che ciò possa avvenire comunque cresca $i$ contraddice alla 2ª osservazione precedente. È adunque assurdo che $A^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_i)}$ sia sempre $s$-plo per $F^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_i)}$ comunque cresca $i$, se si verifica il 1° caso distinto nel n° prec.

**11.** — Passo alla considerazione del 2° caso (n° 9). Chiamo per un istante *linea t* una curva (che può essere riduttibile) trasformata di L senza avere infiniti punti corrispondenti ad uno stesso punto di L, oppure trasformata di una linea (che potrebbe essere essa stessa) a un punto della quale non corrispondano infiniti suoi punti, e che, a sua volta, sia *la* trasformata per *una* trasformazione di *un* punto corrispondente a un punto di L. Il caso che noi qui consideriamo può verificarsi soltanto quando si considerino solo punti A i quali, da un certo A in poi, appartengano (non accidentalmente) a due linee $t$, e l'intersezione delle trasformate di $F_{s-1}$ e di ogni $F_k$ corrispondenti a uno qualunque di questi punti passi per tal punto solo con parti cadenti in queste linee [1]. Indicherò con O (riservando di apporre a questa lettera e alle seguenti, che ad essa si riferiscono, apici ed indici) ogni punto A successivo ad A tale che le due linee $t$ per esso abbiano multiplicità $< s$: una di queste è sempre trasformata del punto O immediatamente precedente. Indico con $o$ queste linee; e ogni trasformata di una di esse (per una trasformazione che non l'abbia come fondamentale) collo stesso simbolo di questa: due punti O successivi stanno sempre su una stessa $o$.

Dopo che, per convenienti trasformazioni, si è ottenuto un punto O, si deve applicare in primo luogo una t. q. s., con punto fondamentale in esso: se poi non si ottiene come

(1) È perciò è anzitutto necessario che quel punto non sia multiplo per queste linee o per una parte irreduttibile di esse che si potrebbe sostituir loro.

trasformata una $o$, si deve applicare una successione di t. m. s. fino a trasformare in una $o$ la trasformata di O ottenuta; indicherò con $\nu$ il numero di queste t. m. s.; sarà $\nu = 0$ se la trasformata di O è senz'altro una $o$. Dimostrerò che, se si suppone il numero dei punti O sufficientemente elevato, da un certo in poi è sempre $\nu = 0$ cosicchè il caso che qui si considera si riduce a quello analizzato in *A.*, n° 17.

Osservo in primo luogo che il numero dei punti O su una $o$ è finito [1]. Ciò posto, si fissi una $o$, che si consideri come prima (e può essere la prima che si incontra), e si indichi con $o$: siano O e $O'_1$ i due ultimi punti O su di essa; sia $o'$ la seconda $o$ per $O'_1$, e $O'_2, \ldots, O'_{i'-1} \equiv O'$, $O'_{i'} \equiv O''_1$ gli altri successivi punti O su essa; analogamente sia $o''$ l'altra $o$ per $O''_1$, e $O''_2, \ldots O''_{i''-1} \equiv O''$, $O''_{i''} \equiv O'''_1$ gli altri punti O su essa e così via; siano poi $o'_1\ o'_2 \ldots o'_{i'-1}\ o''_1 \ldots$ le $o$ per $O'_2\ O'_3 \ldots O'_{i'}\ O''_2 \ldots$ diverse dalle $o'\ o'' \ldots$; $\nu\,\nu'_1\,\nu'_2 \ldots \nu'_{i'-1} \equiv \nu'\ \ \nu'_{i'} \equiv \nu''_1\ \ \nu''_2 \ldots$ i numeri $\nu$ relativi ai punti O cogli stessi indici e apici; $\Phi\,\Phi'_1\,\Phi'_2 \ldots \Phi'_{i'-1}\,\Phi'_{i'}\,\Phi''_2 \ldots$ le trasformate di F cui appartengono rispettivamente i detti punti O; $p'\ p'_1 \ldots$ i numeri analoghi a $p$ (n° 9) relativi a $\nu'\ \nu'_1 \ldots$ Infine si indichi con $\Phi^{(\rho)}_{\mu,k}$ la k-ma polare, rispetto a $\Phi^{(\rho)}_{\mu}$, del punto P corrispondente. La multiplicità d'intersezione di $\Phi^{(\rho)}_{\mu,s-1}$ e $\Phi^{(\rho)}_{\mu,k}$ in $O^{(\rho)}_{\mu}$ è $\geq (\nu^{(\rho)}_{\mu} + 1)\,(s-k)$.

La multiplicità d'intersezione di $\Phi_{s-1}$ e $\Phi_{p'}$ in O è

$$(\nu+1+\epsilon)(s-p') \quad (\epsilon < 1) \ ([2]):$$

quella di $\Phi'_{1,s-1}$ e $\Phi'_1$ in $O'_1$ è quindi $\leq (\nu+1+2\epsilon)\,(s-p')$ e quella di $\Phi'_{2,s-1}$ e $\Phi'_{2,p'}$ in $O'_2 \leq (\nu-\nu'_1+3\epsilon)(s-p')$ onde

$$(\nu'_2+1)\,(s-p') \leq (\nu-\nu'_1+3\epsilon)\,(s-p')$$

e

$$\nu'_2 \leq \nu-\nu'_1+1.$$

Analogamente, in generale, $\nu'_{j'} \leq \nu-\nu'_1-\nu'_2-\ldots-\nu'_{j'-1}+1$ e, a fortiori,

$$(\alpha) \qquad \nu'_{j'} \leq \nu-\nu'_{j'-1}+1 \qquad (j'=2\ldots i')$$

---

[1] Basti notare che tutti i punti O su una $o$ sono le origini dei rami trasformati di uno stesso ramo lineare e che quindi il numero di tali O è $\leq$ a quello dei punti successivi $s$-pli della superficie su questo ramo. Dopo ciò si possono applicare i risultati di *A.* (p. e. *A.*, n° 15).

[2] $\epsilon(s-p')$ è la multiplicità d'intersezione di $\Phi'_{1s-1}$ e $\Phi'_{1p'}$ nei punti generici di $o'$.

D'altra parte la multiplicità d'intersezione di $\Phi'_{1,s-1}$ e $\Phi'_{1,p'_1}$ in $O'_1$ è $(\nu'_1+1+\epsilon_1)(s-p'_1)$ $(\epsilon_1<1)$, onde quella di $\Phi'_{2,s-1}$ e $\Phi'_{2,p'_1}$ in $O'_2$ è $\leq(\nu'_1+1+2\epsilon_1)(s-p'_1)$; quindi

$$(\nu'_2+1)(s-p'_1)\leq(\nu'_1+1+2\epsilon_1)(s-p'_1)$$

e

$$\nu'_2\leq\nu'_1+1.$$

Analogamente, in generale,

$$(\beta) \qquad \nu'_{j'}\leq\nu'_{j'-1}+1 \qquad (j'=2\ldots i').$$

Dalle (α) e (β) si deduce

$$(\gamma) \qquad \nu'_{j'}\leq\frac{\nu}{2}+1.$$

Analogamente

$$\nu''_{j''}\leq\frac{\nu'}{2}+1 \qquad (j''=2,\ldots,i'')$$

e così via. Segue di qui che i numeri $\nu$ decrescono via via fino ad assumere uno dei valori 0, 1, 2, e non si potrà avere $\nu'_{j'}=2$ se non è $\nu=2$.

Le ipotesi $\nu=0, 1, 2$ si debbono analizzare direttamente.

1° $\nu=2$. La multiplicità d'intersezione di $\Phi_{s-1}$ e $\Phi_{p'}$ in O è $(3+\epsilon)(s-p')$; quella di $\Phi'_{1,s-1}$ e $\Phi'_{1,p'}$ in $O'_1$ è quindi $\leq(3+2\epsilon)(s-p')$. Si supponga poi che $\nu'_{j'}=0$ per $j'=1,\ldots,\kappa-1$, $\nu'_{\kappa}=1$, $\nu'_{\kappa+1}=2$ e che $i'>\kappa+1$. La multiplicità d'intersezione di $\Phi'_{\kappa+1,s-1}$ e $\Phi'_{\kappa+1,p'}$ in $O'_{\kappa+1}$ è

$$\leq[(\kappa+2)\epsilon+(2-\kappa)](s-p')$$

e quella di $\Phi'_{\kappa+2,s-1}$ e $\Phi'_{\kappa+2,p'}$ nei punti generici di $o'_{\kappa+1}$

$$\leq[(\kappa+2)\epsilon-(\kappa+1)](s-p')<\epsilon(s-p').$$

Per $O'_{\kappa+2}$ passano adunque due linee $o'$ e $o'_{\kappa+1}$ nei cui punti generici la multiplicità d'intersezione delle corrispondenti trasformate di $F_{s-1}$ e $F_{p'}$ è $<s-p'$. Di qui, proseguendo nel calcolo delle multiplicità d'intersezione, si vede che le $\nu$ successive a $\nu'_{\kappa+1}$ sono tutte nulle (ed anche direttamente, che dopo un numero

finito di operazioni non possono più presentarsi punti O). Nel precedente ragionamento non è escluso che $\kappa = 1$: allora non esistono punti $O'_{j'}$; è invece escluso che $\kappa = i' - 1$; se però questo caso si verifica, è $\nu' = 1$: così ci riduciamo al caso di $\nu = 1$; infine non si sono considerati i casi che $\nu'_{\kappa+1} = 1$ o $\nu'_1 = 2$: allora si ha (per una relazione precedente) $\nu'_{j'} \leq 1$ per $j' > \kappa + 1$ o, rispettivamente, $> 1$ cosicchè il problema si riconduce nel 1° caso a quello $\nu \leq 1$, $\nu'_1 \leq 1$ e nel secondo a questo ovvero a $\nu = 2$, $\nu'_1 \leq 1$;

2° $\nu = 1$ $\nu'_1 = 2$. In modo assolutamente analogo al precedente si vede che le $\nu$ successive sono tutte nulle (e in numero finito);

3° $\nu = 1$ $\nu'_1 = 1$ $\nu'_2 = 1$ $i' > 2$; e 4° $\nu = 0$ $\nu'_1 = 1$. Con ragionamenti analoghi ai precedenti si giunge agli stessi risultati;

5° $\nu = 1$, $\nu'_1 \equiv \nu' = 1$, $\nu'_2 \equiv \nu''_1 = 1$, .... Il caso si riduce ad uno degli altri scegliendo come nuovo punto O un conveniente punto successivo al presente, a meno che ogni $i$ si supponga $= 2$. Ma in ogni caso si può fare la ricerca diretta se $\nu''_1 \equiv \nu''$ e $\nu''_2 \equiv \nu'''_1 = 1$. La ricerca e la conclusione sono del tutto analoghe a quelle dei casi precedenti, osservando però che i punti O si succedono ora su differenti rette $o$;

6° $\nu = 1$ $\nu'_1 = 1$ $\nu'_2 = 0$. *a)* Se $i' = 2$ si passa al caso $\nu = 1$ $\nu'_1 = 0$ (8° e 9°). — *b)* Se $\nu'_2 = \nu'_3 = \ldots = \nu'_{i'-1} = \nu'_{i'} = 0$ si passa al caso $\nu = 0$ $\nu'_1 = 0$ (7°). — *c)* Se $\nu'_2 = \ldots = \nu'_{i'-1} = 0$ $\nu'_{i'} = 1$ si passa al caso $\nu = 0$ $\nu'_1 = 1$ (4°). — *d)* $\nu'_2 = \ldots = \nu'_{j'} = 0$ $\nu'_{j'+1} = 1$ $(j' < i' - 1)$. Con ragionamento analogo a quello usato per 1° si giunge agli stessi risultati;

7° $\nu = 0$ $\nu'_1 = 0$. Si possono fare due ipotesi: *a)* Tutte le $\nu$ successive sono nulle; si cade allora nel caso contemplato in *A.*, n° 17. — *b)* Esiste una $\nu$ il cui valore è 1: α) la prima (e, si vedrà, l'unica) di tali $\nu$ corrisponde a un punto ultimo su una delle $o'$ $o''$ ...; si cade nel caso $\nu = 0$ $\nu'_1 = 1$ (4°); β) non si verifica questo fatto; si assuma come $o'$ quella fra le $o'$ $o''$ ... che contiene quel punto; si potrà applicare il ragionamento fatto in 1°, col medesimo successo;

8° $\nu = 1$ $\nu'_1 = 0$ $\nu'_{i'} = 1$. Si ricade nel caso 4°, oppure si ha: $\nu'_{i'-2} = 0$ $\nu'' = 1$ $\nu''_1 = 1$. La multiplicità d'intersezione di $\Phi'_{i'-2,s-1}$ e $\Phi'_{i'-2,p'_{i'-2}}$ in $O'_{i'-2}$ è $(1 + \epsilon_2)(s - p'_{i'-2})$ $(\epsilon_2 < 1)$

e $\leq$ a questa è quella nei punti successivi di $o'$ dovuta a $o'$; così quella di $\Phi''_{1,s-1}$, $\Phi''_{1,p'_{i'-2}}$ nei punti generici di $o''$ è $\leq (2\epsilon_2 - 1)(s - p'_{i'-2}) < s - p'_{i'-2}$ e in $O''_1$ è $\leq 3\epsilon_2$; onde quella di $\Phi''_{2,s-1}$, $\Phi''_{2,p'_{i'-2}}$ nei punti generici delle $o''$ e $o''_1$ per $O''_2$ è $< s - p'_{i'-2}$. Di qui si può proseguire come in 1°;

9° $\nu = 1$ $\nu'_1 = 0$ $\nu'_{i'} = 0$. Si ricade nel 7° caso, oppure in uno dei casi: $\nu'_{i'-2} = 0$ $\nu'' = 1$ $\nu''_1 = 0$; $\nu'_{i'-3} = 0$ $\nu'_{i'-2} = 1$ $\nu'' = 1$ $\nu''_1 = 0$. Questi casi si riducono ancora al 4° o al 7° se non esiste una $\nu''_{j''} = 1$ per $j'' < i''$; se poi una tal $\nu''_{j''}$ esiste si può ripetere un ragionamento analogo a quello del caso precedente.

I casi che si dovevano esaminare sono così esauriti.

**12.** — Durante le operazioni eseguite possono essersi incontrati più punti $A^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_j\alpha+1)}$ trasformati di uno stesso $A^{(\lambda_1\mu_1\ldots\lambda_j\alpha)}$ $(\alpha \geq 0)$ (e, il che può riguardarsi caso particolare di questo, più punti A — in numero finito — sopra L); si può dire che possono essersi presentate *diramazioni* nella successione dei punti $s$-pli A. Per ciascuna di queste diramazioni si può ripetere quanto si è detto per una particolare qualunque nei n<sup>i</sup> prec., e sarà provato che si può abbassare, con un numero finito di operazioni, la multiplicità di tutti i punti trasformati di L solo dopo aver osservato che è finito il numero di queste diramazioni: ma ciò è evidente, perchè è certamente finito il numero di quelle cui corrisponde un ramo dell' intersezione di $F_{s-1}$ con una $F_k$, poichè sono in numero finito i rami di queste intersezioni che incontrano L senza appartenerle; e, quanto alle diramazioni per cui si verifichi l'altro caso (e questo si può ripetere anche pel primo), non esistono infinite diramazioni se, a gruppi, non hanno infiniti punti O comuni, e se quindi non può crescere indefinitamente il numero dei punti O di una (almeno) di esse, il che escludono i precedenti ragionamenti.

Noto terminando che la proposizione enunciata nel n° 1° mostra che le particolari trasformazioni usate sono un semplice artificio di ricerca: e che, senza alterare la sostanza delle operazioni, si potrà far uso di altre, purchè abbiano determinate linee e determinati punti come fondamentali, con conveniente generalità. Si potrà anche ricorrere a trasformazioni non Cremoniane.

## *Ossidazione delle idrazossime;*

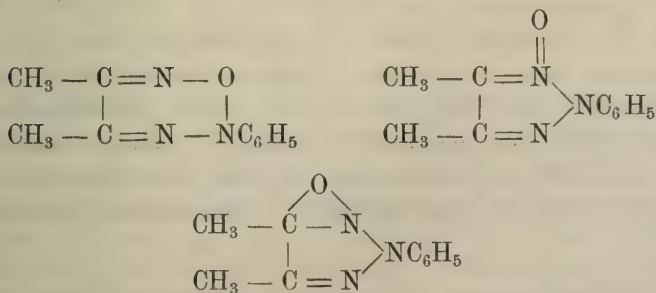
Nota del Dott. GIACOMO PONZIO.

In un mio lavoro pubblicato negli Atti di questa Reale Accademia delle Scienze (vol. XXXII), ho dimostrato come per l'azione del tetrossido d'azoto sugli isonitrosochetoni si ottengano gli acilderivati dei dinitroidrocarburi $R.CO.C(N_2O_4).R'$. Siccome la fenilidrazina reagendo su tali composti, che pure contengono il gruppo CO, non dà gli idrazoni corrispondenti, così ho tentato di preparare questi ultimi per via indiretta, facendo agire il tetrossido d'azoto sulle idrazossime.

La reazione va però in tutt'altro modo: avviene una ossidazione e si ottengono sostanze contenenti due atomi di idrogeno in meno delle idrazossime adoperate; le stesse sostanze si ottengono più convenientemente per azione dell' ossido di mercurio giallo sulle idrazossime.

Vista l'importanza dell'argomento descrivo ora, per prender data, le ricerche fatte partendo dalla diacetilidrazossima, abbenchè esse siano molto incomplete. La sostanza che si ottiene in questo caso è una base avente la formola grezza $C_{10}H_{11}N_3O$. Quale delle formole di costituzione:

$$\begin{array}{l} CH_3 - C = N - O \\ \qquad\;\; | \qquad\quad\;\; | \\ CH_3 - C = N - NC_6H_5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \qquad\qquad\quad\; O \\ \qquad\qquad\quad\; \| \\ CH_3 - C = N \diagdown \\ \qquad\;\; | \qquad\quad\;\; > NC_6H_5 \\ CH_3 - C = N \diagup \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad\quad\;\; \diagup O \diagdown \\ CH_3 - C - N \diagdown \\ \qquad\;\; | \qquad\quad\;\; > NC_6H_5 \\ CH_3 - C = N \diagup \end{array}$$

sia da accettarsi, spero di poter stabilire colle ricerche che ho in corso.

*Preparazione della base* $C_{10}H_{11}N_3O$ *col tetrossido d'azoto.* — Gr. 10 di diacetilidrazossima perfettamente secca e finamente polverizzata si sciolgono in circa 100$^{cc}$ di etere anidro, e dopo aver ben raffreddata la soluzione si aggiungono gr. 4,8 (quantità equimolecare) di tetrossido d'azoto. Si osserva tosto uno sviluppo gassoso, ed un aumento di temperatura che si modera con un miscuglio frigorifero, nello stesso tempo il liquido si colora in rosso e si separa una sostanza solida bianca che dopo circa un'ora si può raccogliere su filtro. Questa rappresenta il 10 % dell'idrazossima adoperata e per le sue proprietà fu riconosciuta per nitrato di diazobenzolo. All'etere filtrato si aggiunge acqua e si distilla (1), si svolge prima biossido di azoto, poi si separano fini aghi giallognoli di un nitroderivato della base fusibili a 232°-33°. Le ultime porzioni dell'etere passano gialle perchè contengono una piccola quantità di diacetile, infatti agitate con una soluzione acquosa di cloridrato di idrossilamina si decolorano e forniscono in tal modo la diossima del diacetile, fusibile a 234° con sublimazione. Eliminato tutto l'etere si aggiunge ancora altra acqua, si fa bollire per qualche tempo la massa semisolida bruna e dopo raffreddamento si filtra per separare il nitroderivato di cui sopra. Il filtrato si estrae ripetutamente con etere, la soluzione eterea seccata su cloruro di calcio e trattata con una corrente di acido cloridrico gassoso fornisce il cloridrato della base. Questo riscaldato a bagno maria si decompone e dà la base libera il cui peso rappresenta il 25 % dell'idrazossima adoperata.

*Preparazione della base* $C_{10}H_{11}N_3O$ *con ossido giallo di mercurio.* — Si sciolgono gr. 10 di idrazossima in circa gr. 100 di cloroformio secco e si scalda a ricadere con gr. 30 di ossido di mercurio giallo, aggiunto in due volte. L'ossidazione comincia subito con separazione d'acqua e, quando è completa, cioè dopo 8-10 ore, si distilla il solvente ed il residuo si estrae ripetute volte con acqua bollente, la quale lascia indisciolta una

---

(1) Si potrebbe anche distillare l'etere da solo, ma allora si formerebbe molto nitroderivato (circa il 12-15 %), il quale si forma anche, sebbene in quantità piccolissima, eliminando l'etere con una corrente d'aria secca.

resina. Svaporando poi l' acqua a bagno maria, si ottiene la base che si decolora con carbone animale. Il rendimento in questo caso è del 75 % dell'idrazossima impiegata.

La *base* $C_{10}H_{11}N_3O$ cristallizza dagli eteri di petrolio, dove è discretamente solubile a caldo e pochissimo a freddo, in splendidi aghi giallognoli, lunghi talora parecchi centimetri, e fusibili a 92°-93°.

I. Gr. 0,2600 di sostanza fornirono gr. 0,6037 di anidride carbonica e gr. 0,1412 di acqua.

II. Gr. 0,1948 di sostanza fornirono cc. 38 di azoto ($H_0 = 743,16$, $t = 15°$), ossia gr. 0,043793.

Cioè su cento parti

| | trovato | | calcolato per $C_{10}H_{11}N_3O$ |
|---|---|---|---|
| | I | II | |
| Carbonio | 63,40 | — | 63,50 |
| Idrogeno | 6,03 | — | 5,82 |
| Azoto | — | 22,48 | 22,22 |

La sua grandezza molecolare determinata col metodo ebulliscopico, impiegando come solvente l'etere, corrisponde alla formola semplice:

| Sostanza | Concentrazione | Innalzamento | Peso molecolare | |
|---|---|---|---|---|
| | | | trovato | calc. per $C_{10}H_{11}N_3O$ |
| Gr. 0,4576 | 1,10 | 0°,126 | 185,1 | 189 |

È solubile a freddo in tutti i solventi organici ed anche un po' nell'acqua.

Ha debolissimo carattere basico: sciolta in etere anidro e trattata con acido cloridrico gassoso separa un cloridrato fusibile verso 120° con decomposizione. Questo è solubilissimo nell'acqua, dalla quale però è rapidamente decomposto con separazione della base; in ambiente secco perde lentamente acido cloridrico. Varie analisi dimostrano che esso ha la formola $C_{10}H_{11}N_3O . HCl$ e che quindi la base è monoacida (trovato $Cl = 14,88$; 14,92, calcolato $Cl = 15,73$ %).

La base non reagisce nè con fenilidrazina, nè con anidride

acetica, nè con ioduro di metile; invece fornisce molto facilmente con acido nitrico un nitroderivato e con permanganato potassico un acido monocarbonico.

È ridotta molto facilmente in soluzione alcoolica dall'idrogeno nascente (zinco ed acido cloridrico), trasformandosi in dimetilfenilosotriazolo, $(CH_3)_2(C_2N_3).C_6H_5$, cristallizzabile dall'alcool acquoso in prismetti bianchi, di odore basico e fusibili a 34°-35°.

I. Gr. 0,2193 di sostanza fornirono gr. 0,5577 di anidride carbonica e gr. 0,1321 di acqua.

II. Gr. 0,1677 di sostanza fornirono cc. 34,7 di azoto ($H_0$ = 748,28, t = 16°) ossia gr. 0,040344.

Cioè su cento parti:

| | trovato | | calcolato per $C_{10}H_{11}N_3$ |
|---|---|---|---|
| | I | II | |
| Carbonio | 69,36 | — | 69,36 |
| Idrogeno | 6,69 | — | 6,35 |
| Azoto | — | 24,05 | 24,27 |

Per confermare che si tratta realmente del dimetilfenilosotriazolo, ne ho fatto il dinitroderivato secondo le indicazioni di Pechmann (1) ed ho trovato che si fonde precisamente a 139°.

In questa occasione ho potuto anche notare che il dimetilfenilosotriazolo si nitra molto facilmente già coll'acido nitrico commerciale (d = 1,37); infatti basta scaldare leggermente perchè tosto si separi una sostanza solida, che raccolta e cristallizzata dall'alcool (dove è pochissimo solubile a caldo e quasi affatto a freddo) si presenta in finissimi aghetti giallognoli, fusibili a 227° con sublimazione. Essa non è altro che il mononitrodimetilfenilosotriazolo $(CH_3)_2(C_2N_3).C_6H_4.NO_2$.

I. Gr. 0,1469 di sostanza fornirono gr. 0,2966 di anidride carbonica e gr. 0,0615 di acqua.

II. Gr. 0,2198 di sostanza fornirono cc. 51 di azoto ($H_0$ = 738,72, t = 23°), ossia gr. 0,056417.

---

(1) " Annalen ", 1891, *262*, 307.

Cioè su cento parti:

| | trovato I | trovato II | calcolato per $C_{10}H_{10}N_4O_2$ |
|---|---|---|---|
| Carbonio | 55,06 | — | 55,04 |
| Idrogeno | 4,65 | — | 4,58 |
| Azoto | — | 25,66 | 25,68 |

Questo mononitroderivato è pure quasi insolubile negli ordinari solventi organici, ed è identico col nitroderivato del dimetilfenilosotriazolo preparato da Pechmann con acidi nitrico e solforico a caldo e da lui ritenuto come un trinitroderivato (1).

La base $C_{10}H_{11}N_3O$ forma pure facilmente un *bromoderivato* $C_{10}H_{10}N_3OBr$, che si ottiene per azione dell'acqua di bromo e scaldando leggermente. Esso cristallizza dall' alcool acquoso in aghi leggierissimi, appena giallognoli e fusibili a 152°-53°.

Gr. 0,1885 di sostanza fornirono gr. 0,1543 di bromuro d'argento.

Cioè su cento parti:

| | trovato | calcolato per $C_{10}H_{10}N_3OBr$ |
|---|---|---|
| Bromo | 34,80 | 34,77 |

È solubilissimo nell'acetone, benzina ed etere, pochissimo a freddo nell'acqua e nella ligroina.

Ridotto con zinco ed acido cloridrico in soluzione alcoolica dà un *bromodimetilfenilosotriazolo*, che cristallizza dall'alcool in prismetti bianchi, fusibili a 109°-110°.

Gr. 0,2001 di sostanza fornirono gr. 0,1473 di bromuro di argento.

Cioè su cento parti:

| | trovato | calcolato per $C_{10}H_{10}N_3Br$ |
|---|---|---|
| Bromo | 31,34 | 31,73 |

(1) " Annalen ", 1891, *262*, 307.

Quest'ultimo si forma pure per azione diretta dell'acqua di bromo sul dimetilfenilosotriazolo, si scioglie a caldo negli eteri di petrolio e nell'acqua, ed a freddo in tutti gli altri solventi organici.

È volatile col vapore ed in esso il bromo, come nel bromoderivato della base $C_{10}H_{11}N_3O$, è probabilmente attaccato al fenile.

*Nitroderivato dèlla base* $C_{10}H_{11}N_3O$. Si forma sciogliendo la base in acido nitrico concentrato. Cristallizzato dall' alcool, dove è poco solubile a caldo e pochissimo a freddo, si ha in finissimi aghi giallognoli fusibili a 232°-33°.

I. Gr. 0,2723 di sostanza fornirono gr. 0,5148 di anidride carbonica e gr. 0,1117 di acqua.

II. Gr. 0,1898 di sostanza fornirono cc. 39,2 di azoto ($H_0 = 749,28$, $t = 14°$), ossia gr. 0,045637.

Cioè su cento parti:

| | trovato | | calcolato per $C_{10}H_{10}N_4O_3$ |
|---|---|---|---|
| | I | II | |
| Carbonio | 51,56 | — | 51,28 |
| Idrogeno | 4,55 | — | 4,23 |
| Azoto | — | 24,04 | 23,93 |

È insolubile a freddo nell' acqua e negli eteri di petrolio, poco solubile nell'acetone e nella benzina, molto nel cloroformio.

*Dimetilamidofenilosotriazolo* $(CH_3)_2(C_2N_3)C_6H_4.NH_2$. Si ottiene riducendo con zinco ed acido cloridrico il nitroderivato della base $C_{10}H_{11}N_3O$ sospeso in alcool, e cristallizza dall'alcool acquoso in prismetti leggermente colorati, fusibili a 123°-24°. È poco solubile a freddo in acqua, benzina e ligroina; solubilissimo negli altri solventi organici.

Il *cloridrato* $(CH_3)_2(C_2N_3)C_6H_4NH_2.HCl$, ottenuto trattandone la soluzione eterea con acido cloridrico gassoso è una sostanza bianca, solubilissima nell'alcool, non deliquescente e che si decompone verso 240°.

Gr. 0,4020 di sostanza fornirono gr. 0,2573 di cloruro di argento.

Cioè su cento parti:

| | trovato | calcolato per $C_{10}H_{13}N_4Cl$ |
|---|---|---|
| Cloro | 15,50 | 15,81 |

L'*acetilderivato* $(CH_3)_2(C_2N_3)C_6H_4 . NH(C_2H_3O)$ si ottiene con una reazione abbastanza energica mescolando l'amidoderivato colla quantità teorica di anidride acetica e cristallizza dall'alcool in splendidi aghi fusibili a 189° e contenenti una molecola di solvente, che perdono nel vuoto dopo 3 o 4 giorni, e dopo qualche ora a 100°.

I. Gr. 0,2740 di sostanza, seccata a 100°, fornirono gr. 0,6302 di anidride carbonica e gr. 0,1560 di acqua.

II. Gr. 0,1820 di sostanza, seccata a 100°, fornirono cc. 38,2 di azoto ($H_0 = 754,03$, $t = 16°$), ossia gr. 0,044471.

Cioè su cento parti:

| | trovato | | calcolato per $C_{12}H_{14}N_4O$ |
|---|---|---|---|
| | I | II | |
| Carbonio | 62,72 | — | 62,60 |
| Idrogeno | 6,32 | — | 6,08 |
| Azoto | — | 24,37 | 24,34 |

È insolubile nell'acqua e negli eteri di petrolio, poco solubile nella benzina, solubile invece negli altri solventi organici.

*Acido monocarbonico* $C_9H_8N_3O . CO_2H$. Si ottiene sciogliendo gr. 2 di base $C_{10}H_{11}N_3O$ in acqua, ed aggiungendo a poco a poco gr. 100 di soluzione di permanganato potassico al 5 %. La reazione si compie scaldando a bagno maria; quando è completa si decolora il liquido con acido solforoso e si estrae con etere l'acido monocarbonico, il quale cristallizzato dalla ligroina, ovvero dall'alcool, dove è abbastanza solubile a caldo e poco a freddo, si presenta in finissimi aghi bianchi fusibili a 93°.

I. Gr. 0,1949 di sostanza fornirono gr. 0,3914 di anidride carbonica e gr. 0,0766 di acqua.

II. Gr. 0,2452 di sostanza fornirono cc. 40,7 di azoto ($H_0 = 742,17$, $t = 16°$), ossia gr. 0,046628.

Cioè su cento parti:

| | trovato | | calcolato per $C_{10}H_9N_3O_3$ |
|---|---|---|---|
| | I | II | |
| Carbonio | 54,76 | — | 54,79 |
| Idrogeno | 4,37 | — | 4,10 |
| Azoto | — | 19,01 | 19,17 |

È un po' solubile in acqua, solubilissimo in etere, cloroformio ed acetone.

Per arrivare all'omologo superiore $C_{11}H_{13}N_3O$ della base ora descritta, ho dovuto preparare dapprima la

β, α-*acetilpropionilidrazossima* $CH_3.C(N_2HC_6H_5).C(NOH).C_2H_5$, la quale non era ancora conosciuta. Questa si ottiene semplicemente facendo reagire in soluzione alcoolica quantità equimolecolari di isonitrosometilpropilchetone e fenilidrazina, e cristallizza dall'alcool acquoso in finissimi aghi appena colorati in giallognolo, fusibili a 132°-33°.

Gr. 0,1313 di sostanza fornirono cc. 23 di azoto ($H_0 = 744,92$, $t = 15°$) ossia gr. 0,026550.

Cioè su cento parti:

| | trovato | calcolato per $C_{11}H_{15}N_3O$ |
|---|---|---|
| Azoto | 20,23 | 20,48 |

Questa idrazossima dà la reazione di Pechmann con acido solforico e cloruro ferrico, è insolubile in acqua ed in eteri di petrolio, solubile in alcool, etere e benzina.

Sciolta in cloroformio e scaldata per varie ore con ossido di mercurio giallo fornisce la base $C_{11}H_{13}N_3O$ la quale è liquida anche a temperature inferiori allo zero. Non distilla inalterata neanche a bassa pressione, forma un cloridrato insolubile nell'etere, ma decomponibile coll'acqua. L'acido nitrico la trasforma

facilmente in un nitroderivato $C_{11}H_{12}N_4O_3$ che cristallizza dall'alcool, dove è poco solubile a caldo e discretamente a freddo, in laminette giallognole, fusibili a 151°-52°.

Gr. 0,1106 di sostanza fornirono cc. 21,3 di azoto ($H_0$=747,16, t = 15°), ossia gr. 0,024661.

Cioè su cento parti:

| | trovato | calcolato per $C_{11}H_{12}N_4O_3$ |
|---|---|---|
| Azoto | 22,29 | 22,58 |

Torino. Laboratorio di Chimica generale della R. Università. Dicembre 1897.

---

*L'Accademico Segretario*
ANDREA NACCARI.

# CLASSE

DI

# SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

---

## Adunanza del 12 Dicembre 1897.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

---

Sono presenti i Socii: Claretta Direttore della Classe, Peyron, Rossi, Manno, Bollati di Saint Pierre, Pezzi, Cognetti de Martiis, Cipolla, Brusa, Perrero e Nani, Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della precedente seduta.

Il Presidente annuncia che il Socio Cipolla ha assunto l'incarico, affidatogli dalla Presidenza, di commemorare il defunto Socio nazionale non residente Abate D. Luigi Tosti.

Vengono, a nome dei rispettivi autori, presentate le seguenti pubblicazioni:

1° Dal Socio Manno, il 2° vol. degli *Studii storici sul Contado di Savoia e Marchesato in Italia* (Torino, 1897), del conte C. Alberto de Gerbaix-Sonnaz, nonchè *La Ville de Nice pendant le premier siècle de la domination des Princes de Savoie* (Turin, 1898), del conte E. Cais di Pierlas. Il Socio Manno brevemente discorre dell'importanza e dei pregi di ciascuna di queste due opere.

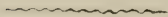
2° Dal Socio Cognetti de Martiis, *Il prezzo ed il commercio degli olii d'oliva di Gallipoli e di Bari* (Trani, 1897), del-

l'avv. prof. Carlo Massa. Il Socio Cognetti dà un cenno sommario del contenuto di questo lavoro.

3° Dal Socio Segretario della Classe: *a*) due volumi del Socio Cognetti de Martiis, *I due sistemi della politica commerciale* (Torino, 1896-97); *b*) tre opere del Socio corrispondente Can. Ulisse Chevalier: *Le chanoine Albanés, Bio-bibliographie* (Romans, 1897); *Actes anciens et documents concernant le bienheureux Urbain V Pape* (Paris, 1897); *Repertorium hymnologicum* (Louvain, 1894); *c*) *Die Geld-Verrichtungen*, del sig. J. Hucke (Berlin, 1897).

Il Presidente dà comunicazione del telegramma di felicitazione da lui spedito, a nome dell'Accademia, al Socio straniero T. Mommsen, in occasione del compimento del suo 80° anno, insieme colla lettera di ringraziamento ricevutane.

Quindi il Socio Claretta presenta e legge una nota del marchese Stanislao Cordero di Pamparato, intitolata: *Il matrimonio del Duca Vittorio Amedeo III di Savoia coll'Infanta Maria Antonia Ferdinanda di Spagna.*

Detta nota verrà inserita negli *Atti.*

# LETTURE

## *Il matrimonio del Duca Vittorio Amedeo III di Savoia coll'Infanta Maria Antonia Ferdinanda di Spagna;*

Nota di STANISLAO CORDERO DI PAMPARATO.

Gli screzii e le inimicizie, che durante il regno di Filippo V erano state cagione che venissero affatto interrotte le relazioni diplomatiche fra le corti di Spagna e di Sardegna, avevano cessato di sussistere allora appunto quando (1746) Ferdinando VI era salito al trono. Le vicende della guerra che si combatteva per la successione al trono d'Austria, se avevano ritardato la ripresa delle buone relazioni fra le due dinastie, non erano state d'ostacolo a che il Re cattolico, prima ancora del trattato d'Aquisgrana, si fosse dimostrato nutrire ferma intenzione di vivere nel miglior accordo possibile con Carlo Emanuele III suo zio e di voler ristringere i vincoli di parentela mercè il matrimonio dell'Infanta Maria Antonia Ferdinanda col Duca Vittorio Amedeo di Savoia. Già erano state intavolate in modo più o meno ufficioso varie trattative, le quali se dalla parte della Corte di Madrid male dissimulavano il vivissimo desiderio di giungere a favorevole conclusione, dall'altra invece, benchè accarezzate con grande compiacenza, non avevano ottenuto alcun pratico risultato.

Infatti nel giugno dell'anno 1748 il conte Borrè de la Chavanne, ministro sardo alla corte d'Olanda e plenipotenziario al Congresso d'Aquisgrana, riferiva come il Marchese di Sotto-Major, rappresentante del Re di Spagna, avesse destramente fatto cenno del matrimonio, dichiarando però di parlare non in nome della sua Corte, cui non s'addiceva prendere alcuna iniziativa, ma in proprio. Sforzavasi poi di dimostrare i grandi vantaggi che sarebbero venuti alle due dinastie contraenti per

mezzo di un eventuale trattato, che, qual logica conseguenza del matrimonio, avrebbe potuto reciprocamente tutelare contro sorprese possibili per parte di Vienna e il re Carlo Emanuele e l'Infante D. Filippo, cui era stato destinato il Ducato di Parma. Pochi giorni dopo, e questa volta in modo ufficiale, lo stesso ministro del Re cattolico era tornato sull'argomento, ed aveva comunicato una lettera del Marchese della Ensenada, già intendente dell'esercito di Don Filippo ed ora ministro per la guerra, marina e finanze, colla quale s'ordinava relativamente a quelle trattative che *franchissant toute cérémonie* se ne facesse al conte della Chavanne *l'ouverture tellement claire, qu'il devoit expressement me dire que ce seroit pour S. M. son plaisir inexprimable de pouvoir réunir les deux maisons pour un nouveau lien; celle de son auguste mère lui étant toujours fort chère par son effet de l'estime et de la vénération qu'il lui conservoit, et il souhaitoit beaucoup pouvoir donner des preuves réelles et de pratiquer à son oncle, comme il le feroit certainement dans toutes les occasions qui s'en presenteroient favorables: eternellement determiné à lui donner des temoignages de bonne volonté, désirant beaucoup aussi que tous ses frères entrent dans son amitié et dans son alliance, chose qu'il espère avoir lieu en effet. Et qu'enfin il devoit me dire que je pouvois donner avis de tout ce que dessus à V. M.* Si diceva ancora nella stessa lettera di *tâcher d'exécuter cet ordre le plus tôt possible et d'en rendre compte sans le moindre retardement, le roi ayant extrêmement à cœur cette affaire* (1).

La risposta a questa comunicazione non si faceva troppo attendere da Torino, ed era la seguente: premessi complimenti e proteste d'amicizia e la dichiarazione di nutrire vivissimo desiderio di poter entrare in corrispondenza col Re cattolico e di vivere con lui in perfetto accordo, si dichiarava di non volere assumere impegni relativamente al matrimonio del Duca di Savoia, prima che il trattato di pace non fosse concluso per vedere come in esso sarebbero trattati gl'interessi dello Stato Sardo. *Vous pouvez ajouter comme de votre chef,* soggiungeva il Re nel suo dispaccio, *que vous êtes porté à croire que le choix que nous ferons d'une princesse dépendra beaucoup du plus ou du*

(1) Arch. di Stato di Torino, negoziazioni con Austria, mazzo 6° d'add. Lettere del Conte della Chavanne.

*moins que nous verrons que les Cours qui en ont à marier seront disposées à contribuer à nos avantages et à nos convenances* (1).

Contemporaneamente lo stesso Marchese della Ensenada tentava giungere allo stesso risultato per altra via, servendosi cioè dell'opera del conte Antonio Gioseffo della Torre di Rezzonico. Costui, Milanese di nascita e nipote del Cardinale Guidobono Cavalchini, era in origine ufficiale nelle truppe imperiali; ma, essendo incorso nella disgrazia della sua Sovrana, era passato a servire nell'esercito spagnuolo, nelle cui file aveva militato durante l'ultima guerra. Egli si rivolgeva al Barone di Carpenè già ministro a Madrid chiedendo un salvocondotto (che gli veniva negato) per entrare nei dominii del Re di Sardegna, affine di sbrigare alcuni incarichi, che diceva tenere dal suo monarca e di tutta soddisfazione di Carlo Emanuele III. Per mezzo del Cardinale Cavalchini faceva in seguito esporre al Marchese del Carretto di Gorzegno, che, dopo la morte del Marchese d'Ormea, occupava la carica di Ministro per gli affari esterni, come scopo della sua commissione, fosse di esporre a S. M. Sarda il comune desiderio dei Reali di Spagna di collocare in matrimonio col Duca di Savoia. S. A. R. l'Infante Maria Antonia, assicurando che tanta era la brama di quei principi di vedere effettuate tali nozze, che verrebbero accordate tutte le desiderabili convenienze. Ma anche l'intromissione del porporato non riusciva ad ottenere pel Rezzonico, che si vantava d'avere aderenze ed appoggi di molta importanza, il desiderato salvocondotto. Ond'egli si rivolse direttamente al Marchese di Gorzegno, e dopo aver magnificate le virtù della principessa e la sua dote cospicua, credette bene soggiungere: *Per ora le basti sapere che quando sono partito da Aranjuez, le ultime parole dettemi dal padre Ravago, confessore del Re, furono queste: El marques de la Ensenada me ha dicho de assigurarte que si azes algo en esto assumpto has gañado mas que in veinte año de servicio.* Ma neppure questa volta al Rezzonico era concessa la soddisfazione di vedere appagato il suo desiderio e di poter compiere la sua missione; e ciò specialmente per due ragioni. La Corte di Torino, messa in sospetto dalle mene di questo ufficiale spagnuolo, per vie indirette faceva interpellare Don Giuseppe de Caravajal y Lan-

(1) Arch. di Stato di Torino, lettere Ministri. Olanda ad ann. 1748.

caster Ministro per le relazioni esterne a Madrid, e questi in termini piuttosto risentiti sconfessava l'opera del Conte milanese, fors'anche perchè il progetto aveva naufragato. Intanto però D. Emanuele de Sada, che già ambasciatore a Torino ed ora intermediario in questa faccenda, si trovava a Chamberì al seguito di D. Filippo, inculcava di essere in certo qual modo incaricato ufficiosamente di fare proposte concrete in tal materia. L'altro motivo che contribuì a far naufragare il tentativo del Rezzonico, vuolsi ricercare in un biglietto da lui annesso alla già accennata lettera scritta al gran Cancelliere di Sardegna e che dovette senza dubbio strappare al Marchese di Gorzegno, la cui onestà ed integrità erano a tutta prova, un fremito di sdegno. Tal documento, troppo curioso ed importante, sì da meritare d'esser qui riprodotto, diceva:

*Ho l'arbitrio da più d'una Reale persona di esibire una ragguardevolissima somma di contanti a quel ministro che farà succedere il consaputo matrimonio. Per questo punto, supponeva che la lettera originale del March. F..... che V. E. avrà avuta (anzi so aver avuta e rimandata al Cardinale mio zio) le ne desse già qualche lume, ma come tali cose si debbono porre in chiaro prima di sentire la minore disposizione di accettarla? Per provare quanto ho l'onore di dire a V. E. io le farò leggere gli originali dei biglietti dei Sovrani, li di cui caratteri saranno ben noti a V. E., le lettere del March. Scotti, Fogliani e P. Ravago. Il denaro è a negociò fatto ed io non ho stretta la mano a mille pezze più o meno e siccome stimo che vi sarebbe tutto il vantaggio di S. M. Sarda, così mi lusingo che anche col tacito consenso di S. M., V. E. potrebbe accettare il regalo. Vegga, Ecc.mo padrone, se per tanto interesse che mi prendo a favore di S. M. Sarda mi si nieghi l'accesso o per meglio dire il transito per i suoi stati, mentre, avanti Dio, credo che nè la Spagna nè S. M. Sarda possino fare il migliore negozio. Dirò all'E. V. che quando non fossimo nel caso di discorrere presentemente di questo affare proporrò altre cose, mentre ritorno a Madrid a prendere dall'Infante Cardinale la Croce di San Jago* (1).

Ma il Rezzonico non era uomo da smarrirsi d'animo; anzi dall'insuccesso sembra traesse nuova lena per porre mano a

(1) Lettere del Conte Rezzonico, Arch. di Stato, negoziazioni con Austria.

nuovi intrighi. Mentre nel dicembre dell'anno 1748 e successivo gennaio sedeva in Nizza il Congresso chiamato a chiarire e definire alcuni punti del trattato di Aquisgrana, egli si presentò al Marchese Solaro di Breglio, Delegato del Re Carlo Emanuele ed aio e governatore del Duca Vittorio Amedeo, e ricominciò a sciorinare il solito progetto, i vantaggi che sarebbero derivati da tale unione, senza dimenticare la famosa offerta del vistoso regalo per parte della Regina madre e del Re di Napoli. Al plenipotenziario piemontese non erano ignote le vicende di queste trattative; aveva di più avuto modo di persuadersi che, sconfessato in apparenza, il Rezzonico agiva per ordine del suo governo e più che altro mirava a scoprire le idee che si avevano a Torino a tal proposito. Si limitò quindi a dichiarare che tali negozi si potevano con miglior frutto trattare a relazioni stabilite definitivamente fra le due Corti; per conto suo non avere istruzioni in proposito, e con tutto il rispetto dovuto alla maestà della Regina madre e del Re di Napoli, egli altro non cercava che l'interesse del suo Sovrano. Non mancava poi di osservare, come potesse apparire per lo meno assai strano, che a Madrid tanto si desiderasse il matrimonio e tanto se ne parlasse, mentre appunto una parte dei dominii dello sposo era angariata ed oppressa dalle truppe spagnuole (1).

Conviene notare come la posizione del Delegato sardo al Congresso di Nizza fosse assai curiosa. Appena il Maresciallo di Bellisle, rappresentante il Re cristianissimo, aveva potuto congetturare che la Corte di Torino non aveva impegni di sorta per dar moglie al principe ereditario, non aveva mancato di far sentire al Marchese di Breglio ed al Conte di Roubion, come a Parigi si sarebbe veduta volentieri l'unione del Duca di Savoia con una principessa di Francia. Pochi giorni dopo il Conte Muratori, ministro di Modena, aveva detto chiaramente (ed il Marchese di Breglio sospettava non senza fondamento, per inspirazione avuta), che le idee di Francia erano di dare la Toscana all'Infante Don Filippo di Parma, ed al Re di Sardegna il Ducato di Milano, quale compenso dell' unione desiderata fra le due

(1) Arch. di Stato, negoziazioni con Austria, mazzo 8° d'add.

dinastie mercè di questo matrimonio. È vero che già a questo proposito s'erano intavolate trattative, non però molto apertamente, sino dai tempi in cui il Champeaux era stato mandato per ben due volte a Torino per indurre Carlo Emanuele III a staccarsi dai suoi alleati ed accostarsi a Francia. In tale circostanza erasi pure ventilato il progetto di far sposare al Delfino una principessa di Savoia, e già a Parigi se ne discorreva con una certa insistenza, tanto che il Conte di Mongardino, incaricato di fungere da ambasciatore presso il Re Cristianissimo, si era creduto in dovere di informarne il Marchese di Gorzegno, perchè ne riferisse al Re. Questi non sarebbe forse stato alieno dal concedere il suo assenso a tal unione, ma assolutamente si rifiutava a comperare *la satisfaction de cette alliance par un sacrifice du véritable et solide intérêt de son état* (1). Onde, dopo aver fatto comprendere di non ambire affatto la parte di mediatore fra le potenze contendenti, che, forse per adescarlo, gli si voleva conferire da Francia, incaricava il già detto Conte di Mongardino di partecipare al Ministro del Cristianissimo che, sebbene lietissimo di ristringere i già esistenti vincoli di parentela, non avrebbe mai acconsentito a tradire gl'interessi del suo Stato, nè tampoco sarebbe venuto meno agli impegni contratti coi suoi alleati. Circa alle trattative di pace, dichiarava di non intendere affatto di partecipare a congressi, se non col concorso di coloro, coi quali aveva fatto causa comune durante la campagna (2).

Naturalmente a Parigi, ove per non pochi segni sembrava si volesse giuocare a partita doppia, queste franche e recise osservazioni non potevano tornare accette, e quindi del matrimonio non s'ebbe più a parlare. Anzi si giunse persino ad insinuare al re, che Carlo Emanuele fosse nemico acerrimo di Francia. Ben a ragione adunque poteva il Marchese di Gorzegno scrivere che si sarebbero ingannati coloro i quali avessero creduto che *pour prouver manifestement le contraire S. M. pût se résoudre à manquer aux engagements pris avec ses alliés ou à sacrifier les véritables intérêts de son état.* E più tardi: *On a tant parlé de ce*

---

(1) Arch. di Stato, lett. Ministri Francia, anno 1746.
(2) Lettere Ministri Francia.

*mariage dans la seule vue de nous porter insensiblement à laisser appercevoir des idées contraires à nos intérêts et à nos engagements. Nous avons pourtant la satisfaction de n'en avoir fait connaître aucune de cette nature* (1).

Nel Giugno dell'anno 1748 la voce di tal matrimonio era tornata a circolare insistente sì a Parigi che a Torino: onde l'Agente diplomatico stimava darne avviso al Marchese di Gorzegno, narrando come anche la stessa Madama di Pompadour ne avesse tenuto discorso colla Principessa di Carignano. Strana combinazione! a lei pure si era rivolto l'Ambasciatore di Spagna Barone de la Cerda, onde facesse buoni uffizi presso Carlo Emanuele per indurlo a scegliere invece l'Infanta.

Ma il Re di Sardegna, oltre alla ragione politica, cercava in colei, che doveva andar sposa a suo figlio, anche quelle doti morali che tanto giovano alla felicità della famiglia. Incaricava pertanto il Conte di Mongardino di raccogliere e trasmettere tutte le informazioni che gli fosse stato possibile avere sì dal lato della salute, che dall'aspetto, inclinazioni e costumi delle Principesse Francesi e dell'Infanta stessa (2).

Il marchese di Breglio stava in guardia dal lato di Parigi anche per il fatto che *l'idea prevalente era di annettersi la tanta agognata Savoia e ridurre il Piemonte in condizione di stringersi indissolubilmente alla Francia e di temer che il Re di Sardegna, volgendosi a Spagna per dare una sposa a suo figlio, venga a stringere con questa potenza e coll'Inghilterra un accordo che valga ad intralciare o frustrare certe mire sull'Italia.* E su questo punto la Corte di Vienna si lasciava trascinare dalla diplomazia di Luigi XV; si parlava anzi con una certa insistenza del futuro matrimonio di un Arciduca, al quale si faceva balenare il miraggio dell'elezione a re dei Romani, con una principessa di Francia (3).

Il Conte di Brown, Delegato imperiale, aveva anch'esso tenuto parola al Marchese di Breglio in favore di un'Arciduchessa, ma il Governatore dello sposo tanto ricercato aveva

---

(1) Lettere Ministri Francia.

(2) Cfr. lettere Ministri Francia, anno 1748.

(3) Arch. di Stato, negoziazioni con Austria.

risposto che *Monseigneur n'étoit pas pressé,* e che pensava più ad andare a caccia che a prender moglie. Di ripicco l'Austriaco aveva soggiunto che, quando il momento di dar moglie al Duca fosse venuto, era da desiderarsi fosse stata prescelta una Arciduchessa. Al che il Marchese di Breglio aveva risposto esser noto l'attaccamento del Re di Sardegna e della sua Corte per la Casa d'Austria; però v'era luogo a temere che l'Arciduchessa primogenita, fosse troppo giovane. *Je vois,* concludeva il Delegato piemontese nel suo dispaccio al Re, *qu'il me seroit aisé de trouver trois femmes pour S. A. R.; je voudrois bien qu'il me fût aussi facile d'avoir trois maris pour Mesdames.*

Terzo finalmente, se non fra cotanto senno, fra tanti insistenti, era, manco a dirlo, il Marchese di La-Mina, ambasciatore spagnuolo, il quale spesso e volentieri avviava il discorso sul solito tema. Un giorno, passeggiando col Marchese di Breglio sui bastioni di Nizza, era uscito in queste parole, stringendogli forte la mano: *Amigo, se la vostra Corte lo vuole, saremo buoni parenti, buoni amici, e buoni alleati.* Un' altra volta, in occasione che i due plenipotenziarii si erano abboccati per stabilire accordi circa il passaggio pel Piemonte degli Infanti di Parma, che dalla Francia si dirigevano ai loro dominii, era tornato sull'argomento, e sorridendo aveva detto al Solaro di Breglio: *Onde quieren ir che mas valga?* (il che tradotto, in poche parole voleva significare: Dove troverete voi pel Duca di Savoia una sposa migliore dell'Infanta?); e questi accomiatandosi, rispondeva di comprendere benissimo sì il senso letterale come l' allegorico della frase spagnuola. E, pregato, rendeva conto esattissimo di questa conversazione, segnalando ancora come lo stesso Marchese La Mina una sera in cui si trovava solo con alcuni ufficiali spagnuoli, al Governatore di Nizza, generale Chevallos, che aveva esclamato: *bisogna sposare l'Infanta in Piemonte;* avesse risposto: *la pace sta per essere conclusa, e di norma viene sempre seguita da matrimonii; attendiamo dunque di vedere quello che succederà.*

Di fronte a tante e sì replicate profferte, era naturale che Carlo Emanuele III, per evitare mentre duravano le trattative, i cavilli ed i risentimenti delle Corti posposte, si volesse mantenere nel più stretto riserbo, ed in questo senso dettasse le istruzioni, che si trasmettevano a colui che in Nizza era fatto

segno a tante premurose offerte (1); benchè in cuor suo inclinasse già da tempo per l'Infanta di Spagna.

Sino dall'anno 1747 infatti il Conte Conziè de la Charmette mandava, richiesto, segrete e minutissime informazioni sulla Corte di Spagna e sulle condizioni politiche di quel regno. Nel dicembre dell'anno 1748 il Marchese di Breglio spediva da Nizza un messo a Madrid, che procurasse di scoprire quali fossero in realtà le condizioni sanitarie della Regina regnante, tormentata secondo gli uni da una eccessiva pinguedine, che inspirava il timore di conseguenze letali, e secondo gli altri da tumori al fegato, non che sulle qualità dell' Infanta stessa. Per eseguire questa incumbenza, il messaggiero aveva ricevuto una lettera commendatizia per Gaetano Pompeo Basteris, detto Perini, Bolognese, virtuoso di camera e cappella del Re di Sardegna, e nella sua qualità di tenore, impegnato al Teatro d'Opera della capitale di Spagna. Questo inviato, di cui non sapresti trovare il nome, fingendosi ammalato, aveva chiesto le cure del medico di Corte Don Vincenzo Montagna, Veneziano di nascita, il quale messo sul discorso, confermava pienamente le informazioni che già si erano raccolte per mezzo del citato musico Basteris, intorno alla salute della Regina. *Circa all'Infanta* poi, assicurava essere *di buona costituzione, e se mai ella si fosse maritata e fosse andata in un paese dove l'aria non fosse così sottile come quella di Madrid, si sarebbe ingrassata e diventata una donna proporzionata, cioè nè troppo grassa, nè troppo magra: per far figliuoli è andalosa e tanto basta.* Rispetto alle doti fisiche e morali della giovane principessa, si scriveva: *la medesima è di statura mediocre, di corporatura delicata, di colore bruno bensì, ma chiaro ed un poco colorito. Ha due occhi neri e ben aperti; la bocca ed il naso proporzionati alla faccia, la quale è di circonferenza piuttosto ovata che rotonda; ha il collo un poco lungo e sottile, il petto e le spalle ben proporzionate al suo corpo..... La sua fisonomia è sostenuta, ma con tutto ciò si conosce un'aria di*

---

(1) " Que si les ruses devenant inutiles on venoit vous parler ouver-" tement du mariage en question vous avez tojours la défaite. Que quoique " nous ayons bien à cœur l'établissement de notre fils, nous avons cependant " bien résolu de ne point nous en occuper jusqu'à ce que nous ne voyons " tout à fait la paix affermée „ (Il Re al March. di Breglio, 8 genn. 1749).

*bontà. Ella, secondo le notizie avute, è affabile e graziosa, d'un umore eguale, spiritosa, riservata nel suo discorso, insomma docile in tutto, canta a meraviglia e di buona sanità e robustezza* (1).

Intanto i lavori del Congresso erano giunti al termine; i plenipotenziarii stavano disponendosi a lasciare Nizza e far ritorno alle loro Corti, e con ciò volgeva al suo fine anche il periodo di completo riserbo imposto ed osservato scrupolosamente dal Marchese di Breglio. Pure non sembrava inutile al delegato del re Carlo di tirar bene le cose al sodo, per essere in grado di illuminare il Sovrano, allorquando fosse a Torino. Onde, trovandosi una mattina in conferenza col ministro Spagnuolo, fece destramente cadere la conversazione sul ben noto argomento, e dichiarò di pensare come male s'addicesse al loro carattere ed alla loro età il seguire una linea di condotta, che potesse lasciare insoluti per equivoco, o per mancanza di spiegazioni certi argomenti. Per la qual cosa egli credeva suo preciso dovere di affermare come, all' infuori dei negozi relativi alla pace, non avesse assolutamente altra maniera di mandato. Il Marchese di La-Mina allora lo accertò di trovarsi esso pure in identica condizione e le sue parole, checchè se ne dubitasse, erano unicamente inspirate ad un'idea del tutto personale. Egli si rendeva esatto conto della delicatezza della situazione, e, quantunque potesse assicurare che quanto alla persona dell'Infanta non vi fossero confronti possibili, era persuaso che la Spagna non avrebbe certo potuto offrire i vantaggi di Francia. Però, allorquando si era trattato del matrimonio dell' Infante Don Carlo, l' attuale re di Napoli, questo principe aveva dichiarato solennemente di preferire il celibato all'unione con una principessa di sangue francese. Ritornando poi a parlare della Infanta Maria Antonia aveva soggiunto: *Vous devez considérer deux choses qui se pratiquent dans les maisons particulières et à plus forte raison dans celles des souverains, la première qu'on n'offre point une fille, et la seconde qu'on ne veut point être le pis aller.* Siccome a tali parole il Marchese di Breglio aveva espresso la sua meraviglia: *Je m'explique,* rispondeva, *c'est que si vous entriez en négociations là*

(1) Arch. di Stato, Storia della Real Casa. Matrimoni, mazzo 43, 3°.

*dessus avec la France, et qu'elle ne réussit pas nous ne vous donnerions pas alors l'Infante.*

Tutte queste pratiche, cui bisogna ancora aggiungere un tentativo fatto dal Marchese del Puerto ambasciatore di Spagna all'Aja col già detto Conte de la Chavanne rappresentante del Re Sardo presso quella Corte, dimostravano senza dubbio il vivissimo desiderio che si sentiva a Madrid di concludere tale unione. La nazione stessa era concorde nell'augurarlo, lusingata oltremodo dall'idea che Carlo Emanuele avesse a preferire ad una principessa di Francia l'Infanta spagnuola; si era anzi persino giunti ad affermare che, se per stringere tal nodo, fosse stato necessario un dono della monarchia, questa lo avrebbe fatto di gran cuore. Nondimeno al Re di Sardegna, che tal desiderio divideva con tutto l'animo, non garbava valersi dell'opera di quei negoziatori così solleciti ad offrire l'opera loro. Egli ben sapeva con quanta gioia e soddisfazione il Re cattolico e la sua Corte avrebbero accolto la sua richiesta; trattavasi solo di trovare una persona la quale fosse atta a compiere il delicato ed importante ufficio ed a riallacciare le relazioni fra le due potenze. L'individuo, sul quale cadde la scelta, fu il cavaliere Giuseppe Ossorio, Siciliano, diplomatico di moltissimo valore che già a Parigi poi a Londra aveva dato al suo Re prove luminosissime di zelo e d'ingegno, sì da venire destinato come primo ambasciatore straordinario al congresso d'Aquisgrana.

Contemporaneamente all'avviso dato in termini lusinghieri della nuova destinazione, il Re invitava l'Ossorio a lasciare con una certa sollecitudine Londra, ove aveva fatto ritorno, e di agire colla massima diligenza, in modo da giungere a Madrid più presto che gli fosse possibile. Colà doveva sulle prime limitarsi a testimoniare al Re cattolico la stessa amicizia ed il vero compiacimento del suo Sovrano per la ripresa delle buone e cordiali relazioni, e, cercando di mettersi nelle buone viste, studiare con tutta l'attenzione possibile il carattere, le abitudini e le idee dell'Infanta, senza trascurare di occuparsi per scoprire quali fossero i mezzi più acconci per trattare con dignità e colla speranza del maggior vantaggio possibile il matrimonio. Quando poi si trovasse in grado di fornire tali esatte informazioni, spedisse un corriere straordinario a Torino; in seguito avrebbe ricevuto ulteriori e più precise istruzioni.

Inoltre era noto a Torino, ed il messo segretamente spedito a Madrid dal Marchese di Breglio l'aveva confermato, come la Regina cattolica si trovasse in pessimo stato di salute, che avrebbe potuto condurre ad una fine improvvisa. Essa non lasciava prole, ed era voce accreditata che a Parigi si pensasse all'eventualità di spingere il Re Ferdinando a passare a seconde nozze con una principessa Francese. Il cavaliere Ossorio doveva vedere sino a qual punto tal versione potesse essere esatta, e tentare invece con molta circospezione di proporre in tal congiuntura una delle figlie di Carlo Emanuele III. Così pure era stata in altri tempi quistione che l'Infante Cardinale dovesse svestire la porpora ed ammogliarsi; ma tal progetto, che si diceva della Regina madre, era stato abbandonato dopo che Ferdinando VI era salito al trono. Ad ogni modo il Re di Sardegna non poteva vedere certo di buon occhio la costituzione in Italia di un nuovo ramo di casa Borbone. E siccome il matrimonio era un gran rimedio preventivo per combattere la minaccia di una influenza perniciosa, che avrebbe potuto turbare la pace e la tranquillità d'Italia, qualora (come era lecito supporre) la diplomazia francese avesse tentato una nuova alleanza col dare in moglie all'Infante un'altra delle sue principesse, Carlo Emanuele non sarebbe stato alieno dal cercare d'indurre il Re cattolico a favorire invece l'unione del fratello suo D. Luigi con una delle sue figlie.

Da ultimo, siccome non v'era probabilità prossima che questo matrimonio potesse aver conseguenze di grande importanza politica, non sembrava dovessero venir trascurati certi vantaggi, che in altre occasioni avrebbero meno fissata l'attenzione, come per esempio la parte finanziaria. Supponendo quindi che si volesse assegnare alla sposa la stessa dote che si era concessa alle altre Infante (circa cento mila pistole d'oro), il cavaliere Ossorio doveva proporre che venissero dalla Spagna saldate certe partite, di cui già da tempo il Re di Sardegna vantavasi creditore presso la Corte del Re cattolico, od almeno ottenere che venissero conglobate colla dote, la quale sarebbe per tal modo salita a formare una cifra di qualche milione di lire piemontesi, che avrebbero dovuti venir pagati in considerazione del matrimonio.

Nell'inserire questi punti di grande importanza finanziaria nelle istruzioni date al suo ambasciatore non prevedeva certo

Carlo Emanuele qual ginepraio intricatissimo e qual lungo strascico di litigi tale questione avrebbe lasciato dietro di sè. Non calcolava egli come la vantata opulenza spagnuola fosse cosa ormai più di nome che di fatto, e come questa nazione attraversasse in quel momento un periodo di crisi, inevitabile per un paese che da quasi cinquant' anni si dibatteva in un pelago di avventure e di guerre, le cui conseguenze erano abbastanza disastrose. Gli Spagnuoli intendevano unanimi l' opera loro a riparare ai danni gravissimi cui li aveva condannati la dissennata politica di mire ambiziose sull'Italia, seguita sotto il cessato regno di Filippo V, e di cui era anima la Regina Elisabetta di casa Farnese, che sull'animo del marito esercitava un fascino potentissimo. Prima d'ogni altra cosa si mirava ad organizzare un valido sistema di difesa che servisse a rendere temuta e rispettata la monarchia, e giovasse a sottrarla completamente alla tutela e dipendenza di Francia. Essa, secondo asserivano il Marchese di La-Mina e tutti gli Spagnuoli assennati, li aveva incoraggiati, e fors'anche sostenuti nelle imprese guerresche e nelle mire ambiziose sull' Italia con larghissime promesse più spesso deluse che soddisfatte, coll' intenzione ferma non solo di servirsi delle truppe iberiche per fare delle diversioni, ed affievolire la popolazione della monarchia, ma ancora per estenuarne l'erario. Si buccinava anzi che, senza cinquanta milioni di piastre estorti alla finanza spagnuola, la Francia non sarebbe stata in condizione di sostenere così a lungo il peso della guerra, detta della prammatica Sanzione. Occorreva adunque con alleanze nel nord e nel sud d'Europa cercare di mantenere le cose nella condizione fissata dal trattato d' Aquisgrana, ed impedire la Francia d'intraprendere nuove guerre. Così mercè una pace, che si augurava di lunga durata, riusciva possibile dar un maggior assetto alle cose interne, ed un vigoroso impulso al commercio ed all'industria, non poco danneggiati dagli intrighi e prepotenze del Vescovo di Rennes ambasciatore del Cristianissimo presso la Corte di Madrid. Sorrideva pure alla Spagna una stretta amicizia coll'Inghilterra, ma non sarebbe tornata di piena soddisfazione senza la restituzione di Gibilterra contro un equo compenso nelle colonie; e Portorico avrebbe potuto essere degno equivalente della tanto desiderata città Andalusa. Nè si ommetteva di tener pronti capitali di cui poter disporre per

cercare e mantenere validi appoggi presso la Corte di Versailles, sui quali fare sicuro assegnamento ove il Delfino venisse a morire senza prole e si trattasse di dare un Re alla Francia.

Gran peccato invero che all'attuazione di così pattriottico ed ardimentoso disegno fossero impari gli uomini cui erano affidate le sorti della Monarchia Iberica! Il Re Ferdinando era principe di gran virtù, religiosissimo, anzi bigotto; persuaso che la rettitudine delle sue intenzioni rendesse contenti e felici i popoli, sarebbe stato afflittissimo se avesse potuto supporre di recare il menomo torto a chicchessia. Avvezzo a star sempre colla Regina, non sapeva staccarsene che al mattino durante i tre quarti d'ora di conferenza col confessore, al pomeriggio verso l'ora del tramonto per andar a caccia, e raramente quando, di necessità, doveva assistere a qualche pubblica funzione. Oltre ad una forte passione per la caccia non conosceva altro divertimento che quello della musica italiana, e ciò solo perchè era l'occupazione favorita della Regina. Questa, nata dalla casa regnante nel Portogallo, aveva un ascendente assoluto sull'animo del Re, sì da imporgli le sue idee in ogni occasione; donna di molto spirito, aveva saputo così bene rendersi necessaria, che senza di lei il Re non riceveva i ministri per la relazione degli affari e non sapeva prendere deliberazioni. Suo discorso favorito lo spettacolo d'opera, per il quale si spendevano somme ingenti, e quando questo argomento mancava, la conversazione languiva. Gli altri membri della famiglia reale non contavano affatto. La Regina madre viveva ritirata e non consultata a S. Idelfonso; l'Infanta Maria era buona, affabile e graziosa, ma lontana dalla politica; quanto al Principe Don Luigi (l'Infante Cardinale), per esatte informazioni avute era stato definito dal Marchese di Breglio come " *Un sot* ".

Dei due ministri, Don Giuseppe de Caravayal y Lincaster era uomo onestissimo, buon diplomatico ma troppo indeciso e lento nelle sue operazioni. Il Marchese della Ensenada che la fortuna aveva innalzato a grande dignità, accumulava gli uffici di ministro per la guerra, marina e finanze. Più laborioso e spedito del suo collega, sembra non fosse un modello d'onestà: lo si diceva inclinato a Francia, anzi si pretendeva persino ne fosse sussidiato.

Al disopra di costoro, per credito ed influenza, erano due

personaggi potentissimi: un cantante ed il confessore del Re. Il primo era il musico napoletano Carlo Broschi, detto Farinelli, il noto " *gemello carissimo* „ dell'Ab. Pietro Metastasiò, che coll'incanto della sua voce aveva saputo procacciarsi la stima e l'amicizia dei Sovrani sino da allora che erano ancora principi delle Asturie, e rendersi indispensabile sì da esercitare sul Re potere eguale a quello della Regina. La sua condotta era nullameno incensurabile; evitava a tutt'uomo di mettersi in evidenza e d'immischiarsi negli affari, non perchè fosse privo di capacità o di astuzia, ma perchè non voleva mettersi in mala vista presso la Monarchia, cui certo non poteva andar a sangue che un tal uomo godesse di tanta potenza.

Accorto cortigiano, non meno che prudente favorito, sapeva starsene in disparte non frequentando in apparenza (1) che altri artisti: lo si sospettava parteggiare per Inghilterra. Il confessore del Re, Padre Ravago, gesuita, era col Farinelli amico intimo e sostenitore ad oltranza del Marchese della Ensenada; ma pur troppo non possedeva, come il musico napoletano, il dono di sapersi mantenere neutrale, e non di rado si valeva dell'altissima autorità, che il suo delicato ufficio gli conferiva, per mene politiche.

Le disposizioni date dal cav. Ossorio per la sua partenza da Londra erano state così pronte e così affrettato il viaggio da permettergli di giungere il 15 luglio in Madrid. Colà, appena smontato di carrozza, gli si faceva innanzi Don Alfonso Geraldino, già ministro di Spagna a Londra ed ora membro del consiglio delle Indie, il quale, col pretesto di dargli il benvenuto, era accorso a dichiarargli francamente e senz'altri preamboli, come la Corte e la Nazione attendessero con molta impazienza il suo arrivo, sapendolo incaricato di proporre ufficialmente il tanto desiderato matrimonio del Duca di Savoia coll'Infanta.

---

(1) Le prime negoziazioni che si fecero a Madrid pel trattato d'Aranjuez (detto d'Italia), che secondo l'espressione dell'ambasciatore inglese Keene era fatto " pour se mettre en état de bien rosser les Français en cas de besoin „, si tennero precisamente in casa del Farinelli; vi convenivano il Keene ed il Conte Esterazy ministro imperiale, col pretesto di ritrovarsi a banchetto (Lettere Ministri Spagna, dispacci del March. di S. Marzano, settembre 1751).

Non mancò l'Ossorio di rettificare le cose, affermando di non aver altro ufficio che quello di attendere al riannodamento delle buone relazioni fra le due potenze. La risposta che gli fu data, non potè riuscirgli di troppa soddisfazione; un antico ceremoniale, di fresco richiamato in vigore, richiedeva che un ambasciatore non potesse venire ammesso alle udienze pubbliche e private del Sovrano Cattolico se prima non avesse fatto l'ingresso solenne; ed il non dover egli trattare di un affare così accetto a tutti, com'era quello del matrimonio, toglieva affatto la speranza che si potesse eccezionalmente derogare alla regola.

Ora, se questo discorso collimava perfettamente con quello già tenutogli dall'Ambasciatore inglese Keene, il quale, col pretesto di uscire per respirare un po' d'aria, gli era venuto incontro con una carrozza a sei cavalli a più d'un'ora di distanza da Madrid, non s'accordava affatto colle premure che gli erano state fatte da Torino per un sollecito arrivo, poichè i preparativi per la funzione dell'ingresso richiedevano molto tempo. Il Geraldino poi aveva larghissime aderenze a Corte, specialmente colle persone che maggiormente avvicinavano l'Infanta: tutto induceva a credere che avesse agito per ordine ricevuto..... e questo dava certo motivo di gravi preoccupazioni all'Ossorio. Inoltre al mattino successivo, per espresso incarico del Re, benchè col futile pretesto di salutare il ministro, da cui aveva ottenuto alcuni favori a Londra, ecco apparire il Farinelli, ad un'ora in cui era lecito supporre che tutti ancora dormissero. Le sue prime parole furono sul matrimonio; e siccome l'Ossorio si schermiva, si intese ripetere il solito argomento dell'etichetta severa: però, soggiungeva Farinelli, siccome v'era luogo a credere che fra brevissimi giorni sarebbero venuti precisi ordini per intavolare le trattative di nozze, così si poteva sperare che l'ostacolo sarebbe stato rimosso, tanto più che a Corte già si diceva che a Torino si spingevano alacremente i lavori per ricevere la sposa, e che il matrimonio era desiderato sulle sponde del Po non meno che su quelle del Mansanare. Ad ogni modo egli, Farinelli, avrebbe fatto il possibile onde, per compiacere il Ministro sardo, si fossero concesse agevolezze che lo dispensassero dalla cerimonia. E così avvenne.

Ma intanto passavano i giorni, e tutti si meravigliavano come l'Ossorio rimanesse muto sul tema del matrimonio. Le sue

azioni erano attentamente osservate e studiate, e commentate, anche nelle altissime sfere le sue parole. Farinelli moltiplicava le sue visite mattutine, ma il corriere da lui preannunziato non giungeva. E non poteva succedere diversamente: l'Ossorio, che sapeva e vedeva d'aver migliaia d'occhi sgranati che lo osservavano, e non minor numero di orecchi tesi, pronti a coglier a volo le sue parole, incontrava difficoltà grandissime per poter assumere le informazioni desiderate a Torino. Stretto dalle insistenze del Farinelli, aveva con molta prudenza e molta astuzia finito per dichiarare che, secondo il suo modo di vedere, il desiderato messaggero avrebbe per assai tempo ancora ritardata la sua venuta, date le strettezze finanziarie in cui versava il Re di Sardegna, e la necessità in cui egli si trovava di veder sistemate quelle certe pendenze che da lungo tempo esistevano fra le due nazioni. Lusingato certo dalla gloria che gliene sarebbe venuta, qualora fosse riuscito ad aver parte nelle negoziazioni che prevedeva prossime, Farinelli aveva promesso la sua mediazione, ed aveva invero tastato il terreno che pel momento non sembrava troppo acconcio per intavolare discussioni in materia finanziaria. Nel frattempo l'Ossorio aveva finalmente potuto, superando le difficoltà grandi che gli sbarravano la via, raccogliere tutte quelle notizie che a Torino erano attese; il corriere era stato spedito, ben accolte le informazioni, ed il desiderato latore di ordini definitivi era giunto a Madrid. Trattavasi di partecipare ufficiosamente al Re cattolico la risoluzione di Carlo Emanuele, ed insieme di avvisare al modo che potesse sembrare più opportuno onde l'Ossorio fosse in grado di disimpegnare l'onorevolissimo incarico affidatogli; a tal uopo fu chiamato il Farinelli, e gli fu affidata la cura di parlare col Re; e questi fece tosto esternare la gioia provata per sì lieta notizia, da tanto tempo e con sì grande impazienza attesa.

Dovevansi ora fissare tutte le modalità del contratto, dell'itinerario da seguirsi pel viaggio in Piemonte, del tempo in cui si sarebbe celebrato il matrimonio, ecc. ecc. Sul primo punto si stabilì di scegliere per base l'atto passato al tempo del matrimonio del Delfino coll'Infanta Maria Teresa. Alla Corte di Torino però non piacevano due articoli di quel contratto (il 5° ed il 6°), i quali sancivano la rinunzia al diritto di pretendere alla successione di Spagna, ed erano soltanto appropriati per

cagione che l'Infanta aveva sposato un principe escluso da detta successione in virtù di pubblici trattati; laddove il Re di Sardegna ed i suoi discendenti erano nominativamente chiamati in forza degli stessi protocolli a salire sul trono di Carlo V. E quasi senza difficoltà la Corte di Torino vedeva soddisfatto il suo desiderio.

Relativamente alla dote, fu stabilito ch'essa fosse di cinquecento mila scudi d'oro del Sol: però, quando si trattò di dare a questa moneta caduta in disuso un valore reale, nacque una lunga contestazione. Tre fra i principali banchieri di Madrid, interpellati dall'Ossorio, avevano dichiarato come allorquando gli Spagnuoli possedevano i Paesi Bassi ed il Milanese, usavano regolare i pagamenti nei contratti fatti alle fiere di Gand, Lille e Vigevano con scudi d'oro del Sol, ciascuno dei quali valeva una mezza pistola di Spagna; ma tal moneta non era più in corso da oltre un secolo; nondimeno le si poteva assegnare il valore di 75 reali di Villon e 10 maravedis. Questo pareva esagerato ai Ministri spagnuoli; finalmente, dopo molto tergiversare, si finì per fissare allo scudo d'oro del Sol il valore di 37 reali e pochi maravedis; e ciò in forza di uno speciale decreto firmato dal Re, il quale durante le trattative si era spessissimo giovato dell'opera del Farinelli. Il pagamento della dote doveva effettuarsi dopo la celebrazione del matrimonio, prima che la Duchessa lasciasse il suo paese natio: ma non si potè ottenere che dopo lungo spazio d'anni ed a prezzo di incessanti richieste, cui si rispondeva sempre in modo evasivo, quando pure non succedeva al Ministro sardo di sentirsi dire che la Spagna non era avvezza a pagare le doti delle sue Infanti, ed essere gran mercè si fossero dati alcuni acconti (1). Invano il Marchese Filippo Valentino Asinari di San Marzano, successo all'Ossorio nel posto di Ambasciatore a Madrid, ricorreva spessissimo alla intromissione del potente Farinelli; e questi nulla lasciava d'intentato per ottenere che il Marchese dell'Ensenada si decidesse a soddisfare a quanto era pure un debito d'onore; " *più d'una volta,* così il musico napoletano all'Ambasciatore, *mi è stato risposto che se ne darebbe proporzionata esecuzione e sarebbe eseguita in questo mese. Dappertutto si penuria di biondo*

(1) Arch. di Stato, lett. ministri Spagna, 1754, 10° mazzo.

*metallo; l'intenzione è sempre buona „*. Da Torino, non sapendo più a qual santo votarsi per ottenere il pagamento totale, od almeno un buon acconto, memori del detto del poeta: " Munerà, crede mihi, placant hominesque Deosque „ si scriveva al San Marzano di guardare se, con qualche opportuno regalo al Farinelli, non riuscisse fattibile interessarlo e tenerselo stretto amico. Ma il musico napoletano se ne schermiva, e, pur professando riconoscenza rispettosissima ed ossequio al Re di Sardegna, rispondeva bastargli, come premio di quanto aveva od avrebbe potuto fare, la protezione ambitissima del Sovrano, che aveva potuto conoscere ed apprezzare in altri tempi a Torino, ove il Farinelli stesso aveva vissuto con un fratello, maestro di Cappella del Principe di Carignano. Invece il Marchese di S. Marzano, stretto dalle insistenze che gli venivano fatte, suggeriva come unico mezzo, per ottenere qualche soddisfazione, d'interessare personalmente la Regina cattolica mercè il regalo di qualche gioiello con rubini, di cui era sommamente desiderosa. Ed infatti si pretendeva, con qualche fondamento, che in occasione analoga non fosse stata indifferente a doni della Corte di Londra..... Non si era alieni dall'accogliere tal suggerimento, ma sembrava a Carlo Emanuele che il regalo, fatto senza che se ne presentasse occasione favorevole, avesse a produrre effetto contrario allo scopo, e che il giuoco apparisse troppo chiaramente.

Circa alla questione del viaggio e della rimessione dell'Infanta ai gentiluomini e dame piemontesi che muoverebbero ad incontrarla, non si appianarono tosto le difficoltà. A Torino propendevasi perchè l'Infanta seguisse la via di mare, come erasi già altra volta praticato, evitandosi per tal modo il passaggio pel territorio francese ed i disagi di un viaggio assai lungo. Ma il Re cattolico non accoglieva troppo bene quest'idea, la quale del resto era avversata dall' Infanta stessa, cui ripugnava il viaggio marittimo. Si ventilò allora il passaggio per la via di Nizza; ma poi sul riflesso che, attraversando il Rodano a Baucaire, e seguendo la strada che mette a Briançon e di là a Susa pel Monginevra, il tempo da impiegarsi era più breve, e le carrozze e le portantine con tutta facilità potevano servire per tutta la marcia, si adottò definitivamente quest'ultimo itinerario per l'Alto Delfinato. Ma in questo caso occorreva rivolgersi al Re di Francia per ottenere il passaggio nel suo

Stato. Carlo Emanuele desiderava che l'iniziativa di tal domanda partisse dal Re cattolico, sia per cagione di una certa asprezza tuttora sussistente fra le due Corti, sia perchè si temeva potesse venire una risposta meno favorevole per la preferenza data a una Infanta di Spagna. Ferdinando VI invece inclinava a credere, che i passi necessari dovessero essere fatti dallo sposo: ad ogni modo l'Ossorio potè ottenere che il Re cattolico scrivesse in modo confidenziale a Parigi come l'Infanta avrebbe attraversato la Francia per recarsi in Piemonte, ed il Re di Sardegna ne avrebbe a suo tempo dato avviso e chiesta la necessaria approvazione.

Rimaneva a definirsi la modalità e la località della rimessione della sposa, e, subordinatamente, se e fino a qual punto essa sarebbe stata accompagnata dalla Corte spagnuola. E qui più che mai dovevasi lottare contro un sistema rigidamente feroce di etichette e di ceremonie. Già il cav. Ossorio aveva avuto campo di esperimentarne qualche saggio, allorquando, avendo dimostrato il desiderio di avere la misura dell'Infanta, gli era stato risposto come l'etichetta spagnuola vietasse assolutamente l'appagamento della sua richiesta (1). Similmente era successo, quando aveva fatto domanda di poter spedire a Torino un ritratto della sposa, tanto che aveva dovuto scrivere al Re: " *Il est incroyable combien de ménagements et de négociations il a fallu pour ce seul article du portrait qui auroit dû être la chose la plus aisée* „. Ed il motivo era questo: v'erano a Madrid due pittori, l'Amigoni ed il Vanlòo (Michele); il primo godeva segnatamente la protezione del Farinelli, il quale non poteva accontentarsi che l'altro fosse prescelto per fare il ritratto della sposa, benchè avesse agio di poterlo far bene, mentre l'Amigoni era occupato in altri lavori. Ciò non ostante Farinelli vinse; ma il quadro si faceva lungamente attendere, onde l'Ossorio dovette pregare il Vanlòo di farne uno di nascosto: sembra però che nessuno dei due rispondesse esattamente ai desideri e fosse molto rassomigliante.

---

(1) Allorquando nell'anno 1742 l'Infanta Maria Teresa sposò il Delfino, da Parigi fu mandato un sarto a metà strada tra Madrid e Fontanarabie incaricato di prendere le misure dell'Infanta, ma venne cacciato bruscamente dal Conte di Montijo, meravigliato che si potesse credere che una Infanta Spagnuola avesse bisogno d'abiti.

Si era per un momento accarezzata l'idea di far accompagnare la giovane Duchessa sino alla frontiera del Piemonte; ma col pretesto che forse più doloroso sarebbe riuscito il distacco dal corteggio spagnuolo, e che contestazioni avrebbero potuto sorgere circa la precedenza nei turni di servizio, il progetto fu abbandonato, ripreso momentaneamente, poi scartato in modo definitivo, per intromissione del solito Farinelli, segretamente incaricato dall'Ossorio di renderlo vano.

Così pure altro guaio era lo stabilire il luogo in cui le persone scelte dalla Corte di Madrid per accompagnare l'Infanta avrebbero terminato le loro funzioni e si sarebbero ritirate. Al confine della Monarchia Spagnuola verso Francia il terreno non presentava località adatta per la fermata indispensabile del corteggio, non essendovi nè case nè alberi che permettessero un riparo qualsiasi. Inoltre era quivi una zona di terreno soggetta a contestazione tra le due potenze finitime. Ammessa ed accettata come necessaria la costruzione di un padiglione in legno per le formalità occorrenti, dove sarebbe esso stato costruito? Certo non sul terreno discusso; la Francia non lo avrebbe tollerato, ed a Spagna non conveniva lasciar supporre che, costruendolo altrove, si riconoscevano tacitamente i diritti della parte avversaria. Vi furono vari progetti, che giustamente l'Ossorio battezzava per " *mal digérés* „ e finalmente prevalse l'idea di non far condurre la Duchessa sino alla frontiera, ma bensì di arrestarsi a qualche lega di distanza dai Pirenei, sulla considerazione che i pochi casolari ed i meschinissimi e scarsi villaggi non potevano offrire il decoro e la dignità necessaria per adempiere alle formalità stabilite, e neppure davano agio di poter alloggiare con decenza i due numerosi corteggi Piemontese e Spagnuolo. Il luogo prescelto fu invece a metà strada tra Figuères et Jonquières.

Appianate così tutte le difficoltà (1), il cav. Ossorio assunse

---

(1) Il giorno 18 dicembre, per accordo inteso fra le due Corti, fu pubblicato solennemente il matrimonio sì a Torino che a Madrid. In questa città si fece sfarzosa gala col concorso dei Grandi del Regno, degli ambasciatori e ministri stranieri ed altre persone di sfera, portatisi a complimentare le LL. MM. e AA. RR. Si cantò un solenne *Te Deum*, poi si scappò a teatro, dove in detta sera andò in scena l'opera in musica intitolata *Demoofonte*, del celeberrimo signor Metastasio, poeta Cesareo con

il carattere di Ambasciatore straordinario e ricevette i pieni poteri occorrenti per essere abilitato a fare la domanda formale, apporre la firma al contratto nuziale, nonchè le procure del Re e del Duca di Savoia per autorizzare il Re Cattolico a dare il consenso al matrimonio in nome di Carlo Emanuele III ed a rappresentare il Principe Vittorio Amedeo alla ceremonia nuziale.

Il Re di Spagna, non volendo che per il matrimonio dell'Infanta Maria Antonia si facesse meno di quanto s'era praticato nell'occasione in cui l'Infanta Maria Teresa era andata sposa al Delfino, voleva conferire al cav. Ossorio l'ambitissima decorazione del Toson d'Oro. Il Ministro sardo non aveva ommesso di far sentire che, onoratissimo per sì delicato pensiero, non poteva assolutamente accettare l'onorificenza, vietandoglielo il giuramento prestato all'atto della sua nomina ad Ambasciatore (1). Tal rifiuto aveva non poco stupito il Re Cattolico e per la fermezza con cui era fatto e per la costanza con cui era mantenuto. A più riprese Farinelli era stato inviato per indurre in nome di Ferdinando VI il cav. Ossorio ad accettare; od almeno a dichiarare se veramente fosse un ordine formale venuto da Torino che vietasse l'accettare decorazioni, quando anche si trattasse del Toson d'oro, oppure altre ragioni gelosamente nascoste, non parendo verosimile fossero legittime quelle addotte. Anzi lo stesso Farinelli era incaricato di mettere, d'ordine del Re, a disposizione dell'Ossorio il miglior corriere che avesse la Spagna, perchè vi fosse campo d'interpellare in proposito Carlo Emanuele, ed averne la risposta nel minor termine possibile. Ma l'Ossorio stava saldo, il suo Re gli aveva ordinato di mantenere il giuramento, ed egli si manteneva irre-

---

magnifiche decorazioni e scelti attori diretti dal virtuoso musico sig. Farinelli, cui S. M. diede incombenza di prepararne altro, per pomposamente celebrare, come scrivono, la nuova alleanza tra la predetta S. M. Cattolica e il Re di Sardegna (Giorn. di Torino, n. 3, 24 gennaio 1750).

(1) Gli ambasciatori nell'assumere l'ufficio dovevano giurare: " Di non " ricevere oltre al regalo solito da alcun re, principe e potenza forestiera " nè da veruna persona per parte di esse pensione, dono o qualunque altro " vantaggio che fosse offerto senza il consenso di S. M. e di rivelare anzi " a S. M. le dette offerte, le persone che le avranno fatte ed i fini per i " quali si potesse conoscere che fossero state fatte; e di non investire ca" pitali all'estero ".

movibile; onde a Ferdinando VI convenne piegarsi, non senza però ammirare anche in quest'occasione la lealtà ed il disinteresse dei diplomatici Piemontesi. E Carlo Emanuele, che aveva ricompensato col regalo di una splendida tabacchiera d'oro guernita in brillanti col ritratto del Principe sposo (1) il musico Farinelli, serbava all'Ossorio un premio degno dello zelo, onestà, ed alto senno politico onde era adorno, chiamandolo a reggere il posto importantissimo di Ministro per gli affari esterni, cui era stato da tempo designato dal Marchese d'Ormea, e conferendogli più tardi il Collare dell'Ordine Supremo dell'Annunziata.

Il matrimonio celebrato in Madrid colla massima pompa fu con non minore solennità confermato dal Cardinal delle Lanze nella Chiesa Collegiata di Oulx addì 31 maggio dell'anno 1750.

---

(1) " LL. MM. Cath. ont été ravies de la distinction que V. M. a daigné " faire à Farinelli en le regalant d'une tabatière de diamans avec le portrait " de Mons. le Duc de Savoie " (Il Cav. Ossorio al Re). La tabacchiera era del valore di L. 6076, la sola guernitura in brillanti era costata L. 5056. Per parte della Corte spagnuela poi il Farinelli fu insignito dell'Ordine di Calatrava. E quando nell'anno 1754 il musico Napoletano cadde in disgrazia del Re di Spagna, l'Ambasciatore Sardo a Parigi credeva bene di informare il suo Governo come " le Gazetier d'Utrecht dans la Gazette N. LXXXVIII " a eu l'impertinence de dire que le Musicien Farinelli comptant de se " retirer de Madrid à cause des réformes économiques qu'on a fait à cette " cour là, croit probablement s'établir à Turin où il devoit s'assurer d'être " reçu avec distinction, puisque le Roi l'avoit décoré, il y a quelques années, " de l'ordre de l'Annonciade. Plusieurs personnes m'ont parlé de cet article " de la Gazette ".

---

*L'Accademico Segretario*

CESARE NANI.

Torino — VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

# CLASSE

DI

## SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

### Adunanza del 19 Dicembre 1897.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

---

Sono presenti i Socii: Cossa, vice-Presidente dell'Accademia, D'Ovidio, Direttore della Classe, Berruti, Bizzozero, Mosso, Spezia, Gibelli, Camerano, Segre, Peano, Jadanza, Guidi, Fileti e Naccari Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della seduta precedente.

Il Presidente annunzia la morte del Socio nazionale non residente Francesco Brioschi avvenuta il giorno 13 corrente, e dà conto delle testimonianze di dolore, che la Presidenza, interpretando i sentimenti dell'Accademia, diede alla famiglia dell'estinto, all'Istituto Lombardo e all'Accademia dei Lincei.

Il vice-Presidente Cossa rappresentò l'Accademia ai funerali e, invitato dal Presidente, esprime per incarico della famiglia dell'estinto, la gratitudine di essa per la parte presa alla sua sventura.

Il Socio D'Ovidio commemora l'illustre defunto con le seguenti parole:

" Un altro nome illustre la morte ha cancellato dall'albo dei Socii non residenti della nostra Accademia: Francesco Brioschi.

" Benchè più che settantenne, era ancora così giovanilmente alacre la sua mente, che non cessò di produrre elaborati scritti di Analisi fino a pochi mesi or sono; così gagliarda la sua fibra, che noi ci eravamo quasi abituati a crederlo esente dal fato comune.

" Egli era sempre in moto: a Milano come professore e direttore dell'importante Istituto politecnico da lui fondato; a Roma come Presidente dei Lincei; or qua or là in Italia e all'estero come presidente di Commissioni d'inchiesta o rappresentante del Governo. Anche la scorsa estate, al Congresso dei matematici in Zurigo, egli fu oggetto, così degli omaggi riverenti dei congressisti d'ogni nazione, come della loro ammirazione pel brio e la instancabilità onde diè prova, gareggiando coi più giovani.

" Nato a Milano il 22 dicembre 1824, può dirsi che sino al giorno 13 di questo dicembre 1897, estremo di sua vita, egli non ebbe mai posa; e furono appunto gli strapazzi durati ultimamente in Sicilia per visitare alcune opere idrauliche, che abbatterono irrimediabilmente quella sua vigorosa salute, la quale avea pur saputo resistere ai crudeli disinganni procuratigli dal troppo fidare nell'onestà altrui e nella propria energia.

" La fine inaspettata del Brioschi è gravissimo lutto per la scienza italiana; ed è inoltre una vera sventura per le nostre scuole, alle quali egli pose sempre alto il segno, difendendone la dignità e gli interessi con incontestata autorità e invitto coraggio, prima come proministro e poscia nelle aule del Senato e del Consiglio superiore della pubblica istruzione.

" Egli fu un insegnante di straordinaria efficacia: basti dire che i suoi discepoli si chiamano Cremona, Beltrami, Casorati; nomi che costituiscono il miglior elogio per un maestro.

" Ma la fama di Francesco Brioschi sopravviverà principalmente, perchè raccomandata ai suoi geniali lavori nel campo delle discipline matematiche.

" Dire di cotesti lavori, anche solo sommariamente, non

permette la strettezza del tempo, mancandomene persino un elenco; tanto più che essi sono in numero assai rilevante ed abbracciano mezzo secolo di singolare operosità.

" Egli fu soprattutto un grande algebrista. Tale lo consacrarono: la sua classica Teoria dei determinanti; le molteplici e strenue ricerche sulla teoria delle forme algebriche, che assicurarono all'Italia un posto eminente nella storia di quella fecondissima fra le teorie moderne dell'Algebra; le capitali contribuzioni da lui recate alla risoluzione delle equazioni del 5° e del 6° grado, continuando la gloriosa tradizione di Tartaglia, di Ferrari, di Ferro; gli studii sulle funzioni ellittiche ed iperellittiche. Alle equazioni differenziali, alla teoria infinitesimale delle curve e delle superficie, alla Meccanica egli dedicò altresì dotte pubblicazioni.

" Patriota della vigilia e già operosissimo collaboratore agli Annali di Matematica del Tortolini, quando l' Italia era divisa miseramente in piccoli Stati, il Brioschi assunse la direzione degli Annali non appena Roma fu divenuta la capitale del Regno italico; ed egli seppe mantenerli sempre al livello dei progressi odierni della scienza, lontani da esagerazioni di scuola o di metodo, aperti ai nostri giovani migliori, ospitali ai dotti stranieri e da questi altamente pregiati.

" Fondata su cotante svariate e insigni benemerenze, la fama del Brioschi si era sparsa, fin dai suoi giovani anni, non solo in Italia, ma altresì presso tutte le nazioni più colte. Perciò quanti sono fra noi studiosi delle scienze matematiche, riconoscevano in lui il loro Nestore e il loro duce ad un tempo; ed ora che la sua geniale figura è sparita dalle lotte dell'esistenza tra l'universale compianto, essi ne conserveranno religiosamente la gloriosa memoria, per sempre „.

Il Segretario presenta, a nome del Socio nazionale non residente Schiaparelli, una memoria intitolata: *Osservazioni astronomiche e fisiche sull'asse di rotazione e sulla topografia del pianeta Marte.*

Il Socio Guidi presenta una memoria dell'ing. Elia Ovazza, intitolata: *Calcolo grafico delle travi elastiche sollecitate in flessione e taglio.* Sarà esaminata dai Socii Guidi e Volterra.

Il Socio Naccari presenta a nome del Socio Giacomini una nota di questo, intitolata: *Anomalie di sviluppo dell'embrione umano. Comunicazione XI.* Sarà inserita negli *Atti.*

Il Socio Camerano presenta una nota della signorina Elodia Osasco, intitolata: *Di alcuni corallari oligocenici del Piemonte e della Liguria.*

Il Socio Peano, anche a nome dei Socii D'Ovidio e Segre, legge la relazione sulla memoria del Prof. Mario Pieri, intitolata: *I principii della Geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo.*

La relazione è favorevole alla lettura e viene approvata. Compiuta la lettura, si approva la inserzione della memoria nei volumi accademici.

# LETTURE

## *Sulle anomalie di sviluppo dell'embrione umano;*

Comunicazione XI del Socio CARLO GIACOMINI.

Le formazioni vescicolari che non raramente si riscontrano nei prodotti abortivi, sono talora di difficile interpretazione, perchè non sempre si hanno gli elementi per giudicare se esse siano neoformate oppure rappresentino gli ordinari annessi fetali deviati dal loro normale sviluppo per l'arresto avvenuto nell'embrione. Quando poi queste formazioni si trovano entro la cavità del Chorio di ova molto giovani (dalla 2ª alla 3ª settimana) in allora non avendo ancora sufficienti cognizioni sulla costituzione del disco germinativo, sulle sue modificazioni e sui suoi rapporti coll'Amnio e colla vescicola ombellicale, si corre il risico di considerare come fatti anormali, particolarità perfettamente fisiologiche. E così si cade nel vizio opposto di coloro i quali hanno tendenza a considerare come normale tutto ciò che vien da loro osservato in questi primissimi stadî di sviluppo, portando così una grande confusione nel nostro materiale di studio.

Credo necessario quindi di tornare sopra quest'argomento, recando nuove osservazioni ed approfittando delle recenti descrizioni di ova umane molto giovani, di cercare con maggior rigore la loro interpretazione.

Intanto dalle precedenti nostre comunicazioni risulta già manifesto che le forme vescicolari possono essere distinte in due categorie. Una prima riguarda quelle che si sviluppano da alterazioni delle pareti del Chorion e dell'Amnio, e quindi sono particolarità nuove legate generalmente, ma non costantemente, ad un disturbo di sviluppo dell'embrione.

La seconda categoria comprende quelle altre formazioni che sono la persistenza di disposizioni primitive degli annessi fetali alterati nel volume e nella costituzione, con mancanza completa

dell'embrione. Questa seconda categoria è poi interessante per i nostri studi, perchè si trova in rapporto intimo col processo di sviluppo degli annessi fetali e serve a confermare indirettamente le nostre cognizioni sul modo e sull'ordine con cui avviene la loro differenziazione.

Recentemente infatti il Mall ha descritto alcune forme vescicolari, che egli crede di speciale valore per la giusta interpretazione dei primi stadi di sviluppo dell'umano Coeloma. A suo tempo saranno prese nella dovuta considerazione.

Incominciamo intanto a riferire una osservazione veramente tipica, e la faremo seguire da considerazioni e da confronti che valgano a stabilirne la sua natura e la sua importanza.

### Osservazione XXIX (Num. della raccolta CLXVIII).

Nelle ore pomeridiane del 27 marzo 1897 il dott. Vicarelli, a nome del prof. Tibone, mi mandava un aborto conservato in liquido indifferente. Consisteva del Chorio ben disteso che aveva la forma ed il volume di un grosso ovo di piccione, il massimo diametro essendo di 3 cm. La piccola estremità era coperta da un largo lembo di decidua ovulare e da piccoli grumi sanguigni che furono tolti. Il resto della superficie del Chorio era libera e presentava in alcuni punti ciuffi di villosità ramificate, in altri la superficie era liscia.

Aperto il Chorio, mentre l'ovo si trovava nella soluzione picro-solforica, ne usciva un liquido leggermente torbido, e si cadeva nel Coeloma esterno, dove il Magma era pochissimo evidente. Verso la piccola estremità dell' ovo comparivano molto distinte due vescicole, ben distese, indipendenti fra loro, come si scorge nella fig. 1ª. Una di queste vescicole stava proprio situata nella piccola estremità dell'ovo, ma fu facile smuoverla non avendo aderenze colle parti circostanti. Era la più piccola; essa si presentava di forma regolarmente sferica, ed aveva un diametro di 9 $^1/_2$ mill. La parete appariva robusta, e la superficie esterna non era liscia, ma presentava leggeri rilievi, che per la forma e disposizione ricordavano quelli che si osservano alla superficie della vescicola ombellicale in questo

periodo di sviluppo. Di più nel suo spessore si notavano traccie di vasi sanguigni, non disposti regolarmente sotto forma di rete, ma interrotti qua e là, i quali evidentemente erano i residui della circolazione onfalo-mesenterica. Si trattava adunque qui di un sacco vitellino molto più voluminoso dell' ordinario, il quale, essendosi rotto il suo sottile peduncolo, si trovava libero nel Coeloma esterno.

L'altra vescicola posta più in alto ed a sinistra della prima, aveva caratteri differenti. Era più voluminosa della prima e si presentava oviforme col massimo diametro di 12 mm., parallela all'asse della cavità del Chorio; non era completamente libera, ma la sua grossa estremità aderiva per piccola estensione alla superficie interna del Chorio. La sua parete era molto sottile, regolare, trasparentissima; il suo contenuto era limpido, senza parti solide. In nessun punto esistevano traccie di formazioni embrionarie.

Questa 2ª vescicola ci rappresenta con molta probabilità un sacco amniotico vuoto.

Portando la nostra attenzione alla piccola estremità della 2ª vescicola, rivolta in alto, si trova applicato alla sua superficie esterna un corpicciuolo molto irregolare nella sua conformazione, moriforme, biancastro, con punteggiature nerastre, sanguigne. Non si potè subito dire che cosa rappresentasse. Esso fu disegnato ad un maggiore ingrandimento insieme alla piccola estremità del sacco amniotico nella fig. 2ª. Dal corpo moriforme si vedono partire due sottilissimi fili, i quali vanno a perdersi alla superficie esterna dell'Amnio.

Le due vescicole al nostro esame ci apparvero avere solo rapporti di vicinanza, senza legami di sorta. Ma questa è una disposizione secondaria: primitivamente le due vescicole dovevano essere congiunte fra loro, e la congiunzione doveva farsi in corrispondenza del corpo moriforme. Infatti attentamente esaminando queste formazioni con lente d'ingrandimento, si trova che alla faccia superiore della V. ombellicale, esiste un brevissimo cordoncino lacerato, che rappresenta il peduncolo della vescicola, il quale primitivamente andava a congiungersi su di un punto del corpo moriforme dove l'esame pure dimostra una leggera irregolarità prodotta dal distacco dell' atrofico cordone vitellino. Ristabiliti così i rapporti in allora il corpo moriforme

non sarebbe che un residuo alterato del tessuto mesodermico che congiungeva l'Amnio alla vescicola ombellicale. Ciò veniva anche confermato dallo studio microscopico. Prima però desidero completare l'osservazione, riferendo la storia clinica che non manca d'importanza, quale mi fu trasmessa dal prof. Tibone.

L'ovo proveniva da una donna d'anni 30 d'alta statura, prestante di forme, robusta, con nessun sintomo di sifilide. La madre sua robusta aveva prole numerosa e sana.

Il matrimonio ebbe luogo nel giugno 1893.

I. Gravidanza terminata con un aborto di un mese e mezzo nell'ottobre dello stesso anno.

II. Gravidanza terminata con aborto di 6 mesi nell'anno successivo.

III. Gravidanza, aborto di mesi due nell'anno 1895.

IV. Gravidanza terminata con parto a termine nel settembre 1896. Feto premorto al parto di qualche giorno. Causa probabile della morte del feto la nefropatia gravidica. In principio di gravidanza esisteva retroversione dell'utero. Ridotto l'utero e mantenuto ridotto con un pessario.

V. Gravidanza. Ultima menstruazione in gennaio dall'8 all'11 1897; li 17 febbraio fu rimesso l'utero nella sua giusta posizione e mantenuto con un pessario. Li 25 marzo senza causa nota e con pochi dolori e scarsa emorragia la donna abortiva. È esclusa ogni influenza morbosa paterna.

Malgrado lo studio fatto sia sufficiente a spiegare le disposizioni che furono riscontrate nel nostro ovo, ciononondimeno ho creduto utile di sottoporre le parti all'esame microscopico. Perciò fu sezionato un tratto di Chorio, tutta la vescicola ombellicale e l'emisfero dell'Amnio che sosteneva il corpo moriforme.

All'opposto di quanto fu osservato in altri casi di anomalie di sviluppo dell'Embrione umano, il Chorio e le sue villosità si presentano profondamente alterate. Non erano più distinguibili i suoi due strati epiteliali. Lo strato sinciziale mancava in certi tratti. Lo strato cellulare era disaggregato, poco distinguibile. Lo stroma di molte villosità era abbondante e con incipiente alterazione mucosa. Mancavano completamente i vasi sanguigni nello stroma del Chorio e delle villosità.

Questa condizione morbosa del Chorio, si è iniziata certo molto presto ed essa fu la causa probabile dell'arresto di sviluppo dell'embrione e quindi delle altre formazioni.

La vescicola ombellicale fu sezionata per intero. Lo strato entodermico è completamente caduto, e gli elementi disaggregati riempiono la sua cavità. Il mesoderma ha assunto l'aspetto fibroso, con scarsi vasi sanguigni. Sulla superficie esterna in alcuni punti si notano delle piccole sporgenze sferiche che corrispondono ai cordoni vascolari, che furono osservati macroscopicamente. In queste sporgenze la struttura primitiva della vescicola è meglio conservata, perchè si osservano al centro di esse vasi sanguigni, ed attorno cellule voluminose rotonde o poliedriche, le quali devono essere considerate come proliferazioni entodermiche. Passando in rassegna le sezioni si scorge anche il punto dove la vescicola vi continuava col suo peduncolo; esistendo in questo punto un prolungamento del mesoderma meglio conservato nella sua costituzione, entro al quale si trovavano vasi sanguigni. Non furono notate formazioni epiteliari. La V. ombellicale è uno degli annessi che più frequentemente si presentano alterati nella loro struttura. Però nel periodo a cui corrisponde il nostro preparato, generalmente non è ancora cominciata la degenerazione, per cui le particolarità osservate sono un prodotto patologico.

L'Amnio ed il corpicciuolo moriforme furono sezionati insieme. L'Amnio era semplicemente costituito da due strati cellulari fortemente appiattiti, l'interno era l'entoderma e l'esterno il mesoderma somatico. Le cellule non si presentavano in condizioni normali.

La distinzione venne fatta piuttosto avuto riguardo alla posizione che occupavano i due strati cellulari, senza di ciò sarebbe impossibile di riconoscere l'ectoderma dal mesoderma, avendo gli elementi pressochè identici caratteri.

Ho esaminato con speciale attenzione il punto in cui il corpicciuolo aderiva alla superficie esterna dell'Amnios. Questa aderenza si faceva per mezzo di un breve peduncolo non molto esteso, per cui il corpo moriforme era come appiccicato all'Amnio.

L'Amnio nel punto d'attacco era leggermente inspessito e le cellule maggiormente degenerate. Alla sua faccia interna non

esistevano particolarità le quali facessero credere a residui embrionali in via di scomparire.

Il corpo moriforme nelle sezioni trasversali si dimostrò molto irregolare. Ma la sua costituzione è piuttosto uniforme. Risulta formato da alcuni piccoli lobi che subiscono cambiamenti di forma e di posizione nelle diverse sezioni. Contiene nel suo interno piccole cavità delle quali non è facile rendersi ragione.

I lobi più cospicui erano costituiti da piccole cellule rotonde, intensamente colorite che ricordavano quelle che si riscontrano nel mesoderma degli embrioni profondamente degenerati. La superficie esterna di questi lobi era ben circoscritta ed in molti punti limitata da un solo strato di cellule, più voluminose, indecise nei loro contorni, le quali assumevano quasi l'aspetto di un epitelio. Ma esse non circondavano tutta la formazione, ma in alcuni tratti scomparivano o meglio si confondevano colle cellule mesodermiche. Nei lobi più piccoli il tessuto costitutivo aveva meglio conservato la sua struttura primitiva.

Non esistevano vasi sanguigni ben limitati, ma in mezzo al tessuto mesodermico comparivano cumuli cellulari molto circoscritti, i quali per la forma e costituzione potevano essere considerati come globuli sanguigni rossi nucleati, appartenenti alla circolazione onfalo-mesenterica (vedi fig. 3ª).

Entro questa formazione si trovavano pure delle cavità vuote irregolari nella loro forma, alcune erano circoscritte dal mesoderma e non si poteva dire che cosa rappresentassero. Altre erano circondati da cellule epiteliari ben manifeste, e queste potevano considerarsi come residui del canale vitellino.

Ciò che abbiamo detto è più che sufficiente per dimostrare come il corpo moriforme non rappresenti parti dell' embrione, le quali mal si concepirebbero poste fuori dell'Amnio nel Coeloma esterno, ma costituisca un residuo alterato del peduncolo vitellino nel mentre stava per mettersi in rapporto coll'Amnio, e che, mancando l' embrione al quale doveva recarsi, ha degenerato in una formazione irregolare e non corrispondente ad alcuna condizione normale. La cavità dell'Amnio completamente vuota, non presentava alcun segno del punto dove sarebbe esistito l'embrione.

Ora come possiamo noi comprendere la scomparsa del-

l'embrione in una cavità amniotica relativamente così poco sviluppata? In quale epoca avrebbe incominciato ad agire la causa che ha prodotto la nostra anomalia, ed in quali condizioni di sviluppo si trovava l'embrione? Per cercare di renderci ragione di questa anomalia di sviluppo, dobbiamo prendere in considerazione le osservazioni recentemente pubblicate sui primi stadi di sviluppo della specie nostra, le quali fanno d'alquanto progredire le nostre cognizioni. Prima però desidero vedere se esistono casi consimili descritti nella letteratura.

Per quanto singolare possa sembrare la particolarità studiata, è certo però che non è la sola descritta. Nella letteratura antica e recente si trovano non raramente descritte entro il Chorio delle formazioni vescicolari, di volume e di posizione diversa, le quali non sono troppo bene interpretate, causa l'insufficienza delle nostre cognizioni sulle condizioni normali, e stante anche l'imperfezione dei metodi di ricerca.

Generalmente queste vescicole vengono considerate come rappresentanti dell' embrione, ma lo studio essendosi limitato al puro esame macroscopico, le deduzioni che traggono gli autori non sono sempre convincenti, e perciò non aggiungono gran cosa alle nostre conoscenze.

Non credo opportuno ora di fare una rassegna completa delle ova umane, sempre molto giovani, le quali si trovano in queste condizioni, mi limiterò ad alcune. Ricorderò innanzi tutto l'ovo di His segnato col n. XLIV (Bff) del quale ho già avuto l'occasione di parlare nella mia prima comunicazione (1887), pag. 9. Quest'ovo è soventi citato come disposizione normale dei primissimi stadi, solo recentemente se ne è stabilito la natura. Si tratta di un ovo del diametro di 8 su 7 mm. Aperto il Chorio si trovò che all'interno esistevano due vescicole, l' una elissoidale del diametro di 0,85 mm. su 0,6 mm. con parete non trasparente, l'altra vescicola trasparente. L' una rappresentava la vescicola ombellicale e l'altra l'Amnio. Le due vescicole aderivano fra di loro e per mezzo di un breve stelo erano unite al Chorio.

Giustamente osserva l'His, che l'iniziamento dell'embrione se esisteva, doveva trovarsi nel limite fra le due vescicole. Nella mia prima comunicazione io sollevava dei dubbi sulle condizioni normali di quest'ovo. Ora il Mall nel suo recente la-

voro sul Coeloma ci dice che avendo studiato l'ovo di His insieme ad altri, trovò che esso non era normale, che una degenerazione fibrosa aveva colpito l'embrionale vescicola dopo che essa aveva raggiunto lo stadio dell' embrione v. H. di Spee (Mall l. c. pag. 409). Cionondimeno quest'ovo per me è di grande interesse, rappresentando uno stadio più giovane di quello che abbiamo studiato, e servendo a dimostrare come la causa che produce questa anormalità di sviluppo si inizii nei primissimi periodi quando i primi rudimenti dell'embrione non sono ancora comparsi. Ed oggidì abbiamo argomenti per provare questa nostra asserzione.

Queste forme appartengono al gruppo dei prodotti abortivi nei quali manca l' embrione con persistenza di tutti gli annessi di origine fetale, del quale gruppo abbiamo riportato esempi nelle comunicazioni precedenti. Ma questo gruppo, avuto riguardo al modo con cui si comporta l' embrione deve essere diviso in due parti, una che comprende i prodotti nei quali l'embrione non solo si è iniziato ma è giunto ad un certo grado di sviluppo, poi si è arrestato, fu invaso da processo di disgregazione, scomparve per assorbimento, non lasciando traccia della sua esistenza o rari residui del cordone che lo legava alle altre membrane. E questo è quanto fu già bene studiato nelle precedenti comunicazioni.

L'altra parte abbraccia quei prodotti nei quali l'embrione non è mai comparso, solo le membrane si sono sviluppate. A questa categoria appartengono l'embrione descritto e quello di His, e costituisce una categoria nuova fino ad ora non ancora studiata.

Perchè le membrane possano persistere senza la presenza dell' embrione egli è necessario che il loro sviluppo preceda quello dell' embrione. Ammettendo che l'Amnio compaia dopo i primi rudimenti embrionali, e si sviluppi per mezzo di pliche, come succede nel pulcino, è difficile ed impossibile di poter comprendere come possa persistere l'Amnio senza sviluppo dell'embrione. Ma dopo la descrizione di ova molto giovani fatta recentemente da Spee e da me, sembra probabile che l'Amnio nella specie nostra preceda lo sviluppo dell' embrione e così pure la V. ombellicale; e che l'embrione si sviluppi dall'ectoderma dell'Amnio e dall'entoderma della V. ombellicale nel punto in cui le due vescicole si corrispondono, per ulteriore

differenziazione degli elementi ectodermici ed entodermici. In allora resta facile di rendersi ragione delle nostre osservazioni, basta supporre che un disturbo nello sviluppo avvenga nel momento in cui tutti gli annessi sono comparsi ed incomincia a modificarsi l'epitelio amniotico per dare origine al disco germinativo, nel periodo vale a dire a cui corrisponde il nostro ovo, di 11 giorni, perchè cessi lo sviluppo del disco germinativo, e di ogni parte embrionaria, mentre le vescicole amniotica ed ombellicale già ben organizzate continuano a crescere, per avere riprodotto prima l'ovo di His n. XLIV e più tardi il nostro ora descritto.

E queste anomalie di sviluppo riescono quindi una conferma indiretta di disposizioni che si osservano nelle condizioni normali, poichè lo sviluppo fu fermato in questo primo periodo, e non si ebbe più nessuna evoluzione degli elementi, tranne un ingrandimento delle parti già esistenti.

Da ciò si scorge in modo molto evidente come lo studio delle anomalie di sviluppo dell'embrione umano, oltre all'interesse generale che presenta indicando le forme, i rapporti, le connessioni che esistono fra i diversi prodotti abortivi, possa ancora contribuire a meglio precisare le condizioni normali di sviluppo quando esse sono indiziate da rigorose osservazioni.

Anche il Mall ha cercato di trarre partito di ova umane anormali sotto forma vescicolare credendo che esse rappresentino un arrestato sviluppo di un primitivo stadio, dovuto alla imperfetta nutrizione o ad altra causa. Egli succintamente parla di 10 ova anomale fra 36 esemplari della sua collezione. Di queste 10 ova

Tre contenevano nessun embrione.

Uno conteneva solamente il cordone.

Tre presentavano una doppia vescicola come nel nostro caso (fra questi è compreso l'ovo XLIV di His).

Tre contenevano una sola vescicola la quale era abbastanza ampia e si dimostrava costituita da due strati, uno interno endodermale e l'altro esterno mesodermale, fra i due strati esistevano, in un esemplare, isole di sangue, quindi la V. doveva rappresentare un sacco vitellino, il quale era unito al Chorio per mezzo di un peduncolo mesodermale. Non esisteva Amnio od altre formazioni embrionarie.

Ora il Mall mentre considera giustamente i tre esemplari

presentanti due vescicole nello stesso modo che noi abbiamo interpretato il nostro caso, vale a dire come un arresto di sviluppo (per degenerazione fibrosa) nel periodo dell' embrione v. H. di Spee; i tre casi contenenti una sola vescicola (sacco vitellino) li considera di un periodo più giovane, nel quale periodo perciò dovrebbe esistere solo la vescicola ombellicale unita al Chorio per il peduncolo mesodermale con mancanza dell'Amnio, il quale si formerebbe in uno stadio successivo per un piegamento della vescicola in corrispondenza del peduncolo d'attacco. E così con queste asserzioni ipotetiche tenta di rendersi ragione delle disposizioni singolari che presentava un altro ovo descritto fin dal 1893 e da lui considerato normale e come rappresentante lo stadio più giovane fino ad ora studiato.

Quest'ultimo ovo di Mall fu già da me discusso in altro lavoro (5) e non volendo ripetermi, ad esso rimando il lettore.

Ho voluto qui accennare un po' dettagliatamente alle osservazioni del Mall per dimostrare che colla scarsità del nostro materiale di studio, vi abbia oggidì la tendenza di utilizzare in tutti i modi i prodotti abortivi molto giovani per portar luce sulle prime fasi di sviluppo della specie nostra. Noi non possiamo rimanere indifferenti a tutti questi tentativi che vengono fatti, dobbiamo prendere in considerazione le ipotesi anche un po' spinte che vengono avanzate, essendo solo colla discussione di esse che vien mantenuto vivo lo spirito di ricerca, in un campo così sparso di difficoltà.

Ma le formazioni vescicolari perchè possano essere utilizzate per lo studio della storia dello sviluppo della specie nostra, è assolutamente necessario che esse appartengano ai primissimi stadi, nei quali l'embrione sta per comparire od è appena iniziato. Le altre forme, le quali dipendono dalla scomparsa dell' embrione arrestato nel suo sviluppo in periodi più avanzati, non hanno grande interesse per la questione che stiamo ora trattando. Quindi la conclusione di queste osservazioni si è che il gruppo dei prodotti abortivi, nei quali manca l'embrione con persistenza di tutti gli annessi d'origine fetale, che io aveva ben stabilito nella Comunicazione IX, pag. 23, ed in un riassunto critico (*Ergebenisse der Anatomie* ecc., 1896, pag. 648) deve essere distinto in due classi: nella 1ª l'embrione, dopo essere giunto ad uno stadio più o meno avanzato, colpito

da arresto, è scomparso in sito per assorbimento senza lasciar traccia alcuna; nella 2ª classe *l' embrione non si è sviluppato.* E quindi questa classe deve comprendere i prodotti abortivi più giovani.

Parlando di formazioni vescicolari viene subito alla mente l'ovo descritto 20 anni or sono da Beigel e Löwe e che con sorpresa ho veduto essere compreso nella statistica che il Minot nel suo trattato di Embriologia dà degli Embrioni umani giovani normali nello stadio della comparsa della stria primitiva, insieme a molti altri, i quali non meritavano certamente tanto onore.

L'ovo di Beigel e Löwe conservato per lungo tempo in glicerina, e studiato sotto acqua si presentava di forma allungata ed aveva i diametri di 4 a 5 e di 2 $^{1}/_{2}$ a 3 mm. Era coperto da villosità diramate. Aperto il Chorio, nella sua cavità ed alle due estremità polari si trovavano a destra tre vescicole sferiche ed a sinistra una, come si vedono rappresentate nella fig. 2ª. Le tre di destra sono strettamente applicate fra loro e di volume vario; la sinistra più voluminosa di tutte è posta nell' estremità sin dall' ovo. Dalla descrizione insufficiente e dalle figure non si può ben comprendere che cosa rappresentino queste formazioni. L'opinione degli autori, che la vescicola inferiore più piccola del polo destro rappresenti il vero ovo, e le altre tre siano ova abortive le quali nella menstruazione giunsero nella tuba ma non furono fecondate, non merita di essere discussa. Certo non si tratta qui di una disposizione normale. Questa osservazione non ha aggiunto nulla alle nostre cognizioni, ma meritava d'essere ricordata per dimostrare che l'incertezza in cui ci troviamo sulle condizioni di sviluppo della specie nostra ci rende talora così tolleranti da accettare osservazioni di nessun valore.

La descrizione del nostro ovo ci è istruttiva per diversi riguardi. Innanzi tutto si vede come le formazioni vescicolari possono trovarsi completamente libere entro la cavità del Chorio e ciò non di meno avviene il loro accrescimento in volume. La V. ombellicale del nostro ovo ha raggiunto un volume che non si osserva mai nelle condizioni normali in qualunque periodo di sviluppo, la sua parete mesodermale avendo subìto una degenerazione fibroide, si presenta resistente, e si è attraverso ad

essa che si introducevano gli umori somministrati dal Chorio, che davano alla vescicola una grande tensione, e producevano il suo aumento in volume; ma questo aumento è puramente passivo, non seguìto dagli elementi costitutivi della parete, i quali erano in completa rovina. Quindi l' aumento in volume avrebbe dovuto avere un limite nella resistenza della parete, la quale assottigliandosi avrebbe finito per rompersi.

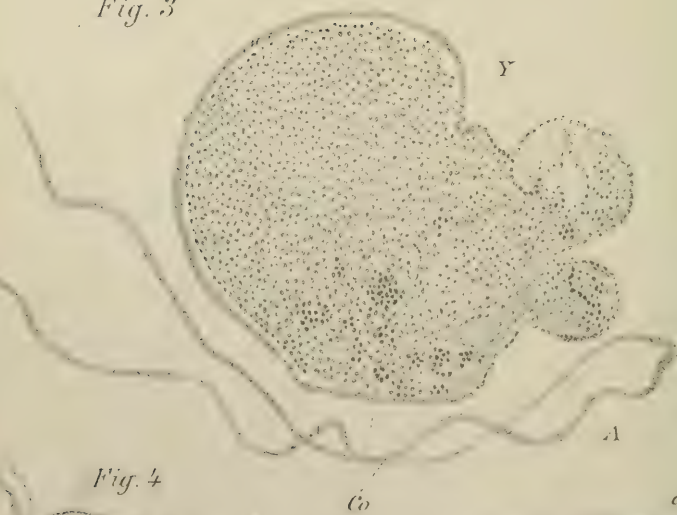
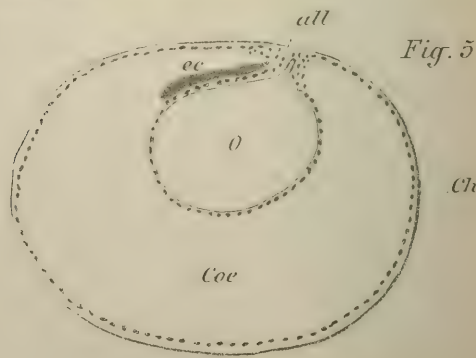
Lo stesso deve dirsi del sacco amniotico.

Il nessun legame che presentano queste vescicole col Chorio, è ancora importante a notarsi, poichè se sotto le contrazioni uterine il sacco del Chorio venisse rotto in qualche punto, in allora le vescicole escono liberamente dalla cavità coriale, sono espulse poscia dal sacco dell'ovo, e possono venir raccolte come formazioni indipendenti, ed occorre un certo studio per riportarle alle loro condizioni primitive.

È questo appunto il meccanismo con cui furono organizzati ed emessi due piccoli sacchi amniotici che abbiamo studiato nella Com. I e II (osserv. 2ª e 4ª). Nell'osserv. 2ª era facile la diagnosi perchè entro il sacco stava un embrione arrestato nel suo sviluppo. Nell' osserv. 4ª era più difficile perchè mancava ogni traccia di parti embrionali. Cionondimeno tenendo conto del modo di presentarsi della vescicola, della sua costituzione, abbiamo interpretato questa vescicola come un Amnio con mancanza dell' embrione. Ora l' osservazione che abbiamo studiata in questa comunicazione viene a confermare completamente il nostro giudizio; indicandoci inoltre le condizioni in cui si trovano prima d'essere espulsa.

Così tutte le nostre osservazioni, che a primo aspetto possono parere estranee l' una all' altra, sono invece intimamente legate fra loro e si vanno completando vicendevolmente.

---

Fig. 1
Ch
O
Y
A
Fig. 2
Y
A
X
Fig. 3
Y
A
Co
Fig. 4
O
A
Ch
Fig. 5
all
ec
O
Ch
Coe

## LETTERATURA

1. Franklin P. Mall, *Development of the human Coeloma,* " Journal of Morphology ,, vol. XII, Num. 2, 1897.
2. W. His, *Anatomie menschliche Embryonen,* 2° fasc., pag. 32 e 87, fig. 24 e 47.
3. Hermann Beigel e Ludwig Löwe, *Beschreibung eines menschlichen Eichens aus der zweiten bis dritten Woche der Schwangerschafte,* " Archiv für Gynäkologie ,, Band XII, Heft 3.
4. C. Giacomini, *Die Probleme, welche sich aus dem Studium der Entwickelungsanomalien des menschlichen Embryos ergeben. Ergebnisse der Anat.,* 1896.
5. Id., *Un ovo umano di 11 giorni,* " Giornale della R. Accademia di Medicina ,, 1897.
6. F. Graf v. Spee, *Neue Beobachtungen über sehr frühe Entwickelungsstufen des menschlichen Eies,* " Archiv für Anatomie ,, 1896.

---

## SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1ª. — *Ch.* Chorion aperto che lascia vedere il Coeloma esterno, entro il quale si trovano le due vescicole. — *O.* Sacco vitellino ed *A.* Amnios. Alla estremità superiore dell'Amnios si trova il corpo moriforme *Y* (grandezza naturale).

Fig. 2ª. — Estremità superiore dell'Amnios leggermente ingrandita, per meglio scorgere le disposizioni che assumeva il corpo moriforme *Y.* — In *X* si vede un sottile filamento che partendo dal corpo moriforme va a perdersi alla superficie esterna dell'Amnios.

Fig. 3ª. — Una sezione del corpo moriforme *Y* per dimostrare la sua costituzione. In *Co.* si trovano piccoli cumuli cellulari, che sono i residui di corpuscoli sanguigni della circolazione omfalo-mesenterica. — *A.* sezione dell'Amnios irregolarmente pieghettato.

Fig. 4ª. — Ovo di His segnato col N. XLIV (*Bff*) ingrandito 20 volte (fasc. 2°, pag. 88). Si vede un tratto di Chorio colle sue villosità, il quale sostiene due vescicole aderenti fra loro. La vescicola elissoidale e più opaca rappresenta la vescicola ombellicale, l'altra il sacco amniotico. La disposizione è perfettamente identica a quella che abbiamo descritto, se non che rappresenta uno stadio più giovane.

Fig. 5ª. — Diagramma di un ovo patologico, il quale rappresenterebbe un primitivo ipotetico stadio di sviluppo della specie nostra secondo Mall (pag. 409, fig. 7). — *Ch.* Chorion. — *Coe.* Coeloma esterno. — *O.* vescicola ombellicale. — *All.* Posizione dell'allantoide — *ec.* ectoderma.

# *Di alcuni Corallari Oligocenici del Piemonte e della Liguria;*

Nota di ELODIA OSASCO.

La collezione di Corallari Oligocenici del Piemonte e della Liguria raccolta nel R. Museo Geologico di Torino, ricca di ben 150 specie, era solo in parte già determinata dal Sismonda e dal Michelotti.

Nel riordinarla e classificarla riscontrai parecchie specie non ancora note ed ebbi campo di fare interessanti osservazioni. Qui descrivo le nuove specie ed aggiungo sopra specie già conosciute poche note che servono a farle meglio distinguere od a chiarire dubbi ed incertezze.

**Isis granifera** n. sp. (fig. 13).

*Polyparium articulo extremitatibus alia planulata atque alia laeviter convexa; superficie laterali fortiter granulata; granis rotundis in ordinibus regularibus longitudinaliter dispositis.*

*Altitudo 17 mm. Axis 5 mm.*

*Tongriano.* — Dego (rara).

*Osserv.* — L'ornamentazione e la rugosità che ne risulta la distinguono dalle congeneri.

**Montlivaultia bormidensis** E. H.

1861. Michelotti, *Foss. Mioc.*, pag. 3, pl. III, fig. 2-3.

*Tongriano.* — Dego (abbondante), Cassinelle (rara).

**Montlivaultia bormidensis** E. H. Var. **elata** n. (fig. 9).

Distinguunt hanc varietatem a specie typica sequentes notae:

*Polyparium elatum, base subplana, vel laeviter depressa, theca verticali.*

*Altitudo 25-35 mm. Axis calicis 40 mm.*

*Tongriano.* — Carcare-Dego (rara).

*Osserv.* — Le coste sulla base sono subeguali, poco distinte, perchè mascherate dalle pieghe dell'epitecio; ma lateralmente appaiono diseguali essendo 12 maggiori e 5 minori interposte di cui la mediana alquanto più spiccata. I setti sono probabilmente in 5 cicli non completi di cui i primi due eguali e molto elevati sul calice, il terzo tendente ad eguagliarsi ai primi. L'esemplare di Dego, di cui dò la figura, raggiunge solo 25 mm. d'altezza, quello di Carcare ne ha 35; ma è molto eroso.

**Montlivaultia carcarensis** D'Arch. et Haim.

1861. Michelotti, *Foss. Mioc.*, pag. 36, pl. III, fig. 1.

*Tongriano.* — Carcare-Dego (rara).

**Montlivaultia carcarensis** D'Arch. et Haim. Var. **plana** n. (fig. 10).

Distinguunt hanc varietatem a specie typica sequentes notae:

*Polyparium depressum, base subplana, laeviter concava in media parte.*

*Altitudo 15 mm. Axis calicis 40-45 mm.*

*Tongriano.* — Cassinelle (rara).

*Osserv.* — Per la base appianata e leggermente depressa nel centro questa varietà si direbbe una *M. bormidensis* E. H. e per l'altezza si troverebbe fra la detta specie e la sua varietà *elata.* Ma la teca, dopo essersi allargata nella base, non si eleva formando angolo retto; ma invece gradatamente s'incurva e si allarga in un calice di diametro maggiore che non quello della base. Inoltre le coste tutte uguali sono più sottili, ma più nette, l'epiteca meno abbondante e rugosa, ed i setti dei primi cicli eguali; altri setti non appaiono perchè immersi nella marna. Per tutti questi caratteri considero l'esemplare come varietà della *M. carcarensis* non negando l'affinità sua colla *M. bormidensis.*

**Symphyllia cerebriformis** (Micht.),

1840-47. Michelin, *Iconog. zooph.,* pag. 55, pl. 11, fig. 6 (*Meandrina bisinuosa*).

*Tongriano.* — Mornese? (rara).

*Osserv.* — L'unico esemplare ch'io riferisco alla specie era determinato dal Sismonda come *Favia pulcherrima* Micht. Ma esso corrisponde esattamente alla figura data dal Michelin ed inoltre l'essere i calici in gran parte confluenti ed il trovarsi un regolarissimo solco tra le coste mi aveva subito fatto sorgere il dubbio che non si trattasse di una vera *Favia*. Infatti se a primo aspetto si ha l'impressione di una corona di denti interni paliformi, un più attento esame lascia scorgere più internamente denti minori ed in un calice si conserva un dente più esterno maggiore, onde io credo veramente che i denti siano tanto maggiori quanto più esterni e che la falsa apparenza si debba alla distruzione dei denti esterni ed al confondersi degli interni colla columella, onde solo i mediani spiccano. Del resto già il D'Achiardi (1) notava un passaggio tra la *S. cerebriformis* (Micht.) e la *Favia pulcherrima* Micht.

**Symphyllia vetusta** n. sp. (fig. 1).

*Polyparium magnum, superne laeviter convexum; superficie laterali subverticali, nuda, laeviter striata et granulata; base subconcava. Calicibus in vallibus sine lege dispositis vel ovatis. Vallibus et calicibus divisis sulcis laevissimis. Multis septis dentatis. Fossula profunda, columella?*

*Altitudo 15-40 mm. Axis polyparii 16 cm. Axis vallium 4-6 mm. calicis 10 mm.*

*Tongriano.* — Sassello? (rara).

*Osserv.* — Distinguono questa specie dalla *S. cerebriformis* (Micht.) i setti più finemente denticolati o piuttosto granulati, i solchi meno pronunciati tra valle e valle, i setti non così regolarmente ed ugualmente debordanti e più sottili in vicinanza del calice. Polipaio più elevato, solchi più distinti tra valle e valle, maggior numero di setti servono a distinguerla dalla *S. multisinuosa* De Angel. (2).

In questa, come nella precedente specie, i denti appaiono maggiori verso il centro, ma credo ciò doversi alla fossilizzazione, del resto anche il De Angelis dice nella *S. multisinuosa* i dentelli maggiori verso la columella.

---

(1) 1868. D'Achiardi, *Studi comp.*, pag. 11.

(2) 1894. De Angelis, *Corall. terz.*, pag. 69, tav. I, fig. 29.

**Ulophyllia magnicostata** Sismond.

1871. Sismonda, *Mat. pal.*, pag. 326, pl. I, fig. 5.

*Tongriano.* — Dego (rara).

*Osserv.* — L'unico esemplare è il tipo su cui Sismonda fondava la specie, dunque non di Sassello si dovrà essa ritenere (come appare dal lavoro del Sismonda), ma di Dego poichè il cartellino accompagnante il fossile porta la località Dego di pugno stesso del Sismonda.

**Hydnophora minoris** n. sp. (fig. 2).

*Polyparium magnum, superne planum, depressum, base lobata, convexa, pedunculata, laeviter costata atque granulata. Collibus longis, flexuosis, acutis, minime elatis, paullum ad basem dilatatis, monticulis parvis, compressis; septis subaequalibus (20 per cm.).*

*Axis vallium 4-7 mm.*

*Tongriano.* — Sassello, Mornese (rara).

*Osserv.* — È affine alla *H. scripta* De Angs. (1), ma ne la distinguono la strettezza delle valli, l'esiguità delle colline ed il maggior numero dei monticoli, sebbene a questo carattere io non dia grande importanza essendo variabilissimo.

Uno degli esemplari ch'io riferii alla specie (Mornese) era determinato *H. anceps* Micht. (2), ma gli stessi caratteri sopra detti servono a distinguerlo da essa.

**Hydnophora anceps** Micht.

1871. Sismonda, *Mat. pal.*, pag. 321, pl. V, fig. 2.

*Tongriano.* — Sassello (rara).

*Osserv.* — È un magnifico esemplare con piano comune finemente costato e granuloso, formato come da due ventagli aperti riuniti per la base.

Superiormente è convesso, le valli sono larghe da 6 a 10 mm. circa, la base delle colline è di larghezza corrispondente, i monticoli rarissimi e compressi son poco sviluppati. I setti nell'interno si riuniscono coi vicini, cosicchè, quando per erosione sono

(1) 1894. De Angelis, *Corall. terz.*, pag. 63, tav. II, fig. 15-16.

(2) 1871. Sismonda, *Mat. pal.*, pag. 321, pl. V, fig. 2.

in parte asportati, la porzione interna talora rimane simulando quasi una columella lamellare.

Questo esemplare, che giaceva tra il materiale nôn determinato del museo, corrisponde abbastanza bene alla figura tipica, mentre altri esemplari, che portavano questa determinazione, dovetti staccare dalla specie perchè se ne allontanano per numerosi caratteri. Non potei rinvenire l'esemplare tipico della specie, ma non oserei affermare non sia la figura la rappresentazione d'una porzione dell'esemplare sopra descritto, chè il fatto dell' essere nel lavoro del Sismonda le figure per lo più capovolte e l'intreccio delle colline e delle valli rende talora arduo il riconoscere gli esemplari.

**Hydnophora affinis** Micht.

1871. Sismonda, *Mat. pal.*, pag. 321, pl. V, fig. 3.

*Tongriano.* — Sassello (abbondante), Dego, Mornese (rara).

*Osserv.* — Un esemplare di Mornese colla determinazione *H. affinis* corrisponde abbastanza bene alla figura, ma non ha certo, come dice la descrizione, le colline sottili, anzi è forse l'*Hydnophora* che più le ha allargate alla base essendo perciò molto affine alla *H. scripta* De Angs. (1); ma questa è in lamine incrostanti, mentre il mio esemplare ha base ristretta, peduncolata, gli altri esemplari di Sassello hanno le colline più elevate e meno allargate alla base, quello di Dego invece le ha elevatissime (era determinato *Meandrina phrygia* Lam.) (2). Come si vede sarebbe l'elevazione delle colline variabile, ma sempre alquanto grande, ciò che d'altra parte risulta se non dalle parole almeno dalla figura che ne dà il Sismonda.

**Hydnophora magnifica** n. sp. (fig. 3 *a*, *b*).

*Polyparium magnum, superne dulcissime et irregulariter convexum, attenuatum ad basem, pedunculatam, lobatam et laeviter striatam atque granulatam; collibus longis, elatis, acutis, ad basem paullum dilatatis, radiantibus a centro. Monticulis in seriebus positis, in aliis partibus multis, in aliis paucis.*

---

(1) De Angelis, *Corall. terz.*, pag. 63.

(2) 1841-47. Michelin, *Iconog. zooph.*, pag. 55, pl. 11, fig. 5.

*Multis septis alternis aequalibus vel tribus minoris, vel aequalibus in monticulis.*

*Axis poliparii 35 cm. Axis vallium 5-6 mm. Vallibus profundis 7 mm.*

*Tongriano.* — Sassello. Cassinelle (rara).

*Osserv.* — Uno di questi esemplari era determinato come *H. anceps* Micht.; ma se ne distingue, come in generale la nuova specie, per numero di monticoli, per colline poco sinuose e più ristrette.

**Hydnophora meandrinoides** (Michn.).

1840-47. Michelin, *Iconog. zooph.*, pag. 57, tav. 1, fig. 9 (*Monticularia*).

*Tongriano.* — Sassello? (rara).

**Hydnophora meandrinoides** (Michn.) Var. **multisepta** n.

1871. Sismonda, *Mat. pal.*, pag. 322, pl. V, fig. 1.

Distinguunt hanc varietatem a specie typica sequentes notae:

*Polyparium multis septis subtilibus, collibus et monticulis magnis. Altitudo 30-45 mm. Axis vallium 10-13 mm.*

*Tongriano.* — Dego, Cassinelle (rara).

**Favia pulcherrima** Micht.

1861. Michelotti, *Foss. Mioc.*, pag. 40, pl. IV, fig. 1-2.

*Tongriano.* — Sassello (abbondante), Dego (rara).

*Osserv.* — Il De Angelis dà la diagnosi del sottogenere *Clypeofavia* (1) che già il Michelotti in manoscritti elevava a genere. Ma io trovo mancare in alcuni esemplari i caratteri del sottogenere, così lo spessore, talora più grande, e la disposizione in serie continua. Altri sono cancellati dalla fossilizzazione. Onde credo inopportuna la distinzione perchè raramente possibile negli esemplari fossili. In quanto all' altezza del polipaio, Michelotti stesso descrivendo la specie dice: " Polipier élevé ". In uno dei miei esemplari l'altezza è di 9-10 mm. da un lato, ma di 30 e più dall'altro.

---

(1) De Angelis, *Corall. terz.*, pag. 61.

**Favia minima** n. sp. (fig. 12).

*Polyparium subtile, incrustans, calicibus parvis, irregularibus, inaequalibusque; multis costis granulatis, granulis rotundis maioribus ad calicem; septis in quatuor cyclis subaequalibus vel duodecim elatioribus. Columella?*

*Axis calicis 4-8 mm.*

*Tongriano.* — Sassello (non rara).

*Osserv.* — Si distingue dalle congeneri per la piccolezza dei calici; in un esemplare notansi alcune serie calicinali.

**Septastraea minuslamellata** n. sp. (fig. 4).

*Polyparium convexum, incrustans, laminis subtilibus, multis polypieridibus, calicibus acutis, polygonis irregularibus, fossula profunda, duodecim septis lamellaribus, sex maioribus. Sine columella.*

*Altitudo minima ad latera, in media parte 20 mm. Axis calicis 10 mm.*

*Tongriano.* — Sassello (rara).

*Osserv.* — Si distingue dalla *S. laxelamellata* Micht. (1) per minor ampiezza di calice e minor numero di setti.

**Brachyphyllia crassa** n. sp. (fig. 7).

*Polyparium massivum, polypieridibus valde elatis, fortis atque multis costis subaequalibus. Septis dentatis in quatuor cyclis incompletis, duobus aequalibus, septis costalibus debordantibus, calicis circularibus vel aliquantum compressis.*

*Altitudo 60 mm. Axis calicis 10 mm.*

*Tongriano.* — Mornese? (rara).

*Osserv.* — È distinta dalla *B. neglecta* D'Ach. (2) perchè ha polipaio più elevato, calici più debordanti e grandi. Credo sia distinta dalla *B. magna* D'Ach. e dalla *B. gregaria* D'Ach. (2) per avere calici più ristretti e minor numero di setti, sebbene la breve descrizione e la mancanza di figura non permettano un confronto preciso.

---

(1) 1861. Michelotti, *Étud. Mioc. inf.*, pag. 41, pl. III, fig. 10-11.
(2) 1867. D'Achiardi, *Catalogo Corall. foss. num.*, pag. 7.

**Prionastraea propinqua** Micht.

1871. Sismonda, *Mat. pal.*, pag. 300.

*Tongriano.* — Sassello (rara).

*Osserv.* — Credo non inopportuno notare che l'unico esemplare, il quale già porta la determinazione del Sismonda, si distingue dalla *P. multisepta* non solo pel diametro minore del calice, ma ancora per lo scarso numero di setti, che è tutt'al più di dodici.

**Prionastraea intermedia** n. sp. (fig. 5 *a*, *b*).

*Polyparium elatum, superne subplanum, polypieridibus tortuosis, costatis, thecis adhaerentibus ad calicem, ad basem disiunctis, calicibus polygonalibus, interdum fere circularibus, septis paucis.*

*Altitudo 6 cm. Axis calicis 3-4 mm.*

*Tongriano.* — Sassello (rara).

*Osserv.* — Le maggiori proporzioni la distinguono dalla *P. parvula* Micht. (1). Mentre la minor grandezza dei calici ed il polipaio elevato e massiccio credo la distinguano dalla *P. geometrica* (Micht.) per quanto si può arguire dalla insufficiente descrizione e dalla figura (2).

**Cladangia minor** n. sp. (fig. 8).

*Polyparium lobatum, polypieridibus paullum elatis, obliquis, debordantibus et fortiter costatis, anellis perithecalibus coniunctis; calicis circularibus, septis in tribus cyclis, inaequalibus, fossula superficiali, columella tuberculari.*

*Altitudo minima aut 34 mm. Axis calicis 2 mm.*

*Tongriano.* — (rara).

*Osserv.* — Determinata come *Astrangia minima* D'Ach. (3) presenta i calici più avvicinati ed elevati, inoltre hanno essi un diametro di 2 mm. ossia son doppi che nella detta specie. Nell'interno poi si possono riconoscere i prolungamenti orizzontali che tengono uniti i polipieridi, proprii del genere *Cladangia.*

---

(1) 1871. Sismonda, *Mat. pal.*, pag. 300, pl. VIII, fig. 11.
(2) 1838. Michelotti, *Sp. zooph.*, pag. 113, pl. IV, fig. 2.
(3) 1868. D'Achiardi, *Studi comp.*, pag. 20, pl. II, fig. 7.

**Stylastraea oligocenica** n. sp. (fig. 15 *a*, *b*).

*Polyparium magnum, polypieridibus costis coniunctis, calicibus circularibus, laeviter debordantibus; costis aequalibus, traversis exothecalibus multis, endothecalibus paucis. Septis laeviter dentatis in tribus cyclis, duodecim maioribus, columella styliformi, elata.*
*Altitudo minima vel 40 mm. Axis calicis 4 mm.*

*Tongriano.* — Mornese (rara).

*Osserv.* — In questo esemplare è predominante la riproduzione per gemmazione intercalicinale; ma in un calice appare in azione la riproduzione scissipara.

**Stylastraea pulchra** n. sp. (fig. 14).

*Polyparium massivum, magnum, convexum, multis polypieridibus, calicibus rotundis, aliquantum elatis, multis costis subaequalibus, septis dentatis, elatis supra calicem, in tribus cyclis, septis primi cycli usque ad columellam styliformem.*
*Altitudo 11 cm. Axis polyparii 23-40 cm. Axis calicis 3 mm.*

*Tongriano.* — Cassinelle? (rara).

*Osserv.* — Il magnifico esemplare non reca indicazione sicura di località, il terreno serpentinoso di cui è imbrattato si direbbe *Elveziano* della collina di Torino, ma è alquanto più compatto e duro sicchè più probabilmente è *Tongriano,* trovandosi presso Cassinelle una località *Tongriana* in cui pure si rinviene il detto conglomerato serpentinoso.

**Phyllocoenia distincta** n. sp. (fig. 6).

*Polyparium massivum, convexum, polypieridibus costis et exothecis coniunctis, costis lamellaribus, distinctis, subaequalibus, vel alternis aequalibus, calicibus circularibus, inaequalibus, septis debordantibus in quatuor cyclis, tribus aequalibus, ad centrum coniunctis, granulatis, vel dentatis. Columella parva.*
*Altitudo 15-30 mm. Axis calicis 7-9 mm.*

*Tongriano.* — (rara).

*Osserv.* — Si distingue assai bene dalla *Ph. procumbens*

Micht. (1) ed *irradians* (Michn.) (2) per il maggior numero di coste e di setti non eguali.

Una leggera dentellatura appare sui setti e sulle coste, la stessa cosa osservo nella *Ph. irradians* e nella *procumbens*.

**Stylophora annulata** Reuss.

1866. D'Achiardi, *Coralli foss. Alpi Venete,* parte I, pag. 29, tav. I, fig. 10.

*Tongriano.* — Sassello, Cremolino (rara), Dego, Mornese, Carcare, Cassinelle (abbondante).

*Osserv.* — Nei numerosi esemplari trovo grande variabilità, sicchè talora in uno stesso polipaio i calici sono grandi o minutissimi, fitti o radi, con orliccio rilevato od appianato. Tantochè i diversi punti dello stesso polipaio si direbbero specie diverse. Onde io non trovai abbastanza caratterizzate e distinte da questa specie la *St. conferta* Reuss (3) e la *St. raristella* Defr. (4).

**Flabellum carcarense** n. sp. (fig. 11 *a*, *b*).

*Polyparium elatum, restrictum, sine pedunculo, paullum compressum ad calicem, base laevigata, costis conspicuis ad calicem, duodecim maioribus, elatioribus, quinque minoribus alternatis. Multis septis in quinque cyclis completis, tribus aequalibus. Calice paullum compresso, elissoidali, fossula magna, profunda (10 mm.). Axe maiore paullum subter minore.*

*Altitudo 30 mm. Axis maior calicis 35 mm., minor 20 mm.*

*Tongriano.* — Carcare (raro).

*Osserv.* — La forma caratteristica delle coste e l'arco della base servono a distinguere questo *Flabellum* da ogni altro.

---

(1) 1871. Sismonda, *Mat. pal.*, pag. 312.

(2) 1840-47. Michelin, *Iconog. zooph.*, pag. 58, pl. 12, fig. 4.

(3) 1868. Reuss, I Abtheilung, *Die Fossilen Castelgomberto*, pag. 153, tav. IX, fig. 3-6.

(4) 1840-47. Michelin, *Iconog. zooph.*, pag. 63, pl. 13, fig. 5 (*Astrea*).

## SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

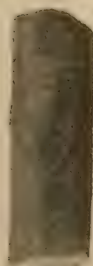
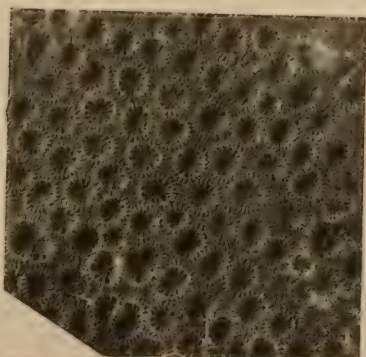
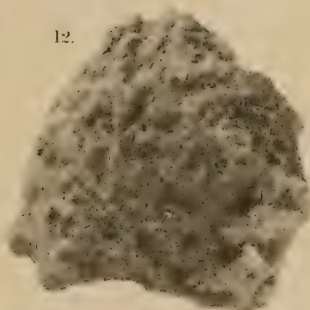
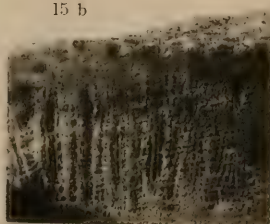
1. *Simphyllia vetusta* Osc.
2. *Hydnophora minoris* Osc.
3ª. „ *magnifica* Osc. (frammento del polipaio in grand. natur.).
3ᵇ. „ „ „ (polipaio impicciolito).
4. *Septastraea minuslamellata* Osc.
5ª. *Prionastraea intermedia* Osc. (polipaio visto dalla pagina superiore).
5ᵇ. „ „ „ (polipaio visto in sezione verticale).
6. *Phyllocoenia distincta* Osc.
7. *Brachyphyllia crassa* Osc.
8. *Cladangia minor* Osc.
9. *Montlivaultia bormidensis* E. H. var. *elata* Osc.
10. „ *carcarensis* Arch. Haim. var. *plana* Osc.
11ª. *Flabellum carcarense* Osc. (polipaio visto lateralmente).
11ᵇ. „ „ „ (calice).
12. *Favia minima* Osc.
13. *Isis granifera* Osc. . . . . . × 2.
14. *Stylastraea pulchra* Osc.
15ª. „ *oligocenica* Osc.
15ᵇ. „ „ „ (sezione verticale del polipaio).

---

## Relazione sulla Memoria “*I principii della Geometria di Posizione composti in sistema logico-deduttivo*„ del Prof. M. Pieri.

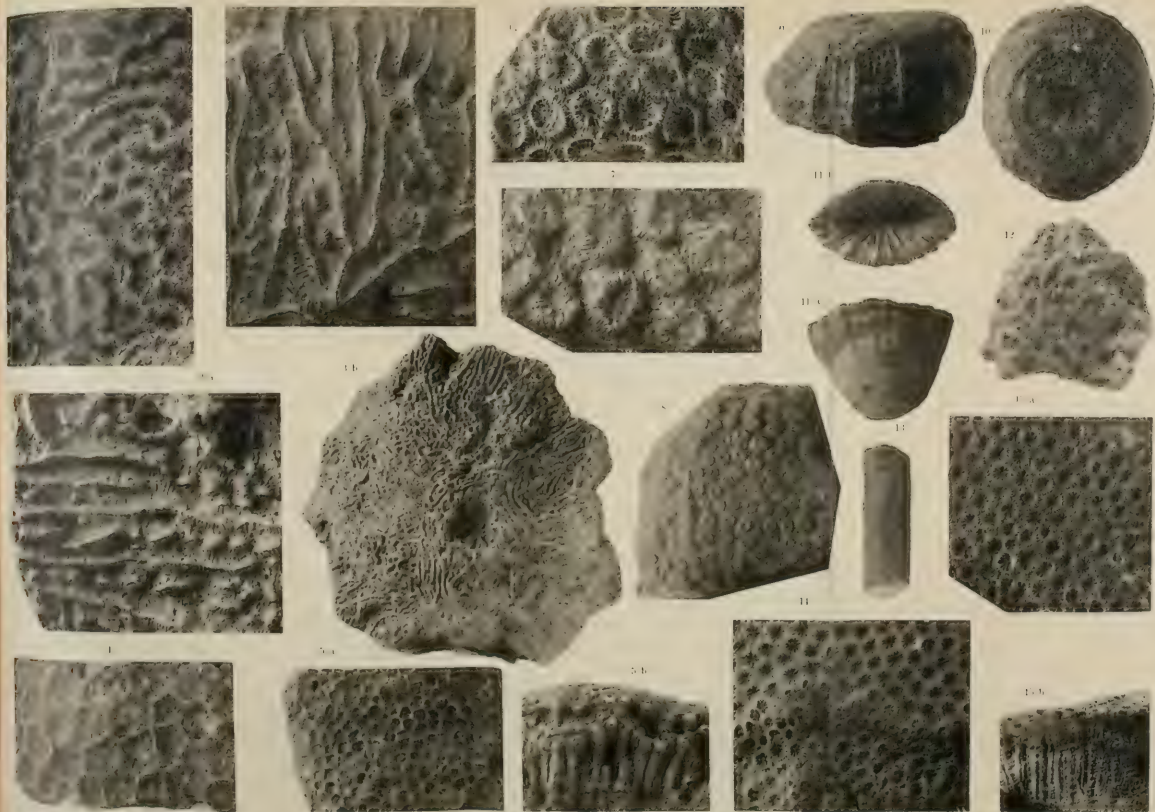
Questa Memoria contiene l’analisi delle idee e delle proposizioni fondamentali della Geometria di Posizione.

L’analisi degli enti che si incontrano in una scienza qualunque porta a classificarli in due categorie: enti primitivi ed enti derivati. Gli ultimi possono essere definiti con definizioni nominali. I primi non possono essere in tal modo definiti; essi sono suscettibili di interpretazione arbitraria entro i confini assegnati dalle proposizioni primitive (assiomi o postulati).

L’A. assume due sole idee primitive, quelle di *punto*, e di *congiungente due punti*. La parola *punto* è sempre seguita dal termine *proiettivo,* avendo l’A. in mira di trattare ciò che con questo nome si intende in Geometria proiettiva.

E. FORMA FOT.

ELIOT. CALZOLARI E FERRARIO, MILANO.

E. FORMA FOT.

ELIOT. CALZOLARI E FERRARIO, MILANO.

Con queste due idee primitive l'A. definisce i varii termini che figurano nella Scienza considerata. Comincia con alcuni termini, quali " figura „, " giacere „, " eguale „, ecc. strettamente ancora collegati alle idee di logica pura. Passa in seguito a definire il piano; e introduce il gruppo armonico mediante il quadrangolo di Möbius.

Coll'aiuto del gruppo armonico l'A. definisce il segmento proiettivo determinato da tre punti distinti $a$, $b$, $c$ d'una retta. Esso è il luogo dei punti armonici di $b$ rispetto ad una coppia di punti armonici rispetto ad $a$ e $c$.

Col mezzo del segmento proiettivo l'A. nel § 7 definisce la frase " ordine naturale dei punti d'una retta „, gli " ordini concordi „ ed infine arriva a definire i due versi d'una retta. L'interessante risultato, che l'idea del verso d'una retta si possa scomporre nelle sole idee fondamentali da cui parte l'A., è qui esposto per la prima volta.

Seguono le definizioni del triangolo proiettivo, delle trasformazioni segmentarie, ecc. fino allo spazio assoluto.

Le proposizioni della Geometria di Posizione sono classificate in proposizioni primitive (assiomi o postulati) e teoremi. L'A. enuncia i postulati man mano ne sente il bisogno. Si scorge così da quali postulati dipenda ogni proposizione. Ad es. per dimostrare il teorema di Staudt ne sono necessarii 18; l'ultimo è quello della continuità. L'A. dimostra infine l'indipendenza di ogni singolo postulato dai precedenti.

Da pochi anni si sono intrappresi studii nell'indirizzo in cui si è messo il Prof. Pieri. Prima si faceva, nei principii di Geometria, ampio uso dell'intuizione spaziale, sia nella definizione degli enti che nella dimostrazione delle proposizioni. E, lasciando in disparte ogni questione didattica, è cosa della più grande importanza scientifica il riconoscere quante idee ci basta prendere dall' intuizione spaziale, e quali proprietà di queste idee basta affermare, affinchè si possano in seguito, senza più ricorrere all'intuizione, comporre le altre idee e le altre proprietà. Ogni riduzione nel numero delle idee primitive e dei postulati, ogni loro nuova decomposizione è sempre un risultato interessante in sè, come verità pura; esso potrà pure avere applicazioni all'insegnamento.

Fra gli Autori che primi intrappresero un siffatto lavoro va

citato il Pasch; questi parte dalle idee di punto e di segmento, quali si presentano in Geometria elementare; con essi compone più altre idee geometriche; ma nuove idee primitive deve poi ancora introdurre per finire la sua trattazione.

Il Pieri invece si propone di analizzare direttamente le idee della Geometria proiettiva, come una scienza a sè, e non considerandola quale un prolungamento della Geometria elementare. Gli enti primitivi, e gli assiomi che ne enunciano le proprietà, e da cui parte l'A., hanno proprietà invariantiva per proiezione e per dualità. I varii Autori, da Staudt in poi, che così intesero la Geometria proiettiva, introdussero nei loro lavori più enti non definiti. I sigg. Fano (a. 1891) ed Enriques (a. 1894) espressero tutti i concetti della Geometria proiettiva mediante tre soli: punto, retta, e verso d'una retta.

Il Prof. Pieri, in una serie di lavori già pubblicati sullo stesso soggetto, provò come coi due primi concetti si possano esprimere molte idee della Geometria proiettiva. In questo lavoro Egli arriva a scomporre pure l'idea del verso d'una retta, nelle idee primitive precedenti, e a dimostrarne le proprietà coi soli postulati di configurazione, senza ricorrere a proprietà di connessione.

Parecchie delle trattazioni contenute in questo lavoro sono del tutto nuove. E se l'A. per necessità dovette esporre dapprima alcuni dei risultati già ottenuti, in questa esposizione tali risultati acquistano in semplicità e perfezione, e spesso li completa con nuove teorie.

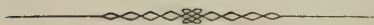
Il lavoro è condotto in ogni sua parte con tutto quel rigore di logica, sia nella sostanza che nella forma, il quale è necessario in questioni ove volontariamente non si fa uso dell'intuizione. Esso contiene gran copia di risultati, frutto di perseveranti studii e calcoli. L'importanza del lavoro induce i Commissarii a proporne la lettura e la stampa nelle Memorie dell'Accademia.

E. D'Ovidio.
C. Segre.
G. Peano, *Relatore.*

---

*L'Accademico Segretario*
Andrea Naccari.

# CLASSE

DI

# SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

---

## Adunanza del 26 Dicembre 1897.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

---

Sono presenti i Socii: CLARETTA, Direttore della Classe, PEYRON, BOLLATI DI SAINT-PIERRE, FERRERO, COGNETTI DE MARTIIS, GRAF, BOSELLI, BRUSA, PERRERO e NANI Segretario.

Il Socio Segretario legge l'atto verbale della precedente seduta che viene approvato.

Il Socio E. FERRERO fa omaggio all'Accademia, a nome dell'Autore, prof. Guido BIGONI, di un lavoro intitolato: *La caduta della Repubblica di Genova nel 1797* (Genova, 1897) e brevemente ne discorre.

Vengono in seguito presentate per l'inserzione negli *Atti* le seguenti note:

1° *Di uno Statuto dato nel 1325 dal conte Edoardo di Savoia,* del Socio E. BOLLATI DI SAINT-PIERRE,

2° *I fasti dei Prefetti del Pretorio di Bartolomeo Borghesi,* del Socio E. FERRERO,

3° *Proverbes et similitudes des Malais avec leurs corre-*

*spondants en diverses langues d'Europe et d'Asie*, dal medesimo Socio, per incarico dell'Autore Socio corrispondente Aristide Marre,

4° *Frammento di un Capitolare nel Cod. A. 220 Inf. della Biblioteca Ambrosiana*, dal Socio Segretario C. Nani, per incarico dell'autore Socio corrispondente F. Patetta.

Nell'adunanza privata la Classe nomina in sostituzione del Socio Giuseppe Allievo, dimissionario, il Socio Ermanno Ferrero a membro della Commissione pei premii di fondazione Gautieri.

# LETTURE

## *Di uno Statuto dato nel 1325 dal Conte Edoardo di Savoia;*

Nota del Socio E. BOLLATI DI SAINT-PIERRE.

Le fonti veramente autentiche e originali che si hanno sulla Storia della Casa di Savoia e de' suoi Dominii nel Medio Evo non sono le Cronache manoscritte del Dorville, del Dupin e del Servion, ma i Protocolli, vale a dire i rogiti dei Segretarii della Casa e i Conti de' suoi Tesorieri generali.

I Protocolli hanno principio dal 1200 e terminano al 1749; i Conti di Tesoreria incominciano dal 1297 e vanno fino al 1792, epoca dell'invasione francese; buona parte è in rotoli di pergamena, e ciascun Conto è diviso in due parti, entrate e spese (*recepit*, *libravit*).

Ambedue le fonti sono ricchissime di notizie e di documenti. Per citare un esempio riguardo ai Conti, in quello del Tesoriere Chabot si trova una Nota particolareggiata di tutte le spese che il conte Amedeo di Challant ebbe a sostenere nella solenne sua ambascieria al Re di Francia in Parigi per trattare del matrimonio della sorella Jolanda col Duca Amedeo nono; e questo particolare è rimasto finora ignorato, anche dal Menabrea, che nel suo bel libro *Chroniques de Jolande de France,* dove reca non pochi estratti di Conti di Tesoreria, non ne fa cenno.

Egli è poi in un Protocollo del 1322, al rogito Reynaud, che si rinviene uno Statuto del 13 maggio 1325, dato dal Conte Edoardo denominato il Liberale, il quale viene dopo quello di Pietro Secondo, edito dall'egregio nostro collega Cesare Nani con dottissime illustrazioni (1).

(1) Nelle " Memorie della Reale Accademia delle Scienze ", Serie seconda, Tomo 33. Per verità anche il nostro Statuto del 1325 è stato pubblicato dal Nani, ma solo come documento fra quelli che seguono all'altro suo prezioso lavoro intitolato " Gli Statuti dell'anno 1379 di Amedeo VI conte di Savoia " (Si vegga il vol. 34 (Serie seconda) delle stesse Memorie accademiche). Coll'eseguirne la ristampa si è voluto porre in rilievo lo speciale suo carattere.

La singolarità di questo documento legislativo esige pure una notizia preliminare, considerati sopratutto i tempi di scarsissima coltura, di consuetudini barbare, e di feudali prepotenze, nei quali esso venne promulgato.

La notizia però sarà breve, che anzi si limiterà ad una sommaria esposizione delle singole disposizioni.

Come è noto, a cominciare dal regno longobardo e per più secoli, fu in vigore il sistema delle composizioni; per esso un reo si sottraeva alla meritata pena pagando una multa " sonti " imposita „ (1), come giustamente la definisce il Ducange, " ad " luendum crimen damnumve resarciendum „. Ora il nostro Statuto vieta formalmente a tutti i balii, giudici, castellani, e in generale a tutti gli ufficiali aventi giurisdizione, di addivenire a composizione o personalmente o per mezzo d'altri; ogni composizione è anzi per l'avvenire dichiarata nulla; ai contravventori è inflitta una pena pecuniaria, e sopra qualsiasi eccesso è stabilito che dovrà pronunziare il giudice " prout fuerit rationis „.

Gli ufficiali poi, qualunque sia la loro condizione, che abbiano celato contro o senza compenso un diritto od un provento dominicale, sono multati e per giunta puniti " pena iuris secundum " qualitatem delicti „.

Gli onorarii dei notai di Curia per verbali d'inquisizione. interrogatorii ecc., debbono essere fissati dal giudice. Dove gli stessi notai li esigano ad arbitrio, sono tenuti a restituire quanto hanno ricevuto e puniti con doppia multa.

È vietato a tutti gli ufficiali sì presenti che futuri di vincolare chicchessia a far la guardia alla loro persona ed al loro domicilio: " recipere in garda „, e questa specie di servitù è dallo Statuto formalmente abolita, e i contravventori sono tenuti a dare una cauzione " de emendandis hiis que fore fecerint in " predictis gardis recipiendis „. Cotesta disposizione però è oscura, poichè non si comprende come un pubblico ufficiale potesse vincolare a sè " sive pro eo tuendo contra hostes sive ex alio " debito „, come il Ducange qualifica la " garda „, un uomo libero od un vassallo del Conte, e ridurlo in certo modo a con-

---

(1) " *sons*, cuiuscumque maleficii reus „, cioè di furto, di omicidio, di tradimento, di adulterio ecc.

dizione servile. Non vi ha traccia altrove di siffatta consuetudine, per cui si chiarisca il significato della parola usata dallo Statuto, e la definizione del Ducange si adatta bensì al Signore di un feudo, ma non ad un semplice ufficiale.

Ai castellani, ai mistrali ossia esattori, ed agli altri ufficiali minori lo Statuto impone di stare agli ordini dei balii e dei giudici " simul vel divisim ", e chi non obbedisce è multato di dieci lire forti da devolversi al Conte, salvochè giustifichi il perchè non ha creduto di osservare gli ordini ricevuti.

Gli stessi castellani, mistrali, ed altri ufficiali inferiori sono tenuti ad eseguire gli ordini dati dal Conte, e non ottemperando, sono volta per volta multati in quindici lire forti, salvochè, come sopra, facciano pervenire le loro scuse.

Un'ultima disposizione dello Statuto assegna ai castellani, per ciascuna lira della moneta in cui taluno venga multato, soldi due.

Il testo originale, che segue, si compone di una specie di proemio e dei sette articoli dianzi riferiti sommariamente.

(1) Quedam Statuta Sabaudie

Anno Domini m° ccc° xxquinto, xiiij[a] die mensis may, ordinatum estitit per Dominum, presentibus dominis Archiepiscopo Tharentasie, Aymone de Sabaudia, abbate Altecombe, Aymaro de Intermontibus, et pluribus aliis de Consilio, Oddone de Chandy, Priore Lemenci, Jo. Bertrandi, Egidio Richardi, Petro de Claromonte, Aymone de Serraualle, Aymone de Camera, Lanceloto de Chandy, Petro Francisci, Anthonio de Claromonte, Johanne de Meyriaco, Judice Maurianne et Tharentasie

Primo quod inhibeatur omnibus Bailliuis, Judicibus et Castellanis, et omnibus aliis officialibus ne ipsi aliquas composiciones super excessibus, qualescumque sint, faciant per se vel per alium; quod si fecerint, compositio nullius sit momenti, et nichilominus ille qui compositionem fecerit puniatur pro qualibet compositione in decem libris forcium; set super quibuscunque excessibus et inquisitionibus pronuncietur per iudicem prout fuerit rationis.

Item ordinatum est quod quicumque officiarius Domini, cuiuscunque conditionis existat, jus Domini celauerit, vel, aliquid recipiendo, ius Domini celauerit, puniatur pro qualibet vice in viginti quinque libris forcium, et nichilominus pena iuris puniatur secundum qualitatem delicti.

---

(1) Archivio di Stato in Torino — Protocollo del notaio Reynaudi, a. 1322, fol. 76 (moderno 74).

Item quod nullus notarius Curie recipiat pro scripturis inquestarum vel aliis actis Curie nisi ad arbitrium judicis; quod si contrarium fecerit, id totum quod receperit restituat et in duplum bannum Domino puniatur.

Item quod quicumque officiarii Domini qui nunc sunt vel fuerunt vel in posterum erunt non recipiant aliquem hominem vel subditorum Domini in garda sua, et si receperint, ipsos incontinenti liberent ab obligatione dicte garde. Et ex nunc Dominus, statuendo, ipsas gardas reuocat, cassat et anullat, et nichilominus precepit Dominus quod ab hiis qui predicta fecerint vel facient recipiatur idonea cautio de emendandis hiis que forefecerint in predictis gardis recipiendis.

Item ordinatum est quod castellani, mistrales, et alii officiales minores pareant et obediant mandatis bailliuorum et judicum, simul vel diuisim; quod nisi fecerint, puniantur pro qualibet vice qua non paruerint in decem libris forcium Nobis dandis, nisi mandarent excusationem quare mandata facere non deberent.

Item quod castellani, mistrales, et alii officiales inferiores exequantur mandata Domini; quod nisi fecerint, puniantur pro qualibet vice in quindecim libris forcium Nobis dandis, nisi mandarent excusationem ut supra.

Item ordinatum est quod castellani percipiant in bannis duos solidos monete, de qua facta fuit condempnatio, pro qualibet libra condempnationis.

---

## *I fasti dei prefetti del pretorio di Bartolomeo Borghesi;*

Nota del Socio ERMANNO FERRERO.

Appena morì Bartolomeo Borghesi, un sovrano, che amò l'Italia, amò e coltivò la scienza, Napoleone III. volle che, a proprie spese, si stampasse la raccolta compiuta degli scritti, editi ed inediti, di questo grande erudito, gloria fulgidissima della scienza italiana. Tre dotti francesi, il Renier, il Des Vergers, il Desjardins, ed un italiano, il De Rossi, ebbero la cura di questo lavoro, con facoltà di associarsi collaboratori; fra questi furono i nostri Cavedoni, Minervini, Rocchi.

Alla caduta del governo imperiale sei volumi erano già usciti alla luce: due di opere numismatiche, tre di epigrafiche

ed uno di lettere (1). Un settimo, pure di lettere, era pronto per essere distribuito: gli esemplari di esso, deposti nella biblioteca del Louvre, perirono nell'incendio del maggio 1871. Allora il Ministero della pubblica istruzione ordinò la ristampa di questo volume e la continuazione dell'opera, affidandola all'Accademia delle iscrizioni e delle belle lettere, la quale testè ha divulgato il decimo volume (2).

Il lavoro, a cui il Borghesi consacrò tutta la sua vita, fu descritto dal suo biografo:

" Egli volle „ scrisse il De Rossi " entrar ne' penetrali più " segreti della scienza epigrafica e della numismatica e dell'i- " storica per trarne la dottrina dell' ordine dei tempi e della " successione de' consoli da Bruto e Collatino fino al rovescio " del regno gotico in Italia sotto Giustiniano, le genealogie delle " grandi famiglie romane, che illustrarono i fasti della repub- " blica e dell'impero, la serie de' censori, de' proconsoli, de' pre- " tori, degli edili, de' questori, e di quanti magistrati ordinarii " e straordinarii tennero in Roma le maggiori sedi, e con vario " nome e potestà ne ressero le provincie. E quasi ciò nulla " fosse, a quella sterminata tela di cronologie e di genealogie " aggiungete lo specchio di tutta la gerarchia delle grandi e " delle minori magistrature, de' sacerdozi, della milizia legio- " naria, urbana ed ausiliare, e perfin degli uffici, delle ammi- " nistrazioni, de' collegi e d'ogni altra istituzione della Roma " repubblicana e della imperiale, della città e delle provincie. " E di questa gerarchia tutte le fasi ed i mutamenti, come a " mano a mano fu svolta, e come e quando atterrata per le " vicende ordinarie de' tempi, per le scosse violente delle di-

---

(1) *Œuvres complètes* de Bartolomeo Borghesi publiées par les ordres et aux frais de S. M. l'Empereur Napoléon III. Tomes I-II (*Œuvres numismatiques*, t. I, II, 1862-1864); III-V (*Œuvres épigraphiques*, t. I-III, 1864-1869); VI (*Lettres*, t. I, 1868).

(2) *Œuvres complètes* de Bartolomeo Borghesi. Tome X publié sous les auspices de M. le ministre de l'instruction publique par les soins de l'Académie des inscriptions et belles-lettres. Paris, 1897; 4° pagg. 835.

I volumi VII e VIII (*Lettres*, t. II, III) uscirono nel 1872, il IX fra il 1879 ed il 1893. Questo contiene i frammenti dei fasti consolari capitolini pubblicati dal Borghesi nel 1818, la serie (inedita) dei prefetti di Roma, e l'indice delle lettere.

“ scordie e guerre cittadine, e per le leggi riformatrici della “ costituzione civile: ed infine come tutta dall'antica fu tras- “ formata per l'azione manifesta e per le arti coperte di Cesare, “ di Augusto e dei seguenti imperatori, fin all' invasione dei “ barbari ed alla finale caduta della romana grandezza „ (1).

Un'opera di tanta mole eccede la misura delle forze di un uomo, per quanto egli abbia cominciato prestissimo la sua vita scientifica e l'abbia avuta lunga, senza riposi e senza distrazioni. Copiosissimi materiali egli raccolse per tanta opera, e “ liberalissimo dei raccolti tesori, dalla sua solitudine a tutti “ risponde non per ambagi di Sibilla, ma con parole piene di “ riposta e chiara dottrina; e crea e manda fuori fiumi di “ scienza, sparsa in numero infinito di lettere, di memorie, di “ articoli, di dissertazioni, di opuscoli, capitoli staccati e fram- “ menti della grande opera su cui medita i giorni e le notti „ (2).

Stampare i materiali dei fasti delle magistrature romane, lasciati dal Borghesi, è pure ottimo consiglio, sopra tutto come li fa stampare l'Accademia delle iscrizioni, accuratamente integrati ed annotati. Nel nono volume delle opere borghesiane si ha la serie dei prefetti di Roma, che si trovò abbastanza ordinata; il decimo comprende i fasti dei prefetti del pretorio. Per questi le schede erano assai imperfette, anzi non si avevano neppure per un gran numero di prefetti. Antonio Héron de Villefosse (3) ed il collaboratore datogli dall'Accademia, Edoardo Cuq (due nomi conosciuti con molto favore nella scienza francese) si accinsero al non lieve lavoro di supplire quel che mancava, di ordinare il tutto in modo di avere la serie compiuta di tali magistrati e per ciascuno le notizie somministrate dagli scrittori e dalle epigrafi. Ne venne così un'opera, in cui del Borghesi sono il disegno e la raccolta dei materiali; dei due dotti francesi il compimento di questa e la distribuzione, oltre alle emendazioni alle note borghesiane fatte necessarie da edizioni di testi filologici, giuridici e lapi-

---

(1) *Degli studi di Bartolomeo Borghesi*, nell'*Archivio storico italiano*, t. XII, parte 1ª, 1860, p. 107.

(2) Vannucci, *Storia dell'Italia antica*, 3ª ed., vol. I, Milano, 1873, p. 673.

(3) Insieme con l'ab. Thédenat, sotto la direzione del Waddington, egli aveva ordinato e compiuto le note del Borghesi per i fasti dei prefetti di Roma.

darii, più recenti e migliori di quelle, che potè avere a sua disposizione l'erudito savignanese. Laonde mentre nuovi prefetti del pretorio furono iscritti nelle sue liste, alcuni se ne dovettero espellere, per esservi stati introdotti solamente sulla fede di false testimonianze. Quanto poi spetta a lui, quanto a ciascuno dei due editori risulta chiaramente nella stampa del libro.

In questo si ha prima la serie dei *praefecti praetorio* da Augusto a Costantino. Essa comincia con Caio Cilnio Mecenate, il quale se non ricevette ufficialmente tale magistratura, ne ebbe però, come sembra, le attribuzioni. Per un po' più di tre secoli, durante cui i prefetti del pretorio ordinariamente erano due, raramente tre od un solo, essa comprende centocinquanta prefetti, dei quali ventidue non assolutamente sicuri. Di sette di essi si hanno le testimonianze, ma non il nome. Quindici altri personaggi a torto furono creduti prefetti del pretorio; qualcuno era già stato respinto dallo stesso Borghesi.

Seguono i titolari delle prefetture del pretorio istituite da Costantino, dell'Oriente cioè, dell'Illirico, dell'Italia e delle Gallie e quelli della prefettura di Africa, creata da Giustiniano dopo la rovina del regno dei Vandali. I mandati ed i rescritti degli imperatori, contenuti nei codici Teodosiano e Giustiniano, sono per lo più diretti a questi capi delle grandi divisioni amministrative dell'impero, onde facilissimo raccoglierne i nomi e disporli cronologicamente, badando però che non di rado i copisti, avvezzi a scrivere la nota *p. p.,* designante i prefetti del pretorio, l'apposero anche a nomi di privati, a cui erano spedite costituzioni imperiali.

I prefetti del pretorio dell'Oriente, per un po' più di tre secoli, dal 315 al 626, cioè al tempo di Eraclio, dopo il quale scompare ogni traccia di questi magistrati, sono in numero di centonove (di uno s'ignora il nome; parecchi tennero più volte l'ufficio), oltre a diciannove non abbastanza sicuri; gl' iscritti senza fondamento in questo elenco sono trentadue. L'ultimo prefetto dell' Illirico, che sia conosciuto, è del 592: egli ebbe cinquantasette predecessori, di cui cinque incerti e quattro per noi anonimi: nove altri si devono cancellare dalla lista. Quella dei prefetti d'Italia dal 314 va sino al 600, poichè essi durarono, dopo la fine dell'impero di Occidente, sotto Odoacre, gli Ostrogoti e la dominazione bizantina, ed anche, quando questa fu ristretta

per la conquista langobarda, continuarono ad esistere sotto la dipendenza dell'esarca. A tale lista si potrebbero aggiungere ancora due nomi per il secolo VII, ma senza troppa sicurezza. I titolari certi di questa prefettura sono centocinque, gl'incerti dieci, gl'intrusi ventisei. L'Africa, già amministrata dal prefetto d'Italia sino a che fu perduta dall'impero occidentale nel 430, ebbe prefetti proprii dopo il riacquisto, fattone dall'orientale, nel 534. I fasti registrano diciotto nomi, due dei quali sono dubbii; l'ultimo prefetto è del 641, poco prima che la signoria greca fosse distrutta dall'invasione araba. Ma, come per l'Italia, così per questa regione, sulla fine del secolo VI era stato creato un esarca, che ebbe sotto di sè il prefetto del pretorio. I prefetti delle Gallie, dal 316 sino circa al 540 (se ne hanno del tempo dei re Ostrogoti, padroni di una parte di quella regione), ammontano a cinquantanove: di cinque di essi il nome è sconosciuto. Inoltre si hanno sei incerti: dieci personaggi collocati fra tali prefetti non hanno diritto di rimanervi. Finalmente si trovano ancora tre prefetti d'Oriente, uno dell'Illirico, due forse d'Italia ed uno della Gallia di tempo indeterminato, diciotto titolari di prefettura ignota e quattro prefetti onorarii.

La continuazione della pubblicazione delle opere borghesiane è un servizio segnalato alla scienza dell'antichità romana; per noi, Italiani, è ancora un tributo d'onore, di cui dobbiamo esser lieti e grati, che la Francia rende al nostro concittadino, di tale scienza altissimo maestro.

## *Proverbes et similitudes des Malais, avec leurs correspondants en diverses langues d'Europe et d'Asie;*

Nota del Socio corrispondente ARISTIDE MARRE.

En tous les pays du monde, les Proverbes remontent à la plus haute antiquité. Nos ancêtres vivaient plus que nous au milieu des ouvrages de Dieu, et beaucoup moins parmi les ouvrages des hommes; ils faisaient un fréquent usage des proverbes. En France, même dans notre grand siècle littéraire, sous le règne de Louis XIV, les proverbes étaient encore fort à la mode. Si maintenant ils ne sont plus les ornements de la conversation, ils n'ont pas cessé d'être des trésors de la pensée.

Quelque soit l'idiome dans lequel ils sont exprimés, ils offrent toujours un grand intérêt pour le moraliste, le philosophe et le linguiste. Ne sont-ils pas en effet le fruit des usages, des habitudes, des mœurs, de la façon de sentir et de parler, et comme l'écho de l'expérience de chacune des nations qui composent la grande famille humaine? Ne connaît-on pas mieux le génie, le caractère et l'esprit d'un peuple par les détails de sa vie privée que par les hauts faits de son histoire? L'illustre orientaliste Freytag a dit excellemment dans la préface de ses *Proverbes arabes:* " De même que l'arbre peut se juger par le fruit, la nature des proverbes nous apprend le caractère et le génie propres de chaque nation. En rapport intime avec la manière de penser et de sentir d'un peuple, avec ses mœurs, ils nous font assister à son existence journalière. L'histoire explique surtout la pensée, les sentiments de quelques hommes et l'influence qu'ils ont exercée; les proverbes nous font connaître une nation tout entière. Imaginés sans doute par des individus, mais adoptés par la foule, ils sont l'expression de son activité morale ".

Certains proverbes, en assez grand nombre, se retrouvent à peu près les mêmes dans toutes les langues; le lecteur ne sera donc pas étonné de rencontrer ici des *proverbes malais* semblables à ceux d'autres peuples d'Europe et d'Asie. C'est que

sous toutes les latitudes, la nature offre aux yeux de l'homme et livre à son esprit d'observation des faits semblables.

J'ai traduit littéralement en français les *proverbes et similitudes des Malais,* sans y ajouter de commentaires, me contentant d'en rapprocher un certain nombre de proverbes d'autre provenance, et tout en laissant à la sagacité de chaque lecteur le soin d'en tirer la moralité qu'ils comportent. S'il est vrai que le proverbe est un reflet de la vie du peuple et de ses mœurs, on ne sera point surpris de rencontrer chez les Malais quelques proverbes d'une crudité d'expression plus ou moins grossière. Le même fait n'existe-t-il pas dans les langues des peuples les plus civilisés de l'Europe moderne, et notamment dans la langue française?

Il convient en ces rencontres de répéter le proverbe malais: " *Le rubis, s'il tombe dans un bourbier, n'en perdra pas pour cela son éclat* „ (1). Quoiqu'il en soit, on reconnaîtra, je l'espère, que la plupart des *proverbes malais* renferment les trois ingrédients qui doivent entrer dans la composition de tout bon proverbe, à savoir: la raison, le sel et la concision.

---

1. Abandonner le tison et courir après la fumée.

Lâcher la proie pour l'ombre.

2. Affronter la honte et craindre la mort.

3. A force de gratter on fait venir un abcès, là où il n'y avait qu'une légère démangeaison.

Trop gratter cuit.

4. Agir en vue de Dieu et susciter sa colère.

Le chemin qui mène à l'enfer est pavé de bonnes intentions.

5. A jeune poulain poil grossier.

La jeunesse est une folie dont la vieillesse est un remède (Prov. arabe).

6. Aller çà et là en tâtonnant, comme un aveugle qui a perdu son bâton.

7. Allume la lampe, et elle sera heurtée par un rat.

8. A oignon gâté, la fane tombe.

9. A quoi bon vouloir allumer la lampe, si elle n'a pas de mèche?

A quoi bon verser du grain dans la trémie, si les meules du moulin sont brisées? — Soll die Ampel brennen, so muss man Oel zu giessen.

---

(1) " *Adapoun manikam itou, djikalau didjatohkan kadalam lembahan,* " *sakalipoun nistchaya tiada akan hilang tchahayania* „.

10. A quoi sert d'allumer la lampe, quand le jour est levé?

Quand la cage est faite, l'oiseau s'envole. — A toute chose sa saison, et à toute affaire sous les cieux son temps (Prov. hébreu). — Porter lanterne à midi.

11. A quoi sert que la lune brille dans la forêt? Ne vaudrait-il pas mieux qu'elle brillât dans la ville?

12. Au bord de la mine, sont étendus morts les mineurs.

13. Au buffle le lait, à la vache le renom.

14. Autres sont les coutumes des Blancs, autres sont les coutumes des Malais.

Tanti paesi, tante usanze. — En cada tierra su uso.

15. Aux animaux qui paissent Dieu a fait la nuque fortement musclée.

A brebis tondue Dieu mesure le vent. — Dieu donne le froid selon le drap. — Dieu ne nous donne jamais à porter plus que nous ne pouvons (Prov. arabe).

16. Avant la chute il est bon de tenir l'onguent tout prêt.

Va au médecin avant d'être malade (Prov. hindou). — Avant de dormir prépare ton lit (Prov. persan).

17. Avec la fleur on orne sa chevelure, et le pied de la tige on le souille d'excréments.

18. Avec une goutte d'indigo l'on gâte tout un pot de lait.

Un peu de fiel gâte beaucoup de miel.

19. Avoir longue barbe mais courte expérience.

20. Basse est la montagne, haute est l'espérance.

L'espérance s'élève plus haut que les montagnes.

21. Bien fou qui, pour plaire aux hommes, abandonne ce qui plaît à Dieu.

22. Boire de l'eau, sentir des épines.

23. Bon marché sur les lèvres, cher sur les balances.

Si tu achètes, souviens-toi que c'est à un marchand (Prov. arabe).

24. Cassé le gouvernail, cassée la barre.

25. Cela pourra arriver quand les chats auront des cornes, et que les Hollandais se feront circoncire.

Cela arrivera la semaine des trois jeudis. — C'est la mer à boire. — Vouloir prendre la lune avec les dents.

26. Celui qui garde le puits, peut-il mourir de soif?

Celui gouverne bien mal le miel, qui n'en tâte et ses doigts ne lèche. — Quien la miel trata siempre se le apega della. — Qui touche le miel se lèche les doigts (Prov. turc).

27. Celui qui mange du piment, sent qu'il pique.

28. Celui qui plante un cocotier, souvent n'en mange pas les fruits.

Waar men vruchtboomen zet valt niet op vruchten te rekenen (Quand on plante des arbres fruitiers, on ne doit pas compter sur les fruits).

29. Celui qui se connaît en pierres précieuses est vraiment joaillier.

Marchand d'oignons se connaît en ciboules. - L'homme de mérite se connaît en mérite (Prov. turc).

30. Son repos n'est point le repos d'une bêche qui se rouille, mais bien plutôt le repos d'un *oubi* (1) arrivé à sa dernière limite d'accroissement.

La résignation n'est pas l'inaction (Prov. hindou).

31. Ce n'est pas par un coq qu'on apprend que le jour se lève.

Niet omdat een haan het weet wordt het dag (Ce n'est pas par un coq qu'on connaît le lever du jour).

32. Ce que l'on poursuit, on ne peut l'atteindre, et ce que l'on porte sur le dos traîne à terre.

Qui convoite tout perd tout. — Notre condition jamais ne nous contente.

33. Ce qui est décrété par Dieu, c'est cela qui arrive.

Contre Dieu nul ne peut. — La plainte ni la peur ne changent le destin. — Ce qui arrive, ce n'est pas ce que projette la créature, mais bien ce que veut le Créateur (Prov. turc).

34. Ce qui n'a pas été mangé par les oies, on le donne aux canards.

On tire parti de tout. — Kein Ding ist so schlecht dass es nicht zu etwas nutzen sollte.

35. C'est comme celui qui aime un plateau couvert de fleurs, et repousse une simple fleur sur sa tige.

Si tu es prudent, une simple rose sera pour toi une grâce suffisante; si tu es indiscret, entre dans le jardin (Prov. turc).

36. C'est comme de la poterie: un vase cassé, tous cassés!

37. C'est comme le chevrotain musqué, qui perd la vie à cause de son odeur.

Si l'oiseau *tsu* n'avait pas de belles plumes et si le *ché* (espèce de chevrotain) ne portait pas de musc, l'un et l'autre vivraient en paix (Prov. chinois). — C'est pour l'ivoire qu'on chasse l'éléphant, pour la perle qu'on ouvre l'huître et qu'on lui donne la mort; le langage du perroquet lui fait perdre la vie (Prov. chinois).

38. C'est comme le fruit du *Képâyang* (2): en manger c'est s'enivrer, le rejeter c'est dommage!

39. C'est comme les gens à qui l'on jette des fleurs et qui, en échange, vous jettent des ordures.

Chantez à l'âne, il vous fera des pets. — Truie aime mieux bran que roses.

40. C'est comme les gens qui vont se réfugier au milieu d'un essaim d'abeilles.

---

(1) L'*oubi* est le nom malais des tubercules comestibles et farineux.

(2) Le *képâyang* est un grand arbre dont les fruits sont amers et enivrants.

Se jeter dans l'eau de peur de la pluie. — Il ne faut point fâcher une ruche.

41. C'est dans la baie que d'ordinaire se pressent les navires.

42. C'est en vain qu'on agit avec bonté à l'égard des mauvaises gens.

Graissez les bottes d'un vilain, il dira qu'on les lui brûle. — Oignez vilain, il vous poindra; Poignez vilain, il vous oindra. — De mauvais buisson jamais ne vient bonne ronce.

43. C'est jeter du sel dans la mer.

C'est porter de l'eau à la rivière.

44. C'est la main qui coupe en menus morceaux, c'est l'épaule qui porte les fardeaux.

Le fardeau est léger sur l'épaule d'autrui (Prov. russe).

45. C'est par la bouche que le corps est ruiné.

Celui qui garde sa bouche garde son âme, mais celui qui ouvre à tout propos ses lèvres tombera en ruine (Prov. hébreu).

46. C'est un cerf-volant dont la corde est cassée.

47. C'est une honte si le petit d'un tigre devient le petit d'un chat.

Adler bruten keine Tauben.

48. Ceux qui sont en bas cherchent à prendre, ceux qui sont en haut prennent.

49. Chaleur d'une année est enlevée par pluie d'une journée.

Een dag verleent wat een geheel jaar weigert (Une seule journée donne ce que toute une année refuse).

50. Cher à acheter, difficile à trouver.

51. Cherche et tu trouveras.

Cherchez et vous trouverez. — Aide-toi, le Ciel t'aidera.

52. Chien qui aboie ne mord pas.

Chacun chien qui aboie ne mord pas. — Can che abbaia non morde. — Perro ladrador nunca buen mordedor. — Le chien aboie mais la caravane passe (Prov. turc). — Les gens sans bruits sont dangereux. Il n'en est pas ainsi des autres.

53. Comme le bourgeon du palmier avec le pédoncule de la feuille.

54. Comme le corbeau qui s'en retourne au pays où il est né: noir il est parti, noir il revient.

55. Comme le *dourian* avec le concombre.

56. Comme le drap qui est à deux faces.

57. Comme l'épervier qui vole contre le vent.

58. Comme le feu qui dévore la paille de riz (1).

---

(1) Au dire des Malais, la paille de riz, quand on y met le feu, ne flambe pas, et dans un tas de paille de riz le feu couve lentement jusqu'à ce que le tout soit réduit en cendre.

59. Comme le rat qui restaure une calebasse.

Comme un rat dans un fromage de Hollande.

60. Comme le tigre qui cache ses griffes.

61. Comme un balai qui est lié avec des fils de soie.

62. Comme un cerf qui est entré dans un *campong*.

Comme un cerf qui est entré dans la rue du village.

63. Comme un chien qui mange son vomissement.

Comme le chien retourne à ce qu'il a vomi, ainsi le fou réitère sa folie (Prov. de Salomon).

64. Comme un éléphant avec ses entraves.

65. Comme un grain de moutarde dans l'herbe.

Comme une aiguille dans une botte de foin.

66. Comme un jeune garçon qui, pour la première fois, porte un *Krîss* (1).

Comme un tout petit garçon qui est nouvellement mis en culotte.

67. Comme un nain qui veut attraper la lune, et vider la mer d'une seule main.

68. Comme un poisson dans la nasse.

69. Comme un rat tombé dans du riz.

Comme rats en paille.

70. Comme un roi avec son ministre, une bague avec sa pierre précieuse, et du lait avec du sucre.

71. Comme la coque d'une noix de coco: si on la couche sur le dos, elle se remplit d'eau; si on la couche sur le ventre, elle se remplit de terre.

72. Comme une étoffe de gaze sur un buisson d'épines.

73. Comme une étoffe qui est demeurée dans ses plis.

74. Comme une fourmi qui fait hommage d'une cuisse de sauterelle au roi Salomon.

75. Comme une grenouille tapie sous une noix de coco.

76. Comme une jonque trop chargée qui ne va ni à l'est ni à l'ouest.

Als een te zwaar geladen vaartuig noch oost noch westwaarts Kan (Comme un bâtiment trop chargé qui ne peut aller ni à l'est ni à l'ouest).

77. Comme une poule qui becquète ses poussins.

78. Comment l'arbre frappé de la foudre n'est-il pas renversé? C'est que dans le tronc, sous l'écorce, il y a une fissure.

---

(1) Le *Krîss* est l'arme que porte tout Malais ou Javanais, au sortir de l'enfance.

79. Comment serait-il possible que le petit d'un chien devînt une civette?

Les abeilles ne deviennent pas frêlons.

80. Comment serait-il possible de séparer le noir de l'œil du blanc de l'œil?

81. Compter sur la pluie du ciel et jeter l'eau qui est dans la jarre.

Por agua del cielo no dexes tu riego.

82. Compter sur un enfant, c'est être borgne; compter sur un compagnon, c'est être aveugle.

Ne t'attends qu'à toi seul. — Qui a compagnon a maître. — Amor de niño, agua en cestillo.

83. Cuisse gauche pincée, cuisse droite endolorie.

84. Dans les cassettes les pierres précieuses.

Dans les petits pots les bons onguents. — Nei piccoli sacchi sono le migliori spezie.

85. De bonnes paroles apaisent le cœur de l'homme, des paroles dures ne font qu'accroître sa passion.

Douces paroles rompent grande colère. — Plus fait douceur que violence. — On prend plus de mouches avec du miel qu'avec du vinaigre. — Le chagrin qui est au cœur de l'homme l'accable, mais la bonne parole le réjouit (Prov. de Salomon).

86. De ce que l'eau est calme, il ne faut pas croire qu'il n'y a pas de crocodiles.

Il n'y a pire eau que l'eau qui dort. — Deux sûretés valent mieux qu'une. — La méfiance est mère de la sûreté. — Confiance est mère de déception.

87. De jeunes singes trouvent des fleurs, est-ce qu'ils en connaissent l'utilité?

Jeter des perles devant des pourceaux.

88. De la canne à sucre on boit le suc, et l'on rejette le résidu.

89. De l'eau mêlée avec une autre eau ne font plus qu'une seule et même eau, et les impuretés sont rejetées vers le bord.

90. De loin c'est le parfum des fleurs, de près c'est l'odeur des ordures.

De loin c'est quelque chose et de près ce n'est rien.

91. De loin on lève l'index, de près les yeux.

92. Demande à qui possède, fais des vœux au pied de l'autel, et boude qui te montre de l'affection.

93. Demander des écailles au *limbat* (1).

---

(1) Le *limbat* est une espèce de lotte. — Ce poisson qui a une chair blanche de saveur agréable, est absolument dépourvu d'écailles.

Demander de la laine à un âne. — No pidas al olmo la pera pues no la lleva.

94. Des éléphants se battent et le chevrotain au milieu d'eux meurt écrasé.

Peleijaô os touros, mal pelos ramos. — Il n'est pas bon d'être entre le marteau et l'enclume.

De tout temps
Les petits ont pâti des sottises des grands.

95. Des graines semées sur un lac ne pousseront pas.

96. Des pierres précieuses sont devenues fétus de paille.

97. Deux œufs s'entrechoquent: un de cassé ou tous deux cassés.

98. Dix étoiles qui sont disséminées peuvent-elles égaler la lune qui est seule?

99. Dos tourné, langage changé.

100. Du plaisir tout d'abord, de la peine ensuite.

Du court plaisir long repentir. — La joie finit par l'ennui.

101. D'une peau de cochon on lui a fait un bonnet (1).

102. En entrant dans l'étable à chèvres, il bêle; en entrant dans le parc à buffles, il beugle.

Il faut hurler avec les loups. — Le sage dit, selon les gens, vive le roi! vive la ligue! — Bisogna voltar la vela secondo il vento. — Il faut tendre voile selon le vent.

103. En grimpant on peut s'accrocher au *serouda* (2).

104. En grimpant sur un *tchékoh* (3), on peut se tuer en tombant.

Les plus à craindre sont souvent les plus petits.

105. En prendre la fécule, en rejeter les filaments.

106. Épaisse est la peau de son visage.

Il a un front d'airain.

107. Essuyer la sueur des gens qui courent l'*amok* (4).

108. Est-ce l'eau qui remplit un tonneau, qui est agitée, ou bien est-ce l'eau qui ne le remplit qu'à moitié?

Les tonneaux vides sont les plus bruyants.

109. Est-ce que d'une fontaine limpide coule de l'eau trouble?

---

(1) C'est ce que disent les Malais, d'un mari trompé par sa femme.

(2) Le *serouda* est un cercle d'épines qu'on met autour du tronc des arbres fruitiers, pour les protéger contre les maraudeurs.

(3) Le *tchékoh* est un arbuste dont on mange les feuilles comme verdure potagère, et dont on répand les fleurs sur les tombes.

(4) *Courir l'amok* ou *faire l'amok*, c'est se précipiter le *krîss* à la main, comme un fou furieux, contre toute personne qu'on rencontre.

110. Est-ce que la fleur la plus odoriférante n'a pas de *toungau*? (1).

Il n'est gloire sans envie. — On ne jette des pierres qu'à l'arbre chargé de fruits. — Parmi les arbres, ceux-là seulement sont battus des pierres, dont le front est couronné de fruits (Prov. arabe).

111. Est-ce que les épines ont été aiguisées?

L'épine en naissant va la pointe devant.

112. Est-ce que le canard apprend à nager?

113. Est-ce que l'on peut faire rentrer les défenses de l'éléphant, une fois qu'elles sont sorties?

114. Est-ce qu'un serpent, en se repliant autour de la racine d'un bambou, perd son venin?

115. Être assis comme un chat, et bondir comme un tigre.

Cuentas de beato y uñas de gato.

116. Faire de la farine et n'avoir pas de riz.

117. Fini l'appât, le *kerongkerong* (2) ne s'attrape pas.

Qui n'amorce pas son haim, pêche en vain. — Invano si pesca, se l'amo non ha esca.

118. Frapper comme un sourd et aveugle.

119. Frapper la fille, viser le gendre.

Toujours ne frappe-t-on pas ce à quoi l'on vise.

120. Frapper la poitrine, interroger le corps.

121. Haut dans le débat, bas dans le combat.

A beaucoup de caquet peu d'effet. — Grand vanteur petit faiseur. — Les grands diseurs ne sont pas les grands faiseurs.

Ne faut-il que délibérer? Est-il besoin d'exécuter?
La Cour en Conseillers foisonne. L'on ne rencontre plus personne.

Lunga lingua corta mano. — Do va mas hondó el rio haze menor ruido.

122. Il a ressenti quelque chose comme si la lune était tombée sur ses genoux.

123. Il attend le riz, le plat tout prêt sur ses genoux.

Il attend que les alouettes lui tombent toutes rôties dans le bec.

124. Il crache puis il lèche.

125. Il crache contre le ciel et son crachat lui tombe sur la face.

Qui crache contre le ciel, son crachat lui tombe sur la tête.

126. Il est capable de voir un *kouman* (3) au pays de Chine, mais il ne s'aperçoit pas qu'il y a un éléphant au bout de son nez.

Il voit une paille dans l'œil du prochain et ne voit pas une poutre dans le sien. — On se voit d'un autre œil qu'on ne voit son prochain.

---

(1) Le *toungau* est une sorte de petit puceron rouge qui ronge les fleurs.

(2) Le *kerongkerong* est un tout petit poisson.

(3) Le *kouman* est un petit *acarus*.

127. Il est plus pénible de fendre du bois que de déchirer du papier.

128. Il est léger si on le porte à la main, il est lourd si on le porte sur l'épaule.

129. Il est malséant de cracher devant soi ou à sa droite.

130. Il faut en toute affaire examiner quelle en sera la fin.

En toute chose il faut considérer la fin. — Quidquid agas prudenter agas et respice finem. — Pensez avant d'agir, et ne commencez rien sans avoir bien examiné les circonstances (Prov. chinois).

131. Il faut laver le charbon dont on a la figure barbouillée (1).

La vengeance est un plaisir des dieux.

132. Il jette des pierres et tient sa main cachée (2).

Jeter la pierre et cacher le bras. — Hecho de villano: tirar la piedra y esconder la mano.

133. Il n'est pas encore assis que déjà il allonge ses jambes.

Mets un paysan à table, il mettra les pieds dessus (Prov. russe).

134. Il n'y a pas de rotin, les racines alors sont utiles.

Il n'est rien d'inutile aux personnes de sens.

135. Il pense que son village est l'univers, et s'imagine que des sauterelles sont des éperviers.

136. Il ressemble à la cognée qui voudrait sculpter une boîte à bétel.

Que chacun se mêle de son métier! — Ne sutor ultra crepidam!

137. Il ressemble à la grenouille qui, sous une noix de coco, s'imagine que la concavité de la coque est le ciel.

138. Il suffit d'un mot pour te créer une dette, et d'un mot pour t'en libérer.

139. Il veut la farine, il veut encore le gâteau.

Tout d'un côté, rien de l'autre. — Le moins de gens qu'on peut à l'entour du gâteau.

140. Instinctivement le canard s'achemine vers le bourbier, et la poule vers le mortier à riz.

Chassez le naturel, il revient au galop. — Chi gatto nasce sorice piglia.

141. La bouche est douce comme du sucre, et le cœur tout prêt à faire du mal.

Langue de miel, cœur de fiel. — Boca de miel, manos de hiel. — Il donne à manger avec la cuillère, et crève les yeux avec le manche (Prov. russe).

---

(1) Pour un Malais cela signifie qu'il faut toujours se venger d'une injure.

(2) Un vieux proverbe, encore en usage à Bayonne, est celui-ci: " Ils ont lancé la pierre et sont devenus manchots ". Ce qui signifie que celui qui a lancé une pierre, cache son bras sous son manteau, et paraît alors comme serait un manchot.

142. La bouche est remplie de bananes et le derrière est accroché dans les épines.

143. La bouche porte du miel, le derrière porte un aiguillon.

Le miel est doux mais l'abeille pique. — A la queue gît le venin.

144. La chaleur venue, la fève oublie sa cosse.

Fi du manteau quand il fait beau! — Le danger passé, adieu le saint! — El rio pasado el santo olvidado. — Rien ne vieillit plus vite qu'un bienfait.

145. La colère fait perdre la raison.

La colère mauvaise conseillère.

146. La coquille d'un *ounam* devient mouvante si un *oumang* entre dedans (1).

147. La destinée de l'homme c'est de tomber malade en un instant, et de mourir en un instant.

Chaque instant de la vie est un pas que tu fais vers la mort. — Ist der Mensch geboren so fangt er an zu sterben.

148. L'eau avec les poissons, la plaine avec le gibier, la mer avec les pirates.

149. L'eau coupée par un instrument tranchant n'est pas pour cela rompue.

Donner un coup d'épée dans l'eau.

150. L'échelle repoussée, les pieds se balancent.

151. La fêlure attend la brisure.

Les pots fêlés sont ceux qui durent.

152. La feuille tombe et vole dans l'air, le fruit tombe au pied de l'arbre.

Le fruit ne tombe pas loin de l'arbre. — De vrucht valt niet ver van den stam (Le fruit ne tombe pas loin du tronc).

153. La fleur qui plaît par sa fraîcheur, on la porte; si elle est fanée, on la jette.

154. La fidélité se trouve dans l'homme au cœur pur, et la pureté dans l'homme au cœur fidèle.

155. La grandeur de la taille, voilà celle de la couverture.

156. La hache se hausse jusqu'au métier à broder.

Chacun à son métier doit toujours s'attacher.

157. La maison bâtie, le ciseau crie.

Après l'utile l'agréable.

158. Là où il n'y a pas d'épervier, la sauterelle dit: C'est moi l'épervier!

Au pays des aveugles les borgnes sont rois. — Dove non sono i cani, la volpe è re.

---

(1) L'*ounam* est un coquillage comestible à conque brune dentelée, et l'*oumang* est un petit crabe d'eau salée qui se choisit pour demeure le coquillage vide.

159. La palissade mange le riz.

La haie mange le blé.

160. La place du riz, c'est dans le carry.

161. La pluie ne tombe pas tout à la fois.

De jour en jour s'acquiert la vigueur (Prov. turc). — Petit à petit l'oiseau fait son nid. — On ne fait pas tout en un jour. — Rome n'a pas été faite en un jour.

162. La pluie retourne au ciel.

163. La prospérité et l'adversité viennent de Dieu.

L'homme propose, Dieu dispose.

164. La prospérité s'évanouit par l'élévation au pouvoir des hommes vils.

165. La rivière a donné à boire à beaucoup de gens, beaucoup encore boiront de son eau.

166. La sangsue veut devenir un serpent python.

167. La soucoupe et la coupe s'entrechoquent, si elles sont posées un peu de travers.

168. La tortue de mer pond des œufs par centaines, et personne n'en sait rien; la poule pond un œuf et tout le monde l'apprend dans le pays.

Hat die Henne ein Ei gelegt, so gacket sie.

169. La tringle descendue, l'étoffe s'enroule autour du rouleau (du métier à tisser).

170. La vague est une vague et de l'eau est de l'eau.

171. La vie est comme un œuf sur la pointe d'un corne.

..... Est-il aucun moment
Qui nous puisse assurer d'un second seulement?

172. L'amour ne supporte pas les délais, et l'amoureux n'a plus de jugement.

Amour! amour! quand tu nous tiens,
On peut bien dire: adieu prudence!

L'amoureux est aveugle (Prov. turc).

173. L'âne veut se faire cheval.

Quis contentus sua sorte? — Il ne faut pas lier les ânes avec les chevaux.

174. Berceau secoué, enfant pincé.

175. Le *belambang* (1) est bas, on rampe par dessous; le figuier est haut, on s'élance par dessus.

176. Le cadavre d'un éléphant peut-il être recouvert avec un van?

177. Le cercle n'est pas formé d'une seule courbure.

---

(1) Le *belambang* est une plante basse qui croît dans les marais.

178. Le chameau se livre lui-même.

179. Le charbon, quand même on le laverait avec de l'eau de rose, ne deviendra jamais blanc.

D'un sac à charbon ne saurait sortir blanche farine.

180. Le chat fait un bond, l'homme se réveille, le coq chante, il va faire jour.

181. Le chevrotain oublie le lacet, mais le lacet n'oublie pas le chevrotain.

182. Le chien dresse la queue, quand de la paume de la main on lui tapotte la tête.

183. Le coq chante, le jour se lève.

Que le coq chante ou non, le jour viendra.

184. Le coussin parti, la natte le remplace.

185. Le couteau et la serpe s'émoussent; mais la langue de l'homme est toujours tranchante.

Un coup de langue est pire qu'un coup de lance. — Mas hiere mala palabra que espada afilada. — La parole n'est pas une flèche, mais elle perce davantage (Prov. russe).

186. Le crabe commande à ses petits de marcher droit.

187. Le daim enchaîné avec une chaîne d'or, s'il s'échappe court vite à la forêt et va brouter.

Il n'est que d'avoir la clef des champs! — È meglio essere uccello di campagna che di gabbia. — De vorsch huppelt weder in de poel, zat hij ook al op enn gulden stoel (La grenouille assise sur un siège d'or saute encore dans la mare). — L'oiseau en liberté est mieux qu'en cage dorée (Prov. russe). — Mieux pauvre et libre que riche et esclave (Prov. russe).

188. Le datura se mélange avec le chanvre.

189. Le dos d'un couperet, s'il est aiguisé, devient nécessairement tranchant.

190. L'éléphant, bien qu'il soit grand et solide sur ses quatre pieds, bronche quelquefois.

Il n'est si bon cheval qui ne bronche. — Anco il cavallo si stanca, sebben abbia quattro piedi. — Il n'est si fort qui ne tombe.

191. L'éléphant fait de gros excréments, nous aussi nous voulons faire de gros excréments.

Plus chie un bœuf que cent arondelles. — Mas caga un buey que cien golondrinas.

192. L'éléphant mâche le tronc du bananier auquel il est attaché, pendant que le petit singe mange le fruit de l'arbre.

193. L'éléphant mort laisse ses défenses, le tigre mort laisse sa fourrure, l'homme mort laisse son nom.

194. L'éléphant mort, plus de trompe; le tigre mort, plus de fourrure bigarrée.

195. L'enfant sur les genoux est lâché, le petit singe au fond des forêts est allaité.

196. L'épervier se joue avec la poule, mais à la fin il fond sur elle et la saisit.

197. Le feu, tant qu'il est petit, est un ami; quand il est grand, il devient un ennemi.

Il ne faut pas badiner avec le feu. — En liden Ild at varme sig paa, er bedre end en stor at brænde sig paa (Un petit feu qui vous chauffe vaut mieux qu'un grand feu qui vous brûle).

198. Le fruit extrêmement doux a des vers.

199. L'index crève l'œil, la palissade mange le riz.

200. L'index est droit, le petit doigt est recourbé.

201. Le *kalakati* (1) grimpe sans cesse le long du mur; tant qu'il n'est pas mort, il est en marche.

202. Le langage indique l'extraction.

203. L'épervier dévore les petits du *sérindit* (2).

204. L'objet qu'on tient dans sa main fermée, on le lâche et il tombe.

205. Le panier trouve son couvercle.

Il n'y a si méchant pot qui ne trouve son couvercle. — No ay olla tan fea que no halle su cobertera.

206. Le passereau avec le passereau seulement, et le calao avec le calao seulement.

Ne nous associons qu'avec nos égaux. — Vogels van gelijke veeren vliegen graagt'zamen (Oiseaux de même plumage volent ensemble volontiers). — Les oiseaux dont le vol est différent ne sauraient faire route ensemble (Prov. persan).

207. Le pasteur est pour les brebis, et non pas les brebis pour le pasteur.

208. Le poison végétal se mélange avec le poison minéral.

209. Le renom est plus magnifique que l'apparence.

210. Le riz qu'on tient dans sa main vaut plus que le riz en grange.

Mieux vaut un en la main que deux demain. — Moineau en main vaut mieux que pigeon qui vole. — Un moineau dans la main vaut mieux qu'une grue qui vole. — Mieux vaut un tiens que deux tu l'auras. — Mas vale un toma que dos te daré. — È meglio aver oggi un uovo che domani una gallina.

---

(1) Le *kalakati* est un petit insecte aptère, de couleur rouge, qui a l'habitude de grimper le long des murs des habitations.

(2) Le *sérindit* est une jolie petite perruche à bec noir, à tête bleue, à poitrine et queue rouges.

211. Le rubis, s'il tombe dans un bourbier, n'en perdra pas pour cela son éclat.

L'or paraît même dans la fange (Prov. russe).

212. Le seau brisé, la corde reste.

213. Le sel renversé, qu'est-ce que la salière?

214. Le sort de la coque de la noix de coco est de surnager, le sort de la pierre est de couler à fond.

215. Le tigre montre les bigarrures de sa peau, le *dourian* (1) montre les tranches de son écorce.

216. Le tigre mort abandonne sa peau bigarrée, l'éléphant mort laisse ses os.

217. Le *toungau* est visible de l'autre côté de la mer, et l'on ne voit pas l'éléphant qui se dresse debout sous nos yeux.

218. Le tronc d'arbre soulevé, les vers de terre apparaissent en dessous.

Pourpre dessus, haillons dessous.

219. Le ver avale le serpent-dragon.

220. Les bonnes manières ne se vendent ni ne s'achètent.

221. Les nouveaux-venus (les étrangers) sont des sangsues qui sucent notre sang.

222. Les parfums chassent les odeurs.

Les bonnes actions chassent les mauvaises (Prov. arabe).

223. Les petits poissons deviennent la pâture des gros.

Les gros poissons mangent les petits.

224. Les punaises sont devenues des tortues.

225. Les rejetons du bambou ne sont pas loin de la touffe.

226. Les rois avec les rois, les dieux avec les dieux.

Ogni simile ama il suo simile. — Qui se ressemble s'assemble.

227. Les rois ont toujours des ennemis et en très grand nombre.

Geen Kroon heft hooftzweer (Une couronne ne guérit point le mal de tête). — Dolor di capo non toglie la corona reale.

228. Les yeux dorment, le coussin veille.

Prends conseil à l'oreiller. — Non tutti dormono quelli che hanno serrati gli occhi.

229. Les yeux voient bien le fardeau, mais c'est l'épaule qui le porte.

Le fardeau est léger sur l'épaule d'autrui.

---

(1) Le *dourian* est un fruit bien connu dans l'Extrême-Orient, et fort apprécié des gourmets, malgré son odeur désagréable et sa robe épineuse.

230. Loin des yeux, loin du cœur!

Aus den Augen aus dem Sinn. — Uit het oog, uit het hart. — Out of sight out of mind. — Quan lejos de ojo, tan lejos de corazon. — Lontan dagli occhi, lontan dal cuore.

231. Lorsqu'on ne sait pas danser, on dit que le terrain est mouillé.

Mauvais ouvrier ne trouvera jamais bon outil.

232. Mains étendues sur les genoux, mains de malheur.

233. Même de l'eau dans le creux de sa main, il ne la laisse pas couler!

234. Mettre des effets dans les mains d'un singe.

235. Mieux vaut mourir avec une bonne réputation que de vivre avec une mauvaise.

Bonne renommée vaut mieux que ceinture dorée. — Beter arm meet eere dan rijk met schande (Mieux vaut être pauvre avec honneur que riche avec déshonneur). — Mas vale perderse el hombre que si es bueno perder el nombre. — La mala llaga sana, la mala fama mata. — Mas val merecer honra e naõ a ter, que tendo a naõ a merecer. — Celui qui n'a cure de bonne renommée est un cadavre ambulant (Prov. hindou).

236. Mieux vaut une gerbe de riz avec la paix du cœur, qu'une barque chargée de riz avec le cœur plein de soucis.

Contentement passe richesse. — È meglio il cuor felice che la borsa.

237. Moins il y a de bouillie, plus il y a de cuillères.

238. Mûr, il est aigre; jeune, il est doux.

239. Nécessairement on revient à sa nature originelle.

Chassez le naturel, il revient au galop. — Por mucho que desmienta cada qual, siempre buelve al natural. — Le loup change de poil, non de naturel (Prov. turc). — Il lupo perde il pelo, non il vizio. — L'on reprend sa première trace à la première occasion.

240. Ne mets pas ta confiance dans la femme.

Qui femme a, noise a. — Homem de palha val mais que mulher de ouro. — Comme le ver s'engendre dans l'étoffe, la corruption de l'homme vient de la femme (Prov. hébreu). — Es giebt nur zwei gute Weiber auf der Welt: die eine ist gestorben, die andere nicht zu finden.

241. Ne parle avec personne que dans la mesure de son intelligence.

242. Ne pas apprécier la science et l'intelligence, c'est la marque des gens ineptes.

Science n'a d'ennemis que les ignorants. — Science n'a haineux que l'ignorant. — Laissez dire les sots: le savoir a son prix. — Mas vale saber que aver. — Mas vale un dia del discreto que toda la vida del necio. — L'homme n'est distingué des autres animaux que par l'intelligence. Quelques-uns la cultivent, le plus grand nombre la néglige; ils semblent vouloir renoncer à ce qui les sépare de la brute (Prov. chinois). — Un homme sans instruction est un homme, comme un éléphant de bois est un éléphant (Prov. hindou).

243. Ne pas manger du fruit du *nangka*, et pourtant être sali par sa gomme.

244. Ne te fie pas à une vieille femme, et ne la laisse pas entrer dans ta maison. Est-ce qu'on se fie au tigre, et le laisse-t-on entrer au milieu d'un troupeau de chèvres?

Mal se garde du larron qui l'enferme dans sa maison. — Wo der Teufel nicht hin mag, da schickt er ein alt' Weib.

245. Ne tiens rien dans ta main qui soit brûlant, la sensation de la chaleur te le ferait lâcher.

246. Nez coupé, visage gâté.

Wie zijn neus schendt, schendt zijn Aangezigt (Qui gâte son nez, gâte son visage).

247. Nez épaté, pommettes des joues saillantes.

248. On apprend à connaître ses propres défauts par la langue d'autrui.

249. On craint d'en verser une goutte, et l'on verse le tout.

L'avarice perd tout en voulant tout gagner.

250. On craint le tigre à cause de ses dents, mais s'il n'a plus de dents, pourquoi le craindrait-on?

Morte la bête, mort le venin.

251. On dit que du bois c'est de la pierre, et l'on veut toucher le ciel avec la main.

Que d'ignorants dont le front touche les étoiles! (Prov. arabe).

252. On écoute une histoire d'oiseau, et on laisse choir l'enfant qu'on a sur les genoux.

253. On est blessé par le pandane, faute de savoir qu'il a des épines.

254. On fait rentrer dans son écrin la pierre précieuse.

255. On n'obtient pas ce que l'on poursuit, et l'on répand ce que l'on porte dans son sac.

256. On perd sa femme, on peut la retrouver; mais la raison perdue, le corps est à jamais misérable.

El mal que no tiene cura es locura.

257. On peut compter les étoiles qui sont au ciel, mais l'on ne se doute pas de la suie qu'on a au visage.

Et mesurant les cieux sans bouger d'ici-bas
Il connaît l'univers, et ne se connaît pas.

258. On peut garder tout un parc de buffles, on ne peut pas gouverner un seul homme.

259. Os légers, ventre pesant.

260. Où il y a beaucoup de jeunes hommes, c'est là que sont les jeunes filles.

261. Où il y a du sucre, il y a des fourmis.

262. Où l'aiguille a passé, passe aussi le fil.

Où va l'aiguille, le fil suit (Prov. russe).

263. Où la marmite de fer casse, le pot de terre demeure.

264. Où meurent les fourmis si non dans le sucre?

265. Où verser la sauce s'il n'y a plus de riz?

266. Où vont les traits sinueux de la cire? Là où vont les traits sinueux du bronze.

267. Par crainte des poux se dépouiller de son vêtement.

Ne brûle pas ta maison pour en chasser les souris.

268. Par le fruit on connaît l'arbre.

On connaît l'arbre à son fruit. — A l'œuvre on connaît l'artisan. — Un mauvais arbre ne produit pas de bons fruits.

269. Par nature le cheval est un cheval, et l'âne est un âne.

D'une buse on ne saurait faire un épervier. — Non si può cavar sangue dalla rapa. — Aunque vestais la mona de seda, mona se queda. — L'éléphant est plus grand que le chameau (Prov. turc).

270. Partir sur un cheval, revenir sur un bœuf.

Le mal vient à cheval et s'en va à pied. — La superbia andò a cavallo, e tornò a piedi.

271. Pas un brin de paille à emporter.

272. Pas de roi sans beaucoup d'hommes, et pas d'hommes sans beaucoup d'argent.

273. Pierre qui roule continuellement dans la rivière, n'amasse pas de mousse.

Pierre qui roule n'amasse pas de mousse. — A rolling stone gattsers no moss. — Walzender Stein wird nicht moossig. — Een rollende steen neemt geen mos mede (Pierre qui roule n'amasse jamais). — Piedra movediza nunca moho la cubija. — Pedra movediza naõ cria bolor. — Pietra mossa non fa muschio. — Saxum volutum non obducitur musco.

274. Plonger et dans le même instant boire de l'eau.

275. Plus il y a de bourgeons, plus il y a de feuilles au palmier.

276. Plus il y a de gens, plus il y a d'opinions.

Zoo veel hoofden, zoo veel zinnen (Autant de têtes, autant d'opinions). — Quot capita tot sensus.

277. Plus l'épi du riz est plein, plus il s' incline; plus il est vide, plus il se redresse.

278. Poulie cassée, corde rompue.

279. Pour avoir disputé avec le puits, à la fin on meurt de soif.

280. Précédemment de l'étain, maintenant du fer.

281. Prendre la fécule et rejeter le résidu.

282. Prends la mesure de ton *badjou* (1) sur ton propre corps.

283. Quand bien même il arriverait dix navires, les chiens n'auront pas d'autre *tchâouat* (2) que leur queue.

284. Quand bien même ou baignerait un corbeau dans de l'eau de rose, son plumage ne deviendrait pas blanc.

285. Quand il pleuvrait toute une année, est-ce que l'eau de la mer deviendrait douce?

286. Quand il y a un jour sans pluie, les grenouilles dans l'étang coassent continuellement.

287. Quand la vague se déroule sur le sable du rivage, pouvons-nous les séparer?

288. Quand les pousses du cocotier sont cassées, ce sont d'autres pousses de cocotier qui les remplacent; quand les pousses de l'aréquier sont cassées, ce sont d'autres pousses d'aréquier qui les remplacent.

Nature ne peut mentir.

289. Quand même on serait dans un fort à sept enceintes, on ne pourrait pas éviter ce qui est écrit.

Il en faut revenir toujours à son destin,<br>
C'est-à-dire à la loi par le Ciel établie:<br>
Parlez au diable, employez la magie,<br>
Vous ne détournerez nul être de sa fin.

Contre Dieu nul ne peut — Le destin a fixé irrévocablement les degrés de gloire et de richesse (Prov. arabe).

290. Quand on donne à manger à un éléphant, n'est-ce pas avec une pince? et quand on donne à manger à un chien, n'est-ce pas dans une écuelle?

291. Quand on s'est beaucoup baigné, il est permis d'être mouillé.

292. Quand on s'est beaucoup servi d'encre, il est permis d'être noirci.

293. Quand on tire la pédale (du métier à tisser), le ros et le balancier se mettent en mouvement.

294. Quand tout le monde crie à la fois, on ne peut entendre personne.

Quand tout le monde parle à la fois, impossible de s'entendre.

---

(1) Le *badjou* est une sorte de pardessus à l'usage des deux sexes. On le fait ordinairement en toile de coton blanc ou bleu, et aussi en étoffe de soie à fleurs.

(2) Le *tchâouat* est une pièce d'étoffe fixée à la ceinture et dont on passe l'extrémité entre les jambes pour l'attacher par derrière. C'est souvent l'unique vêtement des plus pauvres indigènes.

295. Que le serpent frappé ne soit pas tué, que la verge dans la main ne soit pas brisée, et que la terre ne soit pas souillée!

S'ils t'ont dit: frappe! ils ne t'ont pas dit: tue! (Prov. turc).

296. Que peut-on faire? Le riz s'en est allé en bouillie.

297. Qui a des poux peut s'épouiller.

298. Qui a envie de dormir approche son coussin.

299. Qui a honte d'interroger s'égare en chemin.

Honte fait dommage. — Il n'y a que les honteux qui perdent. — Mieux vaut demander que faillir et errer. — È meglio domandare che errare. — Chi lingua ha a Roma va.

300. Quiconque écoute et suit les dires d'une femme, au lieu d'un *dirhem* (1) perd deux *dirhems.*

De la mala muger te guarda, y de la buena no fies nada.

301. Quiconque médit des autres devant toi, devant les autres médit de toi.

302. Quiconque ose menacer doit oser combattre.

Qui menace a peur. — Qui ne peut mordre, ne doit pas montrer les dents.

303. Quiconque se repose sur son nom, ne trouve pas de pain à manger, et quiconque commet une félonie pour du pain tue son âme (2).

304. Qui creuse une fosse, souvent tombe au fond.

Celui qui creuse la fosse y tombera, et la pierre retombera sur celui qui la roule (Prov. hébreu; XXVI, 27 de Salomon).

305. Qui oserait saisir un tigre de ses mains?

306. Qui tue paye le prix du sang.

Qui casse les verres les paye.

307. Recherche la science d'abord, la richesse ensuite.

Mas vale saber que aver.

308. Sans tuer la fourmi qu'il foule aux pieds, l'éléphant s'ouvre un passage au travers de la jungle.

309. Sauterelle devient épervier, punaise devient tortue, et ver de terre devient serpent-dragon.

Enhver mener hans Kobber er Guld (Chacun pense que son cuivre est de l'or).

310. Savoir manger, savoir conserver.

---

(1) Le *dirhem* est une pièce d'argent autrefois en usage chez les Arabes.

(2) Ce proverbe d'origine persane est cité par Bokhâri de Djohore dans son traité de morale intitulé *Makôta radja-râdja* (La Couronne des rois), que nous avons traduit en français, et dont M. Barthélemy St-Hilaire a dit (*Journal des Savants*, X, 1888): " qu'il suffirait à lui seul pour recommander la littérature malaise à l'attention du monde savant ".

311. Science et habileté deviennent une échelle pour monter à la fortune.

312. Semblable à un poisson dans un bourbier.

313. Se repentir avant c'est profitable; se repentir après, c'est tout à fait inutile.

Après le fait ne vaut souhait. — A chose faite conseil pris. — Raad voor daad (Conseil avant action).

314. Si, à la source, l'eau est trouble, nécessairement le courant sera trouble.

315. Si c'est un buffle, on le prend par sa corde; si c'est un homme, on le prend par sa bouche.

Le bœuf par la corne et l'homme par la parole. — Al buey por el cuerno y el hombre por el verbo. — Men vangt het paard bij den breidel, en den man bij zijn woord (On prend le cheval par la bride, et l'homme par sa parole) — Verba ligant homines, taurorum cornua funes.

316. Si, dans un plateau, tu bats l'eau du plat de la main, elle t'éclaboussera le visage.

317. Si doux que soit le sucre, il s'y trouve toujours du sable; si amer que soit le *mambou* (1), son âpre amertume devient un remède.

318. Si haut que dans son vol s'élève le héron, à la fin il s'abat sur la croupe du buffle.

Daar vloog nooit vogel zoo hoog of hij moet zijn kost op de aarde zooken (Jamais l'oiseau ne vole tellement haut qu'il ne revienne sur la terre chercher sa nourriture).

319. S'il n'est pas possible de raccomoder, il ne faut pas casser.

320. S'il n'y a pas de vent, les arbres ne seront pas secoués.

321. S'il vous faut choisir un compagnon, voyez d'abord ce qu'il y a dans sa poitrine.

Cui fidas vide!

322. Si la pousse du bambou n'a pas été cueillie quand elle était jeune, à quoi servira-t-elle quand elle sera devenue vieille?

Chauffe-toi, tandis que le feu brûle. — Il faut puiser tandis que la corde est au puits. — Il faut battre le fer tandis qu'il est chaud.

323. Si la racine est morte, il est bon de l'extirper.

324. Si la source est trouble, la rivière est trouble.

Di mal'erba non si fa buon fieno.

325. Si le ciel était pour tomber sur la terre, pourrait-on le retenir avec l'index?

---

(1) Le *mambou*, plante qui croît dans l'Archipel indien, est remarquable par le goût amer de ses feuilles souvent employées par la médecine indigène.

326. Si l'esprit d'un seul homme ne suffit pas, l'esprit de plusieurs pourra suffire.

A plusieurs mains l'ouvrage avance. — Ce que l'un ne sait, l'autre le sait.

327. Si le père fume de l'opium, le fils, lui aussi, fumera de l'opium.

Ce que chante la corneille, chante le cornillon. — Talis pater, talis filius. — Tel chante le vieux coq, tel le jeune chantera.

328. Si le serpent suce les racines, il ne perdra pas son venin.

329. Si les Chinois pissaient seulement, ils pourraient submerger les Anglais.

330. Si l'on fait amitié avec les méchants, nécessairement on est méchant comme eux.

Dis-moi qui tu hantes, je te dirai qui tu es. — Dime con quien iras, dezirte he loque haras. — Dimmi con chi vai e ti dirò chi sei.

331. Si l'on reçoit un soufflet, que ce soit d'une main ornée d'un anneau; si l'on reçoit un coup de pied, que ce soit d'un pied chaussé.

Antes morto por ladrões que por couce de asno (1). — Plutôt la mort par des voleurs que par la ruade d'un âne!

332. Si l'on verse dans la mer une tasse d'eau douce, est-ce que l'eau de la mer pourra devenir douce?

333. Si on le tient dans sa main fermée, on craint qu'il ne meure; si on le lâche on craint qu'il ne s'envole.

334. Si, pour un village, tout un pays devait être perdu, mieux vaudrait perdre ce village.

Mieux vaut terre gâtée que terre perdue. — Mieux vaut perdre la laine que la brebis. — Couler le moucheron pour sauver la mouche. — È meglio perder la sella che il cavallo.

335. Si quelques chiens aboient, est-ce qu'ils peuvent faire écrouler la montagne?

Quand un chien aboie contre la montagne, qui en pâtit? La montagne ou le chien? (Prov. hindou). — Les chiens ont beau aboyer à la lune, la lune n'en brille pas moins (Prov. persan).

336. Si tu aimes le riz, arrache les mauvaises herbes.

337. Si tu aimes le riz, sépare le grain de la balle.

---

(1) Cet injuste mépris de l'âne est bien rendu par notre La Fontaine, dans ce vers:

Il (le lion) attend son destin sans faire aucunes plaintes;
Quand voyant l'âne même à son antre accourir:
Ah! c'est trop, lui dit-il: je voulais bien mourir;
Mais c'est mourir deux fois que souffrir tes atteintes!

338. Si tu saisis un serpent par la main d'autrui, il n'est pas utile que tu le saisisses de ta propre main.

Se servir de la patte du chat pour tirer les marrons du feu.

339. Si tu traverses une rivière, tu peux être avalé par un crocodile, mais ne te laisse pas mordre par les petits poissons.

340. Si tu vannes le riz, n'en verse pas le grain.

341. Si tu veux entendre dire du mal de quelqu'un, interroge ses ennemis.

342. Si un arbre a de nombreuses et solides racines, qu'a-t-il à craindre de la tempête?

343. Si un aveugle conduit un aveugle par la main, ils tomberont tous deux dans le fossé.

Un aveugle mène l'autre en la fosse. — Cae en la cueva el que otro a ella lleva.

344. Suivre son penchant, c'est la ruine; suivre son cœur, c'est la mort.

345. Tout autre en face, tout autre par derrière.

346. Toute matière en putréfaction exhale sa substance.

347. Tu auras beau battre le chien, il reviendra quand même à l'endroit où il y a beaucoup d'os.

Chien affamé, de bastonnade n'est intimidé.

348. Un buffle est couvert de boue, tous les autres buffles en sont couverts également.

Il ne faut qu'une brebis galeuse pour infecter tout un troupeau. — Chi dorme con cani si leva con pulci. — Quien con chiquillo se acuesta, cagado se levanta.

349. Un camarade devient le consolateur du cœur.

Qu'un ami véritable est une douce chose!
Il cherche vos besoins au fond de votre cœur.

È meglio un buon amico che cento parenti. — Eed vriend is beter dan geld in de beurs (Un ami vaut mieux que de l'argent dans la bourse). — Cherche un ami avec soin; l'as-tu trouvé? garde-le bien! (Prov. russe). — Amis valent mieux qu'argent.

350. Un copeau de bambou, une côte de feuille de palmier, plaqués dans la muraille, peuvent être pris pour cure-dents ou pour cure-oreilles.

De tout bois faire flèche. — Nécessité est mère d'industrie.

351. Un couperet de bois bien affilé devient comme un couperet de fer.

L'art supplée la nature.

352. Un éléphant est avalé par un serpent-*lidi* (1).

---

(1) Le serpent-*lidi* est un petit serpent venimeux qui tire son nom probablement du mot *lidi* (côte ou nervure de la feuille du cocotier).

353. Un grand navire est tourné en tous sens par un petit gouvernail.

Piccola pietra rovescia gran carro. — Pequeño machado parte grande carvalho.

354. Un *kouman* (1) est tué, le monde entier est inondé de son sang.

Far d'una mosca un elefante.

355. Un navire deux capitaines.

Mandar no quiere par. — Deux patrons font chavirer une barque (Prov. turc).

356. Un peu de levain fait fermenter toute une masse de pâte.

357. Un prâhou en planches est chargé de diamants.

L'habit ne fait pas le moine.

358. Un Sultan meurt, un Sultan le remplace.

Le roi est mort, vive le roi! — Un clou chasse l'autre.

359. Un *tchoupak* ne peut pas devenir un *gantang* (2).

360. Une corde tressée en triple n'est pas aisément rompue.

L'union fait la force. — Toute puissance est faible à moins que d'être unie.

361. Une dette d'or peut être payée, mais une dette du cœur n'est enlevée que par la mort.

362. Un *koutok* (3) de riz, s'il est mouillé, ne vole pas dans le van.

363. Une personne mange du fruit du *tchempedak* (4), et toutes sont atteintes par son jus.

364. Une petite sangsue veut devenir un serpent-python.

365. Vendre de la soie, acheter de la grosse toile.

Changer son cheval borgne contre un aveugle. — Romper la casa per vender il calcinaccio.

366. Visage abîmé, miroir cassé!

367. Vouloir prendre le ciel avec la main.

On ne saurait prendre la lune avec les dents. — Que d'ignorants dont le front touche les étoiles! (Prov. arabe).

---

(1) Le *kouman*, comme il a été dit déjà, est un tout petit insecte, une espèce d'*acarus*.

(2) Le *tchoupak*, mesure de capacité, est exactement le quart d'un *gantang*. Le *gantang* correspond à peu près à notre ancien boisseau. C'est donc comme si l'on disait, en parlant de notre ancienne monnaie: “ Un liard ne peut pas devenir un sou! „

(3) Le *koutok* est une petite mesure de capacité pour les matières sèches, équivalente à quatre *guenggam* ou poignées.

(4) Le *tchempedak* est un arbre du genre artocarpus, à très gros fruits jûteux.

# *Frammento di un Capitolare Franco nel codice A 220 Inf. della Biblioteca Ambrosiana;*

Nota del Socio corrispondente Prof. FEDERICO PATETTA.

In fine del ms. Ambrosiano A 220 Inf. contenente, di mano forse della prima metà del secolo decimo, i libri 17 a 20 delle Antichità Giudaiche di Giuseppe Flavio tradotti in latino (1), si trova un foglio più antico, incollato in epoca recente sopra una pergamena aggiunta, ma che originariamente doveva essere attaccato alla parte interna dell'assicella posteriore della legatura.

Questo foglio ci conserva un frammento di un *capitulare missorum* sfuggito agli editori dei Capitolari, e pubblicato invece, poco correttamente, dal Porro nel *Codex Diplomaticus Langobardiae* (2) colla falsa indicazione “ *fragmentum inventarii* „.

Questo preteso frammento d'inventario si troverebbe, secondo Porro, in una “ *pergamena saeculi X* „; ma in realtà si tratta dell'ultimo foglio di un ms. del secolo nono.

Infatti al secolo nono accennano tutte le particolarità paleografiche del breve frammento: l'uso frequente dell'*a* aperta in alto e della *g* parimenti coll'occhiello aperto; le aste formate a foggia di clava (3); i tratti di *m*, *n*, *h* elegantemente curvati a

(1) Come curiosità ricordo, che la sottoscrizione dell'ultimo libro è scritta in senso contrario, cioè precisamente così: “ muroeaduisirenegetatsuteuedsumiseciurebileaciad | uisitatiuqitnaippisoiiualf. ticilpxe „ cioè “ ex-“ plicit. flaui iosippi antiquitatis iu | daicae liber uicesimus de uetustate “ generis iudaeorum „.

(2) Torino, 1873, n° 1006, col. 1777-78.

(3) Quelle che il Jaffé (in Mommsen, *Digesta*, I, XLV, n. 1ª) chiama *kolbig gebildeten Langstriche*, cioè ingrossate in alto e che vanno graduatamente assottigliandosi in basso. Tale forma delle aste, non costante, ma frequentissima nella scrittura carolina del secolo nono, si trova qualche volta anche nel secolo decimo e perfino nell'undecimo (Monaci, *Archivio paleograf.*, II,

sinistra; le parole non ancora ben distinte, in modo che il nesso corsivo *et* serve in un caso per la *e* della particella *de* e per il *t* iniziale della parola seguente; infine le reminiscenze di corsivo per es. nell'asta della *d* prolungata inferiormente al disotto della linea, nel nesso *rt* e nell'andamento, dirò così, generale della scrittura.

Quantunque poi il rovescio della pergamena sia rimasto in bianco, si vede che si tratta di un frammento di codice e non di un documento sia dalla forma della pergamena stessa, sia dal modo con cui è stata preparata tracciandovi a secco le linee ed i margini per tutta la pagina benchè sia stata scritta solo una parte, sia specialmente perchè il testo è troppo scorretto per appartenere ad un originale o ad una copia contemporanea e non si capirebbe come un capitolare possa essere stato posteriormente trascritto in forma di documento e non in un codice.

Si aggiunga ancora, che nell'ultima linea della facciata si legge, della stessa mano che scrisse il capitolare:

" supplico uobis, domine mi tatto, ut mittetis mihi ex uestris cultris „.

L'amanuense dunque richiede a Tattone, forse abate del suo convento (1), dei *cultri* per la preparazione della pergamena (2).

Chi possa essere questo *dominus Tatto*, naturalmente non è

---

tav. 3 e segg.: *Collez. fiorentina di facsimili paleograf.*. tav. 25; Chatelain, *Paléogr. des classiques latins*, tav. 42, 43, 87), ma mentre nel secolo nono le aste sono generalmente come arrotondate in alto, posteriormente finiscono spesso quasi in un piano inclinato da destra a sinistra. Anche il Delisle (*Mémoire sur l'école calligraph. de Tours au IX*e *siècle*, 1885, p. 7) pone fra le caratteristiche della così detta semi-onciale carolina il " renflement de la partie supérieure des lettres montantes „, ed il Thompson (*Handbook of greek and latin Paleogr.*, 2a ed., 1894, p. 258) nota nel secolo nono la tendenza " to thicken or club the stems of tall letters, as in b, d, h „, aggiungendo che essa scompare graduatamente nel secolo decimo.

(1) Cfr. per es. la sottoscrizione del ms. di Quedlinburg (in Delisle, Op. cit., p. 20), nella quale l'amanuense chiama pure l'abate di S. Martino di Tours *dominus meus* senz'altro.

(2) Cfr. Wattenbach, *Schriftwesen*, 3a ed., 1896, p. 208 e segg. Prima della parola *supplico* si vede traccia di una lettera recisa nello smarginare il foglio. Non può mancare ad ogni modo che una sola parola, e probabilmente anche breve.

facile dire. Il ms. Ambrosiano proviene dal monastero di Engelberg nel cantone di Unterwald in Svizzera (1), ma questo celebre monastero fu fondato solo nel 1120 (2). Invece un *Tatto* nella prima metà del secolo nono era abate del monastero di Kempten in Baviera ed iscritto nella *confraternitas* del monastero di S. Gallo (3). Se però in lui si debba ravvisare il *Tatto* del codice Ambrosiano, lascio ad altri il decidere, e vengo subito al frammento di capitolare. Esso occupa 17 linee di una pagina, nella quale sono tracciate altre 12 linee rimaste in bianco, salvo l'ultima, che contiene la domanda rivolta a Tattone.

Il frammento conservatoci incomincia col capitolo 18, e presenta alcune piccole lacune, prodotte da guasti nella pergamena, corrosa specialmente dalla ruggine dove si trovava a contatto coi chiodi della legatura. Il foglio è stato anche smar-

---

(1) Lo prova la seguente iscrizione nel rovescio dell'ultimo foglio: " Hic liber est a Reverendissimo, pioque patre Domino Jacobo Benedicto " monasterii montis angelorum Abbate perquam vigili, ex petitione Reve- " rendi ac generosi Domini Julii Turriani et insignis ac circumspecti viri, " Domini Praefecti Joannis Stulz, equitis aurati, Illustrissimo Domino Bur- " romeo Cardinali Mediolanensi, gratitudinis et humilis observantiae causâ " donatus; Anno 1604 ". Il dotto e cortese Dott. dell'Ambrosiana sac. G. Mercati mi avvertì, che eguale provenienza hanno anche altri codici dell'Ambrosiana, e mi indicò fra essi quello segnato H 51 Sup., del secolo XII, contenente una miscellanea di opuscoli di S. Bernardo, S. Agostino, Ivone e molti altri. Lo stesso Dott. Mercati, che ha così ben meritato degli studi storico-giuridici coll' importantissima scoperta del palinsesto dei Basilici, volle con squisita cortesia farsi mia guida nella visita dell'Archivio del Capitolo di S. Ambrogio, ed ivi comunicarmi una sua nuova scoperta, che interesserà vivamente i dotti. Si tratta di due fogli di un codice della legge romana Udinese, scritto forse in Italia sulla fine del secolo nono o in principio del decimo. I due fogli saranno illustrati dallo stesso Dott. Mercati. Abbiamo così un nuovo indizio di una certa conoscenza della legge Udinese in Italia, e precisamente in Lombardia, dove secondo ogni verosimiglianza furono anche compilati i *Capitula secundum Lodoici imperatoris*, tre dei quali sono tolti da detta legge. I *capitula*, per quanto è noto, si trovano solo nel cod. Ambrosiano O, 55, proveniente da Susa, ma scritto probabilmente a Pavia. Cfr. *Monum. Germ.*, LL. IV, LIII.

(2) Mabillon, *Annales ordinis S. Benedicti*, VI, 55.

(3) *Mon. Germ.: Libri confraternitatum Sancti Galli, Augiensis, Fabariensis*, p. 38, (83), 1; p. 69, (202), 4. Per altri personaggi di egual nome v. l'indice del volume, come pure l'indice del secondo volume degli *Annales ordinis S. Benedicti*.

ginato da tutti i lati, ma con non molto danno per la parte scritta.

Il testo è il seguente:

XVIII. De liberis hom[*i*]nibus qui res nostras per precariam possident et censa redebent. si autem . . li . . (1) | censum contradic[*i*]t et hoc iudex an (2) ministerialis noster non requirit set (3) per neglegentia (4) | remanet, ut . . . . . . . (5) requiratur. |

XVIIII. De nostra ellimosina (6) que (7) dare iussimus, ut inquiratis si fuit facta an non uel quomodo. |

XX. Insuper uolumus [*et iubem*]us (8), ut de omnia que supradiximus et de alia que ad nostram utilita[*t*]e[*m*] | pertinet uos, qui missi estis, diligenter inquirere certetis, et ubi bene inueneritis gratia[*s*] (9) | dicite, ubi autem aliqua neglegentia (10) claruerit, an cuius culpa (11) ipse per omnia

---

(1) Porro lesse *ubi*, ma in luogo di *u* il ms. potrebbe avere *il* ed in luogo di *bi* ha quasi certamente *li*, seguìto forse da due altre lettere. Sarebbe ovvio supplire " [*a*]li[*quis*] ", se per le tracce rimaste non sembrasse esclusa la *a*. D'altra parte non pare che nella linea seguente possa leggersi " contradic[*un*]t " in luogo di " contradic[*i*]t ", e resta quindi escluso il nomin. plur. *illi*. Per questo, benchè sul senso del capitolo non cada dubbio, mi astengo dal proporre un supplemento di congettura.

(2) Notevole è qui ed in seguito l'uso di *an* per *aut*, se pure non dipende dall'avere male sciolta l'abbreviazione *ā*.

(3) Ms. *s*ɔ: Porro *seu*.

(4) Porro *neglecentia*.

(5) La lacuna, prodotta da un buco nella pergamena, si potrebbe riempiere per es. con *ab ipsis districte* o alcunchè di simile. Della particella *ut* Porro lesse solo la prima lettera.

(6) Porro *eleemosina*. Della seconda *l* è visibile solo la parte inferiore.

(7) Ms. *q̄*: Porro *cui*.

(8) Nel ms. dopo *uolumus* vi è un buco, essendo la pergamena stata corrosa dalla ruggine, in modo che fu rispettata solo la sommità del *b* di *iubemus*.

(9) Porro *gratiam*.

(10) Porro *negligentia*.

(11) Si potrebbe emendare *ut cuius culpa est*, o forse anche accettare la lezione del ms. come è.

emendet, | licet prepositus, licet iunior an quislibet ministerialis uel subditus nostra sub ditione c[*onstitutus*] (1). |

XXI. De leudis uel freda et reliquis conpositionibus quibus iudices nostri (2) recipiunt, | quid ad nostrum opus inde peruen[*iat*]. |

XXII. De p . . . . s (3) et (4) pontonis (5) uel mercatis et de diuersis teloneis aut (6) piscationibus. |

XXIII. (7) De nutrimento in curte dominicada, id est equaritia (8), vaccaritia, ueruiari . . . (9), | porcaritia, pullos, anetas (10) et aucas. de troia una in anno purcellus VIIII. |

De annona exagitando. De garbas centum tolle unam. si autem unum modium habes (11), | fiunt modii CXX (12). si uero in

---

(1) Il *c* di *constitutus* è certo, e si vedono dopo tracce dell'*o* e della *n*. Porro *subditio n* . . . . . . .

(2) Ms. *nōi*, mentre l'abbreviazione consueta sarebbe *nr̄i*.

(3) Probabilmente *pontibus*.

(4) L'*et*, omessa dal Porro insieme colla *s* precedente, è rappresentata dal segno tironiano 7, che è raro in mss. di tale antichità. Il chiar.[mo] Dott. Mercati me ne mostrò altri esempi nel celebre codice Irlandese attribuito al secolo VIII-IX. V. pure il facsim. di un ms. irlandese anteriore all'844 in THOMPSON, Op. cit., p. 242.

(5) Suppongo che si debba intendere *pontonibus*. I ponti all'epoca carolingia erano ancora piuttosto rari, ed il transito dei fiumi si faceva abitualmente per mezzo di barche e di chiatte (cfr. O. LAUFFER, *das Landschaftsbild Deutschlands im Zeitalter der Karolinger*, Gött., 1896, p. 55 e segg.). Nei così detti *portus* si esigeva poi il *ripaticus* o altra gabella.

(6) Porro *vel*, ma pare che il ms. abbia *ā* (aperta) non *ū*.

(7) Porro: XXXIII.

(8) Porro *equoritia*.

(9) Porro *verviarii* e così pare a primo aspetto che abbia il ms., ma che l'ultima lettera sia proprio *i* non è certo, ed essendo il ms. smarginato potevano seguirne altre. Il senso richiederebbe *ueruiaritia* in corrispondenza al *berbicaritias* del *Cap. de villis*, 23.

(10) Porro *anatus*.

(11) Ms. *hab̄*. Porro *habebis*.

(12) Pare che il numero sia errato e vada corretto in *C*. Porro, qui ed in seguito, *modia*. Essendo usata nel ms. l'abbreviazione *mod.*, sarebbe incerto se la forma fosse maschile o neutra; ma ho preferito la prima perchè d'uso più comune e perchè la trovo anche nei *brevium exempla* dell'anno 810 (*Capitularia*, I, 254).

garbas minus fuerit (1), tunc computas per quinqua | ginta. de quinquaginta tolle unam . si euenerit sistaria II, tunc habebis (2) | modium I . si autem modium plenum inueneris, habebis modios L.

Si potrebbe forse credere, che quest'ultimo capitolo, nel quale si spiega come si faccia il calcolo del raccolto del grano prendendo per saggio un covone ogni cento oppure ogni cinquanta, non appartenga al capitolare, perchè, prescindendo anche dalla mancanza della numerazione, è affatto diverso nella forma dai precedenti, e per il suo contenuto e per la sua prolissità non ha l'apparenza di un'istruzione data ai *missi*. In queste osservazioni non ardirei però insistere molto. Ad ogni modo quanto agli altri capitoli non vi può esser dubbio. Essi appartengono veramente ad un *capitulare missorum,* cioè ad uno di quei capitolari, " rivolti specialmente ai *missi dominici* e che contenevano in prima linea prescrizioni per l'esercizio delle loro funzioni, e quasi un programma dei loro lavori „ (3). Questi capitolari, ed altri analoghi, furono per la natura loro meno facilmente trascritti nei codici giuridici, ed andarono quindi in buona parte perduti (4).

Credo, che il capitolare, al quale apparteneva il frammento

---

(1) Porro *fueris*. Nella parola seguente *computas* la *m* è rappresentata dalla lineetta sovrapposta, ma nel cap. XXI abbiamo per disteso *conpositionibus,* per cui si potrebbe anche qui leggere *conputas.*

(2) Le parole *si evenerit* fino ad *habebis* sono scritte dalla stessa mano, ma su rasura. Anche qui i numeri debbono essere errati, qualunque fosse il numero di *sextarii* in cui si dividesse il moggio. Noto a questo proposito, che il ms. usa l'abbreviazione *mod.* tanto per il singolare quanto per il plurale, per cui si può correggere senza esitazione il *modium I* per es. in *modios VI,* quando si ammetta che il moggio fosse diviso in sedici staia come anticamente. Infatti in tale caso 100 staia corrisponderebbero appunto a poco più di sei moggi. Cfr. Forcellini, Georges e Du Cange alla v. *modius.*

(3) G. Seeliger, *Die Kapitularien der Karolinger*, 1893, p. 65: " Als solche " (*Capitula missorum*) dürfen vielmehr nur jene Erlasse gelten, welche sich " im besonderen an die Königsboten wandten und in erster Linie Vor- " schriften für die amtliche Wirksamkeit, gleichsam ein Arbeitsprogramm " derselben enthielten „.

(4) Cfr. Seeliger, Op. cit., p. 86: " von denen gewiss nur dürftigste " Ueberreste vorhanden sind „.

Ambrosiano, possa con ogni verosimiglianza essere attribuito a Carlo Magno. Infatti il cap. XXIII ci fa subito pensare al *capitulare de villis* (1), e all'epoca di Carlo Magno più che alle successive convengono l'espressione *ad opus nostrum* nel cap. XXI ed il nome *iunior* nel cap. XX (2). Indicare poi con precisione la data del capitolare non mi pare possibile. Tutto al più si può sospettare, che esso sia anteriore al *capitulare de villis* attribuito da Gareis all'anno 812, perchè le disposizioni, che argomentando dal capitolo XXIII dovevano essere osservate dai coltivatori ed amministratori dei possedimenti regi, sembrano meno particolareggiate e meno perfezionate di quelle corrispondenti, che si trovano nel citato capitolare *de villis*, al quale, se già emanato, sarebbe inoltre bastato rinviare.

---

(1) V. specialmente i capp. 18, 19, 23, 38, 40.

(2) Cfr. l'indice dell'edizione dei Capitolari dei *Mon. Germ.* alle parole *iuniores* e *opus*. Sui nomi *iudices, iuniores* e *ministeriales*, v. anche Gareis, *die Landgüterordnung Kaiser Karls des Grossen*, 1895, p. 25-26, nota alla parola *iudices*.

---

AGGIUNTA. — Nella mia nota sul *ms. 1317 della Biblioteca di Troyes* (“ Atti dell'Accad. ”, 28 febbraio 1897; Estr. p. 2, n. 2) mi è sfuggito un errore di stampa, che importa correggere. Dove si legge *Fonte sacro locum*, si deve leggere *lotum*.

*L'Accademico Segretario*

Cesare Nani.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

# CLASSI UNITE

## Adunanza del 2 Gennaio 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

Della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Cossa, Vice Presidente dell'Accademia, D'Ovidio, Direttore della Classe, Berruti, Naccari, Camerano, Segre, Peano, Volterra, Foà, Guareschi, Guidi e Fileti.

Della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Peyron, Pezzi, Ferrero, Cognetti de Martiis, Graf, Boselli e Nani Segretario.

Il Socio Segretario Nani dà lettura dell' atto verbale dell'adunanza del 21 novembre 1897, che viene approvato.

Il Presidente comunica i ringraziamenti della signora vedova Vallauri, alla quale egli ebbe a partecipare le decisioni prese dall'Accademia nella sua ultima adunanza a Classi unite.

Quindi il Socio D'Ovidio legge la seguente relazione della 2ª Giunta per il conferimento del decimo premio Bressa pel quadriennio 1893-1896.

Chiarissimi Colleghi,

La seconda Giunta per il decimo premio (nazionale) di fondazione Bressa ha l'onore di riferire alle Classi unite dell'Accademia i risultati dei suoi lavori.

La prima Giunta già presentò alle Classi unite, nell'adunanza del 2 maggio 1897, la relazione degli studî da essa fatti allo scopo di scegliere, fra le opere inviate dai concorrenti ovvero proposte da Soci, quelle che meritassero di esser prese in considerazione pel conseguimento del premio. Furono sette gli autori proposti alla considerazione dell'Accademia, e un ottavo venne proposto da un Socio durante quell'adunanza.

Fra essi trovavasi il nome del capitano Bottego; ma, essendo ormai accertata la tragica fine dell'insigne esploratore, la seconda Giunta ha dovuto cancellarne il nome; poichè il testamento del fondatore assegna il premio, non alle scoperte od opere, ma agli autori di esse.

Pertanto la scelta, che l'Accademia è chiamata a fare, potrà cadere sopra uno dei seguenti sette nomi, che indicherò in ordine alfabetico:

**Allievi** ing. **Lorenzo**, per la *Cinematica della biella piana;*

**Bianchi** prof. **Luigi**, per le *Lezioni di geometria infinitesimale* ed altre dodici Memorie matematiche;

**Castelnuovo** prof. **Guido**, per cinque Memorie geometriche;

**Caverni Raffaello**, per la *Storia del metodo sperimentale in Italia;*

**Lanciani** prof. **Rodolfo**, per le Tavole componenti la *Forma Urbis Romae;*

**Pitré** dott. **Giuseppe**, per la *Bibliografia delle tradizioni popolari d'Italia* ed altre pubblicazioni continue;

**Pizzi** prof. **Italo**, per la *Storia della poesia persiana.*

La Giunta ha esaminato attentamente coteste opere, ed ha riconosciuto che tutte posseggono pregi tali da renderle degne del premio. Tuttavia, per agevolare la scelta ai Soci, ha stimato conveniente di dividerle in tre gruppi; osservando che, a

suo avviso, quelle del primo gruppo presentano qualche grado di preminenza su quelle del secondo e queste su quelle del terzo.

In ciascun gruppo i nomi seguiranno l'ordine alfabetico.

---

Nel primo gruppo la Giunta ha posto le opere di

Bianchi Luigi,

Pitré Giuseppe.

Il prof. Bianchi nel quadriennio 1893-96 ha pubblicato i seguenti lavori:

*Lezioni di geometria differenziale* (Pisa, Spoerri);

*Vorlesungen über Differentialgeometrie* (Lipsia, Teubner);

*Sui sistemi tripli ortogonali di Weingarten* (Rend. Circ. mat. di Palermo);

*Applicazioni geometriche del metodo di Picard* (Rend. Lincei);

*Sulla interpretazione geometrica del teorema di Moutard* (ibid.);

*Sulle superficie i cui piani principali hanno costante il rapporto delle distanze da un punto fisso* (ibid.);

*Sulle superficie a curvatura nulla negli spazî di curvatura costante* (Atti di Torino);

*Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica* (Ann. di mat.);

*Sopra una classe di superficie collegate alle superficie pseudosferiche* (Rend. Lincei);

*Nuove ricerche sulle superficie pseudosferiche* (Ann. di mat.);

*Estensione del metodo di Riemann ad equazioni a derivate parziali d'ordine superiore* (tre note, Rend. Lincei);

*Sulle divisioni regolari dello spazio non euclideo* (ibid.);

*Ricerche sulle forme quaternarie e sui gruppi poliedrici* (tre Memorie, Ann. di mat.);

*Complemento alle precedenti ricerche* (ibid.).

Sono questi lavori ben conosciuti in tutto il mondo scientifico. Particolarmente richiama l'attenzione il trattato di geometria differenziale, che è stato anche tradotto in tedesco, e che in notevole parte è opera schiettamente originale. Di esso ha pubblicato recentemente una recensione il Darboux (*Bulletin des sciences mathématiques,* ottobre 1897), mettendone in rilievo

appunto le parti originali e largamente encomiandolo; nè si potrebbe ricorrere a un giudice più di lui competente in simil campo di studî.

È noto come le scoperte del Bianchi sulle superficie pseudosferiche, sui sistemi tripli ortogonali, sulle superficie minime e sopra altre parti della geometria, furono la base di una vasta serie di ricerche, che sono fra le più importanti della teoria delle superficie e diedero alta fama al nome dell'autore, ponendolo fra quelli dei geometri che maggiormente hanno contribuito all'avanzamento di questo ramo delle matematiche. Ora le lezioni che egli ha pubblicate contengono la raccolta di tutte quelle ricerche, notevolmente perfezionate, accresciute, collegate fra loro, e fuse in tutto quel corpo di dottrina, che egli volle chiamare “ Geometria differenziale „. È da notare che i metodi più moderni dell'analisi delle forme differenziali e delle equazioni differenziali ebbero nuove ed originali applicazioni in quest'opera; per modo che teoremi, che il Lie ed altri eran riesciti soltanto ad intuire mediante semplici considerazioni infinitesimali, trovarono una base solida e rigorosa nei metodi di dimostrazione escogitati dal Bianchi.

Le Memorie da lui pubblicate nel quadriennio posson dividersi in tre categorie: quelle di geometria differenziale, quelle di analisi e quelle di alta aritmetica. Tralasciando di parlare delle prime, che in gran parte sono in istretta connessione col trattato di geometria differenziale, va rilevato che quelle di analisi segnano un passo notevole nell'integrazione delle equazioni a derivate parziali, ed uniscono mirabilmente due metodi riconosciuti fra i più efficaci e potenti, quello di Riemann e quello delle approssimazioni successive del Picard; mentre le ricerche di alta aritmetica aprono un campo nuovo di studio sulle forme quaternarie quadratiche, con geniale idea collegandole (seguendo in parte il Poincaré) con la divisione regolare dello spazio non euclideo in poliedri simmetrici e congruenti.

Gli enumerati lavori contengono molte vedute originali e molti nuovi risultati di primaria importanza; essi sono il frutto di un ingegno geniale e di una ricerca tenace e profonda in varî campi delle matematiche. Inoltre le *Lezioni di geometria differenziale* sono l'opera più ragguardevole di matematica che sia comparsa fra noi nel quadriennio 1893-96. E per tutte

queste ragioni è chiaro che l'autore si trova in condizioni pienamente conformi all'importanza del premio ed alla volontà del fondatore.

Il dott. Pitré vien segnalato per la sua *Bibliografia delle tradizioni popolari d'Italia,* pubblicata nel 1893; ed altresì per le sue pregevolissime pubblicazioni continue, parecchi volumi delle quali vennero in luce nel quadriennio 1893-96, quali sono:

*Archivio per lo studio delle tradizioni popolari,* dal 1882 in poi;

*Biblioteca delle tradizioni popolari siciliane,* che conta già 20 volumi dal 1870 in poi;

la raccolta intitolata *Curiosità popolari tradizionali,* in 13 volumi dal 1885 in poi.

Fra coloro ai quali si dà nome di " folkloristi ", e che in sostanza studiano la psicologia dei popoli, il Pitré è senza dubbio il primo in Europa. In questo genere di studî varî tentativi s'eran già fatti da altri; ma il Pitré fu il primo a cominciare un ordine metodico, continuato di ricerche rigorose e sicure, in tutte quante le forme possibili. E perseverò per circa trent'anni senza interruzione, raccogliendo un materiale scientifico sempre genuino e così vasto, che nessuno in questo genere di studî può stare accanto a lui.

Egli, è vero, limitò le sue ricerche alla sola Sicilia, e non è un filologo. Ma la conoscenza che ha del dialetto siciliano è tale, che poté spesso correggere gli errori che commisero i filologi nel parlarne. E il popolo siciliano egli studiò sotto tutti i possibili aspetti: costumi, tradizioni, racconti, canti popolari, rappresentazioni figurate e sceniche, sacre e profane, medicina popolare, ecc. Nè mancò di far continua comparazione del popolo siciliano con gli altri. In questo modo la sua opera monumentale di più diecine di volumi, alla quale dedicò l'intera sua vita, resta come un modello, che addita agli altri la via che è necessario percorrere per poter riuscire al fine desiderato. Ed è perciò che, mentre i folkloristi, anche se filologi, sono assai spesso poco stimati dagli uomini di scienza e chiamati dilettanti, il Pitré invece gode la stima universale degli scienziati.

Mettendo innanzi il nome del Pitré si è tenuto conto, non soltanto del suo alto e vero valore scientifico, ma anche della

grande importanza morale, che avrebbe il premiare una vita intera di lavoro disinteressato e per molti anni solo da pochissimi riconosciuto. Dai suoi molti volumi egli non ha ricavato nessun lucro, ed ha dovuto vivere facendo il medico. Unico stimolo costante fu per lui l'amore del natìo loco. E così ha finito per dar fondamento sicuro ad un ramo dello scibile, che era, specialmente fra noi, trascurato e deriso, e che ora, in grandissima parte per opera sua, da molti apprezzato, può essere sicuramente e scientificamente coltivato.

---

Il secondo gruppo è composto delle opere di

Castelnuovo Guido,
Caverni Raffaello,
Lanciani Rodolfo,
Pizzi Italo.

Il nome del Castelnuovo è specialmente raccomandato alle seguenti Memorie di Geometria:

*Sulla linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti ad una curva algebrica* (Atti Torino, 1893);

*Sui multipli di una serie lineare di gruppi appartenenti ad una curva algebrica* (Rend. Circ. mat. Palermo, 1893);

*Sulla razionalità delle involuzioni piane* (Math. Ann., 1893-94);

*Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Mem. Soc. dei XL, 1894-96);

*Sulle superficie di genere zero* (ibid.).

Per le ultime due Memorie meritò già l'Autore la medaglia d'oro conferita dalla Società dei XL, con giudizî assai favorevoli su tutti i lavori qui citati. I quali risolvono questioni difficili, molto generali e d'importanza eccezionale, intorno alle curve e superficie algebriche; e le risolvono con metodi molto ingegnosi e potenti, dal Castelnuovo introdotti nella scienza, oppure da lui ampliati e perfezionati.

Nella Memoria 1ª è dimostrato che una serie di gruppi di $n$ punti di una curva algebrica, tale che $r$ punti qualunque di questa stiano in un sol gruppo, è una serie lineare, cioè una $g_n^r$,

salvo un caso di eccezione; onde seguono notevoli proposizioni per la Geometria su una sperficie. Nella Memoria 2ª, servendosi della nozione (di cui pel primo ha mostrato tutta la portata) di multipli successivi di una serie lineare, l'Autore determina il massimo genere π di una curva contenente una serie $g_n^r$, ossia di una curva d'ordine $n$ nello spazio di dimensione $r$, e stabilisce fra gli altri un importante teorema. Nella Memoria 3ª si dimostra che ogni involuzione piana è razionale: proposizione, di cui da lungo tempo i geometri cercavano invano una dimostrazione generale, ora trovata dall'Autore, grazie ad un felice uso della geometria delle serie lineari su una curva e dei sistemi lineari di curve su una superficie. Nello stess'ordine d'idee, ma valendosi inoltre dei nuovi concetti dovuti all'Enriques ed all'Autore, questi riesce nella Memoria 5ª a dar la risposta, assai desiderata, al quesito più generale, di riconoscere quando una data superficie algebrica è razionale. E la risposta è altrettanto semplice quanto grandi erano state le difficoltà per giungervi; poichè le condizioni di razionalità consistono nell'annullarsi dei due generi superficiali, il numerico e il geometrico, e di un terzo e nuovo carattere. Per superficie algebriche qualunque e pei sistemi lineari di curve sopra esse, vengono pure scoperti nella Memoria 4ª risultati nuovi, generali e fecondissimi.

Insomma i lavori del Castelnuovo contengono i più importanti progressi, che si sian fatti da alcuni anni in qua, in Italia e fuori, nello studio di quelle proprietà delle curve e superficie algebriche, che non mutano per trasformazioni birazionali. Del che è prova, che l'insigne geometra francese sig. Picard nel suo trattato in corso di stampa (Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes) si propone di giovarsi ampiamente di tali lavori.

L'opera del Caverni, intitolata *Storia del metodo sperimentale in Italia,* ebbe dall'Istituto veneto il premio Tomasoni. Dei sette volumi promessi quattro sono stati pubblicati sino ad oggi. Il primo (1891) è occupato per una metà da un discorso preliminare, e nell'altra si narra l'invenzione dei principali strumenti fisici. Il secondo (1892) comprende le applicazioni del metodo sperimentale all'ottica geometrica e fisica, all'acustica, all'elet-

tricità, al magnetismo, alla meteorologia, alla geografia ed all'astronomia. Nel terzo volume, pubblicato nel 1893, cioè nel quadriennio relativo al premio di cui ci occupiamo, si trova la storia del metodo sperimentale applicato all'anatomia, alla meccanica dei moti animali, allo studio degli organi dei sensi, alla fisiologia vegetale, alla medicina ed alla geologia. Ed il quarto volume, pubblicato nel 1895, anch'esso nel detto quadriennio, comprende la parte prima del metodo sperimentale applicato alla scienza del moto dei gravi. Nei dieci capitoli che lo compongono si tratta della scienza del moto nel secolo XVI, dei baricentri, degli equiponderanti, delle macchine, delle libere cadute dei gravi, delle scese dei gravi lungo i piani inclinati e per gli archi dei cerchi, delle resistenze dei solidi, dei proietti, terminando con una conclusione di questa prima parte.

È già noto all'Accademia che il valore dell'opera del Caverni fu stimato grandissimo e dai giudici del concorso presso l'Istituto veneto e da altri scienziati, fra i quali basti citare lo Schiaparelli. La varietà delle materie, l'ampiezza dell'orditura dell'opera, richiesero un ricchissimo corredo di cognizioni e un lavoro enorme. Vi è raccolto il frutto di molte pazienti letture di libri malnoti o dimenticati, e quello di ricerche diligentissime sui manoscritti e negli archivi.

La *Forma urbis Romae* del prof. Lanciani è senza dubbio un importantissimo lavoro di archeologia e di topografia romana, dovuto a lunghe e diligenti ricerche di vario genere. Esso consiste in una raccolta di 30 tavole, le quali a pubblicazione compiuta raggiungeranno il numero di 46. Le tavole mancanti sono già pronte per la stampa; ma, per contratto con l'Accademia dei Lincei, non potranno venire in luce prima del 1899.

L'Autore merita la più ampia lode, per aver recato con quest'opera un contributo notevolissimo alla conoscenza della topografia di Roma. Ed a compiere un'opera cosiffatta nessuno era preparato meglio di lui, architetto, archeologo, e da molti anni intento a studiare la topografia e i monumenti di Roma; del che fa testimonianza una copiosa serie di pregevoli lavori, così monografici come d'indole generale.

Sebbene la pubblicazione consista di sole tavole, pure essa è già degna di venir presa in considerazione per il premio.

Quando poi sia pubblicato anche un testo illustrativo di essa, che contenga i materiali raccolti dal Lanciani pel suo lavoro, allora si potranno conoscere pienamente le laboriose indagini da lui fatte per delineare questa pianta archeologica di Roma antica, e si possederà oltre a ciò un tesoro d'informazioni topografiche, antiquarie, storiche, che ora in parte rimangono sconosciute.

La *Storia della poesia persiana* del prof. Pizzi, il quale già con altre opere si era acquistata fama fra i cultori delle cose persiane, parve al suo comparire un avvenimento letterario, e la critica degli orientalisti e dei letterati in genere si esercitò su di essa in Italia e fuori. Ne parlarono con lode l'" American Journal of Philology ", la " Deutsche Litteraturzeitung ", l'" Jahresberichte der Geschichtswissenschaft ".

Il Pizzi era stato preceduto dal von Hammer, che nel 1818 pubblicò un'analoga storia; ma dipoi si fecero studî e ricerche, di cui si è valso il Pizzi; talchè la sua opera, per alcuni riguardi, può dirsi nuova e più compiuta, e viene a prendere un posto onorevole accanto a quella del dotto tedesco. Inoltre essa è stata composta, non per i soli orientalisti, ma altresì per il pubblico erudito; ed è riuscita al suo intento, presentando un insieme di ricerche ed analisi accuratissime sulla versificazione persiana, sul sentimento che le presiede, sui curiosi rapporti fra questo sentimento e quello del medio evo in Italia. La scelta giudiziosa dei molti esempî, i pareri spesso indipendenti, l'aver concentrato il sapere dei dotti anteriori, rendono l'opera utile e commendevole, facendola un compendio di tutti gli studî iranici dell'Autore.

L'opera è essenzialmente letteraria, ma ha pure un valore scientifico innegabile; e la riunione di questi varî pregi ne costituisce l'originalità e l'importanza.

---

Il terzo gruppo si riduce a

Allievi Lorenzo.

Nella sua *Cinematica della biella piana* l'Allievi si è proposto d'istituire uno studio sistematico delle guide del movimento

circolare e rettilineo; ed ha raggiunto lo scopo in maniera originale, con un esame profondo e particolareggiato della quistione cinematica del moto di una figura piana nel proprio piano.

---

Ecco additati, almeno per sommi capi, i pregi delle opere che la Giunta aveva il mandato di esaminare. Non sarà superfluo ripetere i nomi degli autori divisi, come si è già spiegato, in tre gruppi:

Primo gruppo:

Bianchi,
Pitré.

Secondo gruppo:

Castelnuovo,
Caverni,
Lanciani,
Pizzi.

Terzo gruppo:

Allievi.

Ed ora tocca a voi di designare fra la eletta schiera quel nome che meglio vi parrà indicato pel premio; del quale tutti invero si presentano meritevoli per eccellenza di opere, per prestanza d'ingegno e per vigorosa ed utile operosità.

*Il Segretario della Giunta*
Enrico D'Ovidio.

La votazione avrà luogo nella seduta del 9 corr. Gennaio.

# CLASSE

DI

# SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

## Adunanza del 2 Gennaio 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

---

Sono presenti i Soci: Cossa, Vice-presidente dell'Accademia, D'Ovidio, Direttore della Classe, Berruti, Camerano, Segre, Volterra, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti e Naccari Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della seduta del 13 Giugno 1897.

Il Segretario comunica la lettera della Presidenza dell'Istituto Veneto, che partecipa la morte del Prof. Filippo Lussana membro di quell'Istituto, e presenta alcune pubblicazioni inviate in dono dal Socio straniero von Koelliker.

Vengono accolte per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° *Sull'azione dell'etere cianacetico e dell'ammoniaca sui chetoni grassi;* nota II del Dott. Adalberto Pasquali, presentata dal Socio Guareschi,

2° *La rifrazione atmosferica calcolata in base all'ipotesi*

*di Mendeleeff sulla distribuzione verticale della temperatura dell'aria;* nota del Prof. Paolo Pizzetti, presentata dal Socio D'Ovidio,

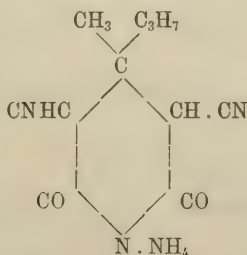
Il Socio Guidi legge poi anche a nome del Socio Volterra la relazione sulla memoria dell' Ing. Elia Ovazza, intitolata: *Calcolo grafico delle travi elastiche sollecitate a flessione e taglio.*

La relazione è favorevole alla lettura e viene approvata; si accoglie la memoria per l'inserzione nei volumi accademici.

# LETTURE

## *Azione dell'etere cianacetico e dell'ammoniaca sui chetoni grassi;*

Nota II del Dott. ADALBERTO PASQUALI.

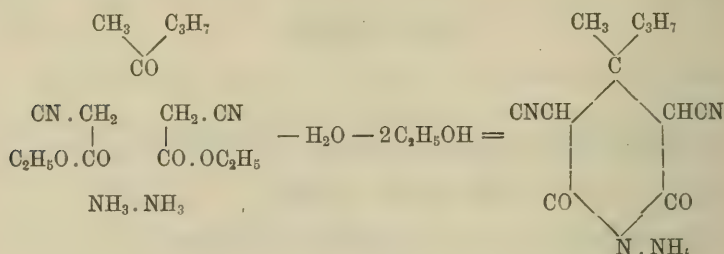
In due note precedenti del prof[r] Guareschi (1), del dottor Grande (2) ed in una mia (3) è stato accennato come nell'azione dell'etere cianacetico sui chetoni in presenza di ammoniaca, si formino dei *prodotti intermedii* che coll'acqua si scompongono, dando un derivato bicianpiridinico e un *idrocarburo*; nel caso del metiletilchetone, ad esempio, si à dell'*etano* e nel caso del metilpropilchetone, del *propano*. Nella mia precedente nota ò appunto accennato al prodotto intermedio che si ottiene del metilpropilchetone e che, probabilmente, aveva la costituzione seguente:

```
        CH3  C3H7
          \  /
           C
          / \
  CNHC  /     \ CH . CN
       |       |
       |       |
       |       |
   CO  \       /  CO
         \   /
          N . NH4
```

(1) Guareschi, *Nuove ricerche sulla sintesi di composti piridinici e la reazione di Hantzsch* (" Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1897, T. XXXII).

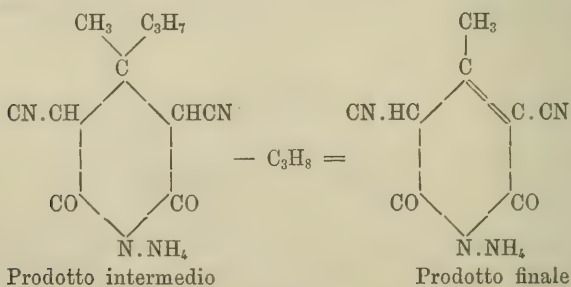
(2) E. Grande, *Azione dell'etere cianacetico sopra il metiletilchetone in presenza di ammoniaca* (Ivi, 1897, T. XXXII).

(3) A. Pasquali, *Azione dell'etere cianacetico e dell'ammoniaca sui chetoni grassi*, " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", T. XXXII.

La formazione di tale sostanza, come accennai allora, poteva spiegarsi così:

$$
\begin{array}{c}
CH_3 \quad C_3H_7 \\
\diagdown\diagup \\
CO \\[4pt]
\begin{array}{cc}
CN.CH_2 & CH_2.CN \\
| & | \\
C_2H_5O.CO & CO.OC_2H_5
\end{array} \\[4pt]
NH_3.NH_3
\end{array}
- H_2O - 2C_2H_5OH =
\begin{array}{c}
CH_3 \quad C_3H_7 \\
\diagdown\diagup \\
C \\
\diagup \quad \diagdown \\
\begin{array}{ccc}
CNCH & & CHCN \\
| & & | \\
CO & & CO
\end{array} \\
\diagdown \quad \diagup \\
N.NH_4
\end{array}
$$

Questo prodotto, dissi, si decompone facilmente a contatto dell'acqua e, cristallizzato da questa, dà una sostanza che il comportamento e l'analisi identificarono per un sale di ammonio della β-β'-dician-γ-metilglutaconimide.

Ora, poichè da differenti chetoni si avevano differenti prodotti intermedì che portavano allo stesso prodotto finale, e, siccome nel trattamento di questi con acqua, si notava uno sviluppo abbondante di bollicine gassose, l'unica ipotesi, che sembrasse plausibile, era l'ammettere che la reazione andasse nel modo seguente:

$$
\underset{\text{Prodotto intermedio}}{
\begin{array}{c}
CH_3 \quad C_3H_7 \\
\diagdown\diagup \\
C \\
\diagup \quad \diagdown \\
\begin{array}{ccc}
CN.CH & & CHCN \\
| & & | \\
CO & & CO
\end{array} \\
\diagdown \quad \diagup \\
N.NH_4
\end{array}}
- C_3H_8 =
\underset{\text{Prodotto finale}}{
\begin{array}{c}
CH_3 \\
| \\
C \\
\diagup \quad \diagdown\!\!\diagdown \\
\begin{array}{ccc}
CN.HC & & C.CN \\
| & & | \\
CO & & CO
\end{array} \\
\diagdown \quad \diagup \\
N.NH_4
\end{array}}
$$

E fu allo scopo di precisare meglio ciò, che io ò continuato lo studio di questa sostanza: sono arrivato, infatti, a risultati per i quali questa ipotesi viene, pare, confermata.

In tutte le esperienze eseguite in proposito, ò sostituito il cianacetato di metile all'etere cianacetico, per vedere se la reazione andasse nello stesso senso o se, invece, il gruppo alcoolico influisse in qualche modo sull'andamento della reazione.

Come era da prevedere, la sostituzione non ebbe influenza

sulla natura dei prodotti ottenuti, se non che, avendo operato in condizioni migliori, sono riuscito a ottenere un prodotto abbastanza puro e in maggior quantità.

Grammi 10 (1 molecola) di metilpropilchetone mescolai a gr. 23 (2 molecole) di cianacetato di metile: raffreddai la mescolanza e vi feci passare, per circa due ore, dell'ammoniaca gassosa e secca fino a che il contenuto della boccia non fu completamente rappreso in una massa biancastra e densa.

Dopo 24 ore ripresi la massa solida con alcool assoluto e raccolsi la parte solida alla pompa. La lavai con alcool assoluto, col quale la triturai in un mortaio. Raccolsi ancora su filtro, lavai e cristallizzai dall'alcool bollente, assoluto, in un matraccio ben chiuso.

Ottenni un prodotto leggermente colorato in giallo che asciugai sull'acido solforico, a cm. 30 di pressione.

Il prodotto asciutto pesava gr. 12.

Per tante esperienze analoghe, eseguite con lo stesso chetone, ò dovuto persuadermi che il prodotto così ottenuto si decompone facilmente con alcool che contenga anche tracce appena di acqua e che la decomposizione aumenta ripetendo le cristallizzazioni.

La sostanza ottenuta in tal modo, con latte di magnesia svolse ammoniaca che fu trasformata in cloroplatinato.

A gr. 0,1136 di sostanza corrisposero gr. 0,0452 di platino da cui, per cento:

| | trovato | calcolato per $C_{11}H_{12}N_3(NH_4)O_2$ |
|---|---|---|
| N ammoniacale = | 5,65 | 5,93 |

Ora, siccome da saggi preliminari veniva confermata la trasformazione del prodotto intermedio in sale di ammonio della β-β' dician-γ-metilglutaconimide, con sviluppo notevole di gas, era necessario conoscere la quantità del prodotto finale e del gas ottenuti, in rapporto a quella del prodotto intermedio impiegato e stabilire, eudiometricamente, la composizione del gas sviluppato.

A questo scopo, introdussi gr. 0,55 di sostanza sotto una campanella di vetro graduata e con rubinetto, sul mercurio.

Vi aggiunsi cc. 15 circa di acqua distillata, previamente bollita: dopo 48 ore, lo sviluppo di gas era cessato: questo segnava cc. 12 alla parte superiore della campanella, quantità di molto inferiore alla teorica.

Questo gas, incoloro, brucia con fiamma fuligginosa, azzurra ai bordi, propria degli idrocarburi. Non si combina al bromo e questo fatto conferma l'ipotesi che si tratti di un idrocarburo saturo. Infine, come il propano, mentre è quasi insolubile nell'acqua, si scioglie moltissimo nell'alcool assoluto.

Questo gas, travasato, fu a piccole porzioni bruciato nell'eudiometro Bunsen.

Ebbi i risultati seguenti:

Analisi I[a]
(*Il gas non fu disseccato*).

| | volume letto | temperatura | pressione del gas | volume a 0° e 1 metro |
|---|---|---|---|---|
| Gas impiegato . . . . . . | 68,10 | 18°,5 | 200,6 | 12,79 |
| Dopo l'aggiunta di ossigeno . | 269,27 | 18°,5 | 397,0 | 100,08 |
| Dopo l'aggiunta di aria . . . | 529,95 | 18°,5 | 653,3 | 324,17 |
| Dopo la scintilla . . . . . | 496,38 | 18°,5 | 620,3 | 288,29 |
| Dopo l'introduzione di potassa | 461,06 | 18°,5 | 580,5 | 250,58 |

| | trovato | calcolato per $C_3H_8$ |
|---|---|---|
| Ossigeno totale consumato . . . . | 60,80 | 64,15 |
| Ossigeno consumato per form. di $CO_2$ | 37,71 | 38,49 |
| Ossigeno consum. per form. d'$H_2O$ . | 23,09 | 25,76 |

Analisi IIª
(*il gas fu disseccato*).

| | volume letto | temperatura | pressione del gas | volume a 0° e 1 metro |
|---|---|---|---|---|
| Gas impiegato . . . . . . . | 79,5 | 26° | 235,85 | 17,1 |
| Dopo l'aggiunta di ossigeno . | 307,8 | 26°,5 | 457,4 | 128,3 |
| Dopo l'aggiunta di aria. . . | 538 | 26° | 684,95 | 336,4 |
| Dopo la scintilla . . . . . . | 487,8 | 26° | 632,6 | 281,75 |
| Dopo l'introduzione di potassa | 437 | 24° | 579,92 | 232,9 |

| | trovato | calcolato per $C_3H_8$ |
|---|---|---|
| Ossigeno totale consumato. . . . | 86,4 | 85,5 |
| Ossigeno consumato per form. di $CO_2$ | 48,85 | 51,3 |
| Ossigeno consumato per form. di $H_2O$ | 37,55 | 34,2 |

Analisi IIIª
(*il gas fu disseccato*).

| | volume letto | temperatura | pressione del gas | volume a 0° e 1 metro |
|---|---|---|---|---|
| Gas impiegato . . . . . . . | 63,44 | 24° | 215,93 | 12,59 |
| Dopo l'aggiunta di ossigeno . | 270,8 | 24°,5 | 421,1 | 104,63 |
| Dopo l'aggiunta di aria. . . | 507,41 | 24° | 653,55 | 304,77 |
| Dopo la scintilla . . . . . . | 470,75 | 24° | 618 | 267,37 |
| Dopo l'introduzione di potassa | 433,74 | 24°,5 | 581,9 | 231,58 |

| | trovato | calcolato per $C_3H_8$ |
|---|---|---|
| Ossigeno totale consumato. . . . | 60,6 | 62,95 |
| Ossigeno consumato per form. di $CO_2$ | 35,79 | 37,77 |
| Ossigeno consumato per form. di $H_2O$ | 24,81 | 25,18 |

Dalle tre analisi eudiometriche precedenti, facendo il volume del gas = 1, risulta:

| | trovato | | | calcolato per $C_3H_8$ |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | |
| Gas impiegato . . . . . . | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Ossigeno consumato . . . . | 4,75 | 5,05 | 4,81 | 5 |
| Ossigeno cons. per form. di $CO_2$ | 2,94 | 2,85 | 2,85 | 3 |
| Ossigeno cons. per form. d'$H_2O$ | 1,8 | 2,19 | 1,97 | 2 |

Siccome la quantità di gas ottenuto non corrispondeva alla quantità di prodotto intermedio impiegato, e tanto più che questo stesso prodotto non mi aveva dato dei risultati analitici soddisfacenti, volli tentarne una nuova preparazione, cercando di evitare anche di più, se era possibile, l'azione dell'umidità dell'aria e delle tracce di acqua che l'alcool poteva contenere.

Nella mescolanza, mantenuta fredda, di gr. 5 di metilpropilchetone (1 molècola) e di gr. 11,5 di cianacetato di metile (2 molecole), feci passare ammoniaca gassosa e ben secca, operando nel modo sopradescritto, ma servendomi di alcool assoluto ridistillato recentemente sulla calce, dibattendo il prodotto con quest'alcool in un cilindro asciutto e chiuso, scaldando moderatamente nelle cristallizzazioni, ripetendo le cristallizzazioni il meno possibile e raccogliendo il prodotto in fretta.

Ottenni così un prodotto leggermente colorato in roseo che fu disseccato sull'acido solforico a pressione ridotta, che a 80° svolgeva ammoniaca e che fondeva male fra 180° e 190°.

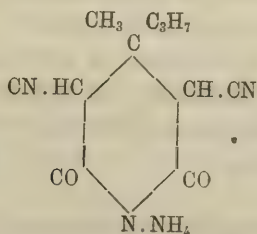
Il prodotto asciutto pesava gr. 5. All'analisi diede i seguenti risultati:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I | gr. 0,1122 di sostanza | diedero | gr. 0,2284 di $CO_2$ ; | gr. 0,0730 di $H_2O$ |
| II | „ 0,1112 „ | „ | „ 0,2278 „ ; | „ 0,0675 „ |
| III | „ 0,1349 „ | „ | cc. 27,5 di N a 13°,5 | e 748 mm. |
| IV | „ 0,1072 „ | „ | „ 22,3 „ „ 13° | „ 747 „ |

da cui, per cento:

| | trovato | | | | calcolato per |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | $C_{11}H_{16}N_4O_2$ |
| C = | 55,5 | 55,8 | — | — | 55,93 |
| H = | 7,2 | 6,74 | — | — | 6,77 |
| N = | — | — | 23,45 | 23,9 | 23,72 |

Questo prodotto corrisponde, dunque, alla formula calcolata per il sale di ammonio della β-β'-dician-γ-metilpropilglutarimide.

```
       CH3  C3H7
          C
         / \
CN.HC  /     \ CH.CN
      |       |
      |       |
      |       |
   CO  \     / CO
         \ /
        N.NH4
```

Anche questa porzione con acqua sviluppa gas, ma non quanto ne corrisponde al calcolato e in quantità press'a poco uguale a quella fornita dal prodotto della prima preparazione.

Era anche importante vedere se a questo prodotto intermedio corrispondesse un sale d'argento. In un primo saggio ottenni un sale che si mostrò per il sale d'argento della β-β'-dician-γ-metilglutaconimide.

Infatti:

I gr. 0,2262 di sale d'Ag diedero gr. 0,0873 di Ag
II „ 0,1584 „ „ „ cc. 22,8 di N a 25° e 742 mm.

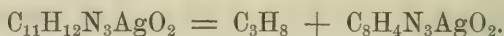
da cui, per cento:

| | trovato | | calcolato per $C_8H_4N_3AgO_2$ |
|---|---|---|---|
| | I | II | |
| Ag = | 38,59 | — | 38,3 |
| N = | — | 15,51 | 14,84 |

mentre per $C_{11}H_{12}N_3AgO_2$ si calcolerebbe:

$$Ag\ \% = 33,13$$
$$N\ \% = 12,8.$$

Questo fatto poteva far pensare ad una facile decomposizione del sale d'argento $C_{11}H_{12}N_3AgO_2$, nel modo seguente:

$$C_{11}H_{12}N_3AgO_2 = C_3H_8 + C_8H_4N_3AgO_2.$$

Volli quindi ripeterne la preparazione con alcool il più possibilmente puro ed in condizioni migliori.

Disciolsi gr. 0,5 di sostanze in alcool (distillato sul sodio) a freddo, e trattai la soluzione con una soluzione fatta pure a freddo di nitrato d'argento nell'alcool assoluto (distillato pure sul sodio), avendo cura che i recipienti fossero previamente disseccati.

Ebbi così un precipitato abbondante che raccolsi in fretta alla pompa, lavai con alcool assoluto, e tenni sull'acido solforico, a pressione ridotta, fino a peso costante.

Anche operando con queste precauzioni ebbi un sale che mi dimostrò una notevole decomposizione. Infatti:

gr. 0,0808 di sale d'Ag diedero gr. 0,0290 di argento, da cui:

| | trovato | calcolato per $C_{11}H_{12}N_3AgO_2$; | per $C_8H_4N_3AgO_2$ |
|---|---|---|---|
| Ag % = | 35,9 | 33,1 | 38,3 |

Resta con ciò provato:

I. Che per azione dell'etere cianacetico e dell'ammoniaca sul metilpropilchetone, si ottiene in un primo periodo un prodotto della costituzione seguente:

```
          CH3  C3H7                                   CH3  C3H7
             C                                           C
           /   \                                       /   \
CN . CH /         \ CH . CN              CN . CH /         \ CH . CN
       |           |           o, meglio        |           |
       |           |                            |           |
       |           |                            |           |
    CO \         / CO                    H4N . CO \\       / CO
          \     /                                    \\   /
          N . NH4                                      N
```

che può considerarsi come il sale di ammonio della β-β'-dician-γ-metilpropilglutarimide.

II. Che questo prodotto è poco stabile e per contatto dell'acqua dà il sale di ammonio della β-β'-dician-γ-metilglutaconimide, mentre sviluppa un gas combustibile.

III. Che questo gas è *propano* $C^3H^8$.

Torino. Laboratorio di chimica farmaceutica e tossicologica della R. Università. Gennaio 1898.

---

# *La rifrazione astronomica calcolata in base alla ipotesi di Mendeleef sulla distribuzione verticale della temperatura nell'aria;*

Nota del Prof. PAOLO PIZZETTI.

1. — La teoria della rifrazione astronomica di Bessel si fonda, come ognun sa, sulla ipotesi che la legge di variazione della temperatura dell'aria secondo l'altezza possa esprimersi colla formola

$$\frac{1+\epsilon t}{1+\epsilon t_0} = e^{-k\frac{h}{a+h}} \tag{1}$$

dove $t_0$ è la temperatura dell'aria in un punto della superficie terrestre, $t$ la temperatura nel punto che sovrasta al primo della quantità $h$, $a$ il raggio medio della terra, $\epsilon$ il coefficiente di dilatazione dell'aria, $k$ una costante. Dalla (1) il BESSEL dedusse per la legge di variazione della densità atmosferica $\rho$ secondo l'altezza quella stessa formola

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\beta \frac{h}{a+h}} \tag{2}$$

che avea servito di fondamento alla teoria di KRAMP e di LAPLACE. La quantità $\beta$ fu da BESSEL determinata in guisa che le rifrazioni date dalla formola teorica si scostassero il meno possibile da quelle effettivamente osservate: egli ottenne così: $\beta = 745{,}7$, per una temperatura $t_0 = 9^\circ{,}3$ C.

Quando si adotti questo valore per la $\beta$, la teoria della rifrazione fondata sulla (1) può dirsi soddisfacente, in quanto le rifrazioni calcolate si accordano assai bene (almeno per le distanze zenitali non superiori a 85°) con quelle dedotte da osservazioni astronomiche. Ma essa offre tuttavia l'inconveniente di contraddire in modo troppo evidente coi dati dell' osservazione per quel che riguarda la legge di decremento della temperatura secondo l'altezza.

Infatti, sia partendo dalla (1) sia dalla (2), è facile vedere che per $h = 0$

$$\left(\frac{dt}{dh}\right)_0 = -\frac{k(1+\epsilon t_0)}{a\epsilon} = \frac{1+\epsilon t_0}{\epsilon}\left(\frac{g_0 \rho_0}{p_0} - \frac{\beta}{a}\right) \tag{2'}$$

dove $p_0$ è la pressione, $g_0$ la gravità a livello del suolo. Traducendo la (2′) in numeri, si ottiene una diminuzione di temperatura di 1° C. per ogni 815 metri di elevazione, quando, $t_0 = 10^\circ$ circa; risultato, come ognun sa, troppo lontano dai dati di qualunque sorta di osservazioni.

È ben vero che facendo variare la quantità $\beta$, le rifrazioni calcolate secondo la teoria Besseliana subiscono variazioni molto piccole, tanto che si può dire che le rifrazioni osservate non ci porgono un preciso indizio sulla velocità di variazione della temperatura secondo la verticale. Ma tuttavia se si volesse assegnare a $\beta$ un tale valore, che sostituito nella (2′) verificasse,

p. es., quella velocità di variazione che fu osservata da Gay-Lussac nella sua ascensione ben nota (1° C. ogni 173$^m$) le rifrazioni calcolate colla formola di Bessel resterebbero alterate di tanto da non accordarsi più abbastanza bene colle rifrazioni osservate. Infatti bisognerebbe porre $\beta = 639$ circa (per $t_0 = 9°,3$); il che porterebbe ad alterare la rifrazione media di circa 8″ per la distanza zenitale di 85° e di 3′ circa per quella di 90°. Si uscirebbe così da quei limiti entro i quali possono oscillare le rifrazioni osservate.

Si potrebbe, è vero, ristabilire l'accordo, per le distanze zenitali superiori a 80°, alterando anche l'altra costante della teoria Besselliana, quella costante che si indica di solito colla lettera $\alpha$. Ma allora le rifrazioni corrispondenti alle piccole distanze zenitali (per le quali è quasi insensibile l'influenza della $\beta$) resterebbero alla loro volta troppo fortemente alterate. Se poi si osserva che il passaggio dalla (1) alla (2) non è che approssimato, e se si tien conto del termine di correzione proposto a tal riguardo dal Gylden (*), si trova che, per stabilire l'accordo fra la teoria e l'osservazione, occorrerebbe dare a $k$ un valore molto più piccolo di quello determinato da Bessel, il che è quanto dire render ancor più piccola la velocità di diminuzione della temperatura.

Un altro inconveniente presenta la teoria di Bessel ed è che il rapporto di diminuzione della temperatura risulta pressochè indipendente dalla temperatura iniziale $t_0$, mentre al contrario vi hanno ragioni sì teoriche che empiriche per ammettere che la temperatura diminuisca molto più rapidamente coll'altezza, quando più grande è il suo valore iniziale.

Poichè la teoria di Bessel non soddisfa, almeno nelle ipotesi fondamentali, ai dati dell'osservazione, non è inutile ricercare in qualche altra maniera se si possa stabilire una teoria della rifrazione, la quale non contraddica troppo sensibilmente nè alle rifrazioni osservate, nè a quella legge di distribuzione della temperatura, che almeno in prossimità della superficie terrestre ci è dato di osservare.

Ho tentato una tale ricerca partendo da una relazione em-

---

(*) “ Astr. Nachr. „ Bd. 100, pag. 53.

pirica fra temperatura e pressione atmosferica stabilita dal MENDELEEF in una memoria pubblicata negli " Archives des Sciences Physiques et naturelles „ di Ginevra nel 1876.

2. — MENDELEEF (*) discutendo i risultati delle osservazioni termometriche e barometriche eseguite da GLAISHER nelle sue ascensioni aerostatiche compiute dal 1850 al 1870, ha creduto di poter stabilire fra la temperatura $t$ e la pressione $p$ in un punto dell'atmosfera, sopra una data verticale, la relazione lineare

$$t = a + bp.$$

È questa una relazione empirica, sì, ma che presenta di fronte a tutte le altre che furono proposte nello studio della costituzione atmosferica, il grande vantaggio di legare fra loro soltanto *quantità direttamente osservate.*

Alla costante $a$ il MENDELEEF ritiene potersi assegnare il valore $-36^o$. Quanto alla $b$ essa può essere eliminata, se si conoscono la temperatura $t_0$ e la pressione $p_0$ alla superficie del suolo, sulla stessa verticale: si ha così (**)

$$t = -36^o + \frac{p}{p_0}(t_0 + 36)$$

formola, che, per comodità di scrittura, useremo sotto la forma (***)

$$t = -\tau + \frac{p}{p_0}(t_0 + \tau). \tag{3}$$

---

(*) *De la température des couches supérieures de l'atmosphère* (" Archives des Sc. phys. et naturelles „, Genève, 15 mars 1876).

(**) In seguito a ulteriori ricerche di HANN, WOEIKOF, ANGOT, sembra doversi attribuire alla costante $a$ un valore assoluto alquanto superiore. Noi conserviamo il valore dato da MENDELEEF, sembrandoci interessante non introdurre nei nostri calcoli alcun dato che non sia dedotto da osservazioni aerostatiche.

(***) Partendo da considerazioni teoriche intorno all'equilibrio termico di un elemento qualunque dell'aria, il DE MARCHI nella sua opera: *Le cause dell'êra glaciale*, ha ottenuta, per la temperatura dell' aria, una formola la quale, egli osserva, si identifica colla (3) quando si ammetta che la temperatura dell'aria, presso terra sia poco diversa da quella del suolo, e che le frazioni di calore radiante che sono assorbite dagli strati d'aria inferiore e superiore all'elemento considerato siano proporzionali ai pesi delle colonne d'aria, rispettivamente, sottostante e sovrastante all'elemento stesso.

Chiamiamo $\rho$, $\rho_0$ le densità dell'aria corrispondenti alle pressioni rispettive $p$, $p_0$ e alle temperature $t$, $t_0$. Fatta astrazione dal vapore acqueo ed ammesse le leggi di MARIOTTE e di GAY-LUSSAC, possiamo scrivere,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \frac{1+\epsilon t_0}{1+\epsilon t} \tag{4}$$

ed, eliminando la (1) per mezzo della (3) e ponendo

$$B = \frac{\epsilon(t_0+\tau)}{1+\epsilon t_0} \tag{I}$$

otteniamo

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0(1-B)+pB} . \tag{5}$$

D'altra parte, se chiamiamo $h$ l'altezza del punto $P(\rho, p, t)$ sovra il punto $P_0(\rho_0, p_0, t_0)$ che supporremo situato sulla superficie terrestre nella stessa verticale di P, abbiamo la nota relazione differenziale

$$dp = -g \cdot \rho \cdot dh \tag{6}$$

dove $g$ è la accelerazione della gravità in P, la quale può esprimersi con $g_0 \frac{a^2}{(a+h)^2}$, detta $g_0$ la gravità in $P_0$.

Se si pone

$$\frac{a}{a+h} = 1 - s$$

la (6) diviene

$$dp = -g_0 \, a \, \rho \, ds$$

e, sostituendo per $\rho$ l'espressione (5), e integrando poi da 0 ad $s$

$$(1-B) \log \frac{p}{p_0} + B \frac{p-p_0}{p_0} = -\frac{a}{l} s \tag{7}$$

dove, secondo la notazione di BESSEL, abbiamo posto

$$l = \frac{p_0}{g_0 \rho_0}$$

ossia abbiamo chiamato $l$ l'altezza di una colonna di aria omogenea di densità $\rho_0$ capace di produrre la pressione $p_0$ alla sua base, supposta la gravità uguale a $g_0$ ovunque.

La (7) darebbe la formola della livellazione barometrica corrispondente all'ipotesi di Mendeleef, quando si facesse astrazione dalla umidità atmosferica.

Ricavando $\rho$ dalla (5) e sostituendo nella (7) abbiamo la relazione fra la densità e l'altezza

$$(9)\quad \log\frac{\rho}{\rho_0} - \log\left(1 - B\frac{\rho}{\rho_0}\right) + \log(1-B) + \frac{B}{1-B}\,\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0 - B\rho} = -\frac{a\,.\,s}{l(1-B)}.$$

Chiameremo $\gamma$ il coefficiente di $-s$ nel 2° membro; ossia porremo

$$(\text{II})\qquad \gamma = \frac{a}{l(1-B)} = \frac{a(1+\epsilon t_0)}{l(1-\epsilon\tau)} = \frac{a}{l_0(1-\epsilon\tau)}\,,$$

dove $l_0$ è il valore di $l$ che corrisponde alla temperatura di 0°C.

$$l_0 = 0^{\text{m}},76 \times \frac{13596}{1,29305} = 7991^{\text{m}},0.$$

La $\gamma$, nel calcolo che segue, corrisponde, dal punto di vista analitico, alla costante $\beta$ della teoria di Bessel; ma importa osservare che, mentre quest'ultima varia al variare della temperatura iniziale $t_0$, la $\gamma$ è invece da essa indipendente.

Porremo dunque la (9) sotto la forma

$$(10)\qquad \log\frac{\rho}{\rho_0} = -\gamma(s-\varphi)$$

dove

$$(11)\qquad \gamma\varphi = \log\left(1 - B\frac{\rho}{\rho_0}\right) - \log(1-B) + \frac{B}{1-B}\,\frac{{}_0-\rho}{\rho_0 - B\rho}$$

$$= \sum_1^{\infty} \frac{n+1}{n} B^n \left(1 - \frac{\rho^n}{\rho_0{}^n}\right).$$

Qualora si volesse esprimere, esplicitamente, la $\rho$ in funzione di $s$, basterebbe risolvere, per successive approssimazioni,

la (10) rispetto a ρ. Si otterrebbe così una espressione in serie, della quale i primi termini sono

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\gamma s} \left\{ 1 + 2B(1 - e^{-\gamma s}) + \frac{1}{2} B^2 (1 - e^{-\gamma s})(7 - 9 e^{-\gamma s}) \ldots \right\}.$$

Ma a noi converrà piuttosto applicare, senz'altro, la (10).

3. — Prima di procedere cerchiamo quale sia, in prossimità del suolo, la velocità di variazione della temperatura coll'altezza, che corrisponde all'ipotesi di MENDELEEF. Abbiamo

$$\frac{dt}{dh} = \frac{dt}{dp} \frac{dp}{dh} = - g\rho \frac{t_0 + \tau}{p_0}$$

e per $h = 0$

$$\left(\frac{dt}{dh}\right)_0 = - \frac{t_0 + \tau}{l} = - \frac{t_0 + \tau}{l_0 (1 + \epsilon t_0)}.$$

Posto $\tau = 36^\circ$, $l_0 = 7991^m$, si hanno i seguenti valori del numero di metri di dislivello corrispondenti a un grado cent.e di diminuzione di temperatura (*)

| | |
|---|---|
| per $t_0 = -10^\circ$ . . . | 307 metri |
| $0^\circ$ . . . . . . . | 222 „ |
| $10^\circ$ . . . . . . . | 174 „ |
| $20^\circ$ . . . . . . . | 150 „ |
| $30^\circ$ . . . . . . . | 134 „ |

Questi risultati variano di poco, se si tien conto della umidità dell'aria (**).

È poi facile dimostrare, calcolando le derivate $\frac{dp}{dh}$, $\frac{dt}{dh}$ per un valor qualunque di $h$, che la pressione e la temperatura

(*) Lo SIACCI (" Memorie Accad. Scienze di Napoli „, 1897) dalla discussione delle osservazioni di GLAISHER deduce che l'innalzamento necessario per passare dalla temperatura di 0° C. a quella di —1° è 193m,24.

(**) Se, per una data temperatura, e per l'aria secca la costante $l$ ha il valore $l_s$, quando la tensione del vapore è $f$, la $l$ diventa, alla stessa temperatura: $l_s\left(1 - 0{,}377 \frac{f}{p}\right)$.

decrescono continuamente coll'altezza e che i valori assoluti di quelle derivate diminuiscono al crescere di $s$, il che è quanto dire che le velocità di decremento della pressione e della temperatura vanno diminuendo coll'altezza.

4. — Nella ipotesi che l'atmosfera sia costituita da strati sferici omogenei, concentrici alla superficie terrestre, la flessione infinitesima della trajettoria luminosa, nel passaggio dallo strato il cui indice di rifrazione è $\mu$, in quello nel quale l'indice è $\mu + d\mu$, è espressa notoriamente da:

$$(12) \qquad d\mathrm{R} = - \frac{(1-s)\,\mathrm{sen}\,\zeta\,.\,d\mu}{\mu\sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} - (1-s)^2\,\mathrm{sen}^2\zeta}}$$

dove $\zeta$ è la distanza zenitale apparente, ossia l'angolo che la trajettoria luminosa fa colla verticale del punto in cui essa incontra la terra, $\mu_0$ è l'indice in questo stesso punto. Con $a+h$ è indicato il raggio della sfera d'indice $\mu$ e, come precedentemente, si è posto

$$s = \frac{h}{a+h}\,.$$

Poniamo, con Bessel

$$\mu^2 = 1 + c\rho \qquad\qquad 2\alpha = \frac{c\rho_0}{1+c\rho_0}$$

e scriviamo pure, per semplicità:

$$\rho = \rho_0\, e^{-\gamma t}$$

dove sarà, per la formola (10):

$$(13) \qquad t = s - \varphi = s - \frac{1}{\gamma}\sum_{1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\,\mathrm{B}^n\,(1 - e^{-n\gamma t}).$$

La (12) potrà scriversi

$$(14) \qquad d\mathrm{R} = \frac{\alpha\gamma\,\mathrm{sen}\,\zeta(1-s)\,e^{-\gamma t}\,dt}{[1-2\alpha(1-e^{-\gamma t})]\sqrt{\cos^2\zeta - 2\alpha(1-e^{-\gamma t}) + (2s-s^2)\,\mathrm{sen}^2\zeta}}\,.$$

La rifrazione R, corrispondente alla distanza zenitale $\zeta$, si otterrebbe integrando la (14) fra i limiti 0 ed 1 rispetto alla variabile $s$. Ma poichè quegli elementi dell'integrale, i quali hanno effettiva influenza sensibile nel calcolo della rifrazione, corrispondono alle regioni dell'atmosfera terrestre ove la densità ha valori non troppo piccoli, corrispondono cioè a valori piccolissimi di $s$, così è lecito estendere l'integrazione a tutti i valori di $s$ da *zero* ad $\infty$; e quindi fra gli stessi limiti si può eseguire l'integrazione rispetto alla variabile $t$ (*). Per la stessa ragione si può, seguendo l'esempio di Bessel, trascurare, sotto il segno radicale, il termine $s^2$ di fronte a $2s$, porre nel numeratore l'unità al posto di $1-s$, e pel divisore $1-2\alpha(1-e^{-\gamma t})$, che differisce sempre estremamente poco dall'unità, sostituire il valor medio fra i due estremi, porre cioè $1-\alpha$. Con queste semplificazioni, e, tenendo presente la (13), la (14) integrata dà

$$(15) \qquad R = \frac{\alpha\gamma \,.\, \mathrm{sen}\,\zeta}{1-\alpha}\int_0^\infty \frac{e^{-\gamma t}\,dt}{\sqrt{\cos^2\zeta + 2(t+\varphi)\,\mathrm{sen}^2\zeta - 2\alpha(1-e^{-\gamma t})}}\,.$$

Non è difficile valutare, per serie, l'integrale collo stesso metodo che si tiene nella ordinaria teoria della rifrazione. Poniamo

$$t = z - \varphi + \frac{\alpha}{\mathrm{sen}^2\zeta}(1-e^{-\gamma t})$$

$$e^{-\gamma t} = \tau, \qquad e^{-\gamma z} = \xi,$$

$$\gamma\varphi - \frac{\alpha\gamma}{\mathrm{sen}^2\zeta}(1-e^{-\gamma t}) = \log f(\tau).$$

Si avrà allora

$$\tau = \xi f(\tau)$$

e quindi, mediante un noto sviluppo di Lagrange,

$$(16) \qquad \tau = C_1\xi + C_2\xi^2 + \ldots + C_n\xi^n + \ldots$$

---

(*) È assai facile dimostrare che l'integrale del 2° membro della (12) preso da $t=0{,}01$ fino a $t=\infty$ ha un valore assolutamente trascurabile nel calcolo numerico della refrazione

dove

$$C_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} [\{f(\tau)\}^n]_{\tau=0} .$$

Poniamo ancora

$$\text{(III)} \qquad A = \log \frac{1}{1-B} + \frac{B}{1-B} - \frac{\alpha\gamma}{\operatorname{sen}^2 \zeta}$$

$$\text{(IV)} \qquad A' = 2B - \frac{\alpha\gamma}{\operatorname{sen}^2 \zeta} = A - \frac{3}{2} B^2 - \frac{4}{3} B^3 - \ldots ;$$

avremo

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} C_1 = e^A \qquad C_2 = - A' e^{2A} \\ C_3 = - \frac{3}{2} e^{3A} (B^2 - A'^2) \\ C_4 = - \frac{4}{3} e^{4A} (B^3 - \frac{9}{2} B^2 A' + 2A'^3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

D'altra parte la (16) può scriversi

$$e^{-\gamma t} = C_1 e^{-\gamma z} + C_2 e^{-2\gamma z} + \ldots + C_n e^{-n\gamma z} + \ldots$$

Differenziando ambi i membri, e sostituendo nella (15). questa diventa

$$R = \frac{\alpha\gamma \operatorname{sen} \zeta}{1-\alpha} \sum_1^\infty C_n \int_0^\infty \frac{e^{-n\gamma z}}{\sqrt{\cos^2 \zeta + 2z \operatorname{sen}^2 \zeta}} n dz.$$

Trasformando l'integrale con noti metodi, si ottiene

$$\text{(VII)} \qquad R = \frac{\alpha\sqrt{2\gamma}}{1-\alpha} \sum_1^\infty C_n \sqrt{n} \,.\, \psi(T_n)$$

dove

$$\text{(VI)} \qquad T_n = \operatorname{cotg} \zeta \sqrt{\frac{n\gamma}{2}} \qquad \psi(T) = e^{T^2} \int_T^\infty e^{-x^2} dx.$$

I valori della $\psi(T)$ si deducono comodamente dalle tavole di KRAMP e di BESSEL (*), ovvero per valori abbastanza grandi di T, collo sviluppo

$$\psi(T) = \frac{1}{2T}\left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{(2T^2)^2} + \ldots\right).$$

Le formole che servono al calcolo della refrazione sono dunque le (I) (II) (III) (IV) (V) (VI) (VII).

Per distanze zenitali al di sotto di 45° si può, senza errore sensibile, sostituire alla (VII) una formola più semplice che si ottiene ponendo, in via d'approssimazione, nel radicale della (15) al posto della piccola quantità

$$2\varphi \operatorname{sen}^2\zeta - 2\alpha(1 - e^{-\gamma t})$$

il medio fra i due valori che essa assume pei valori estremi di $t$. Un tal valor medio è

$$\frac{\operatorname{sen}^2\zeta}{\gamma}\left(\log\frac{1}{1-B} + \frac{B}{1-B}\right) - \alpha$$

o prossimamente,

$$\frac{2B}{\gamma}\operatorname{sen}^2\zeta - \alpha.$$

Allora la (15) integrata dà

$$R = \frac{\alpha\sqrt{2\gamma}}{1-\alpha}\psi(T)$$

dove

$$T = \frac{1}{\operatorname{sen}\zeta}\sqrt{\frac{\gamma}{2}\left(\cos^2\zeta - \alpha + \frac{2B}{\gamma}\operatorname{sen}^2\zeta\right)}.$$

5. — Ho posto a confronto la formola (1) coi risultati di talune di quelle celebri osservazioni di BRADLEY, delle quali fece uso BESSEL nelle sue ricerche sulla rifrazione. Delle 71 osser-

(*) Vedi BESSEL, " Abhandlungen herausg. von R. Engelmann ,, I Band, pag. 106-7.

vazioni riportate da BESSEL (ordinate secondo i valori decrescenti della $\zeta$), nella sua Memoria " Einige Resultate aus Bradley's Beobachtungen „ (*) ho scelta la 1ª, la 11ª, e così di dieci in dieci fino all'ultima e queste ho sottoposto a calcolo. Per la costante $\alpha$, in corrispondenza alla temperatura 9°,3 C. e pressione 29,6 pollici inglesi ho assunto dapprima il valor approssimato corrispondente a

$$\log.\,\mathrm{dec}.\,\alpha = 6,44500 - 10.$$

Per una temperatura $t_0$ e una pressione $p_0$ qualsiasi si ha allora con sufficiente precisione

$$\log\alpha = 6,44500 + \log\frac{p_0}{29,6} + \log\{1 - \epsilon(t_0 - 9°,3)\}.$$

I valori dei due termini di correzione nel 2° membro si traggono comodamente dalle tavole di BESSEL, nelle quali esse figurano sotto il nome di $\log B$, $\log\gamma$ rispettivamente. Quanto alla costante $\gamma$, data dalla formola (II), ad essa ho attribuito il valore il cui logaritmo è

$$\log\ \mathrm{dec}\,\gamma = 2,96316$$

ponendo nella (II) $l_0 = 7991$, $\tau = 36$, $a = 6373000$ m. (raggio di curvatura del meridiano di Greenwich; è appunto il valore di $a$ usato da BESSEL).

Così ho potuto calcolare, per ogni osservazione, la quantità che moltiplica $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ nel 2° membro della (VII), riserbandomi di determinare poi $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ in guisa che le osservazioni di BRADLEY restassero, quant'è possibile, soddisfatte, senza che tuttavia le rifrazioni relative alle piccole distanze zenitali riescissero di troppo diverse da quelle calcolate colle tavole di BESSEL, le quali, com'è noto, dànno errori estremamente piccoli fino a $\zeta = 45°$.

(*) BESSEL, " Abhandlungen „, I Bd., s. 223-4. Alle temperature ivi segnate ho fatta la correzione indicata da Bessel: — 1°,25 F.

Ecco i risultati del calcolo numerico:

| Z app.e | $t_0$ | $p_0$ | Rifrazione | | Osserv. — calc. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | osservata | calcolata | form. VII | Bessel |
| 89°.27'.12" | 36,5 F | 30,p11 | 30'.3",5 | 29'.54";8 | + 8",7 | —39",3 |
| 88.39.47 | 31,25 | 29,5 | 22.55,8 | 22.55,0 | + 0,3 | — 19,2 |
| 87.33. 6 | 32,25 | 30,15 | 17.12,7 | 17.15,6 | — 2,9 | — 6,2 |
| 87.23.56 | 54,75 | 29,88 | 15.24,8 | 15.33,6 | — 8,8 | — 7,3 |
| 87. 8.55 | 51,75 | 30,10 | 14.51,5 | 14.53,0 | — 1,5 | — 1,5 |
| 82.41. 0 | 63,43 | 29,6 | 6.47,8 | 6.50,4 | — 2,6 | + 0,6 |
| 77.14. 0 | 33,12 | " | 4.18,2 | 4.17,4 | + 0,8 | + 0,8 |
| 70.41.41 | 34,0 | " | 2.49,1 | 2.48,2 | + 0,9 | + 0,8 |

Il valore di $\alpha$ che dà luogo ai numeri della 5ª colonna è, per $t_0 = 9°,3$ C. e $p_0 = 29^p,6$:

$$\alpha_0 = 0,0002800$$

(ovvero, in secondi d'arco: $\alpha_0 = 57'',81$) alquanto superiore a quello di Bessel ($\alpha = 0,0002750$, ossia $57'',54$) (*).

Con questo valore di $\alpha$ calcolando le rifrazioni relative alle distanze zenitali minori di 70° si ottengono i seguenti scostamenti rispetto ai valori forniti dalle tavole Besseliane

| Z | 60° | 50° | 45° | 30° | 15° |
|---|---|---|---|---|---|
| scostamenti | — 0",07 | + 0",19 | + 0",09 | + 0",05 | + 0",04 |

(*) Assumendo come indice di rifrazione per l'aria secca a 0° e 760mm il valore 1,0002946 (Roiti, *Elementi di fisica*, II, p. 116), si avrebbe $\alpha = 0,0002945$. E per la temperatura 9°,3 C. e pressione 29°,6 sarebbe $\alpha_0 = 0,0002817$. Il nostro valore di $\alpha_0$ si avvicina a questo di più che quello di Bessel.

(gli scostamenti sono positivi quando la formola VIII dà risultato maggiore che la teoria di Bessel).

Per quanto sia assai probabile che, facendo un maggior numero di raffronti della formola (VII) con le rifrazioni osservate, si abbiano ad ottenere scostamenti alquanto maggiori di quelli indicati nella colonna 6ª della precedente tabella, e per quanto il valore di $\alpha$ qui trovato sia assolutamente provvisorio, pure ci sembra ragionevole concludere che la (VII) non offre rispetto ai risultati dell'osservazione disaccordi più forti di quello che la teoria di Bessel. E si noti che le costanti $\alpha$ e $\beta$ del metodo di Bessel sono entrambe valutate a posteriori, in modo da soddisfare il meglio possibile alle rifrazioni osservate. Nei nostri calcoli invece la sola $\alpha$ è stata adattata alle esigenze delle osservazioni di Bradley, mentre la $\gamma$ (che corrisponde, in certa guisa, alla $\beta$ di Bessel) è stata assegnata a priori in base al valore di $\tau$ dato dal Mendeleef. Così la relazione stabilita dal Mendeleef è stata qui usufruita tal quale, non solo nella sua forma analitica ma anche con quel valore della costante che risultava da pure osservazioni dirette.

---

## Relazione sulla Memoria dell'Ing. Elia Ovazza, avente per titolo:

## *Calcolo grafico delle travi elastiche sollecitate a flessione e taglio.*

---

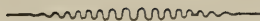
Col progredire della *teoria dell'elasticità e resistenza dei materiali* applicata alle scienze dell'ingegnere si è inteso il bisogno, nella teoria delle travi sollecitate a flessione e taglio, di prendere in considerazione anche le deformazioni prodotte dagli sforzi di taglio, che per lo addietro venivano generalmente trascurate rispetto a quelle prodotte dai momenti flettenti, come pure di tener conto della variazione della sezione trasversale della trave. A questo scopo furon già proposti dai moderni trattatisti vari metodi rigorosi di calcolo, ciò nondimeno merita di essere preso in considerazione quello nuovo ideato dal signor Ovazza.

L'Autore nella presente Memoria ricava da prima elegantemente, applicando il metodo dei lavori virtuali, l'equazione rigorosa dell'asse deformato della trave, e pone bene in evidenza come, allorquando non si trascurino le deformazioni prodotte dal taglio, il detto asse presenti in corrispondenza d'ogni forza concentrata una discontinuità di prim'ordine, cioè un punto angoloso. Passa poi alla trattazione delle travi staticamente indeterminate ad una o più campate, ed, avendo dimostrato che la rotazione delle sezioni trasversali della trave dipende esclusivamente dal momento flettente, fa vedere come la classica trattazione grafica ideata dal Mohr, e perfezionata dal Culmann e dal Ritter sia ancora applicabile alla determinazione dei momenti sugli appoggi quando non si trascurano le deformazioni prodotte dal taglio, purchè si aggiungano ai dislivelli reali degli appoggi certi altri dislivelli ideali il cui effetto, per quanto riguarda la determinazione dei momenti suddetti, equivalga a quello dovuto alle deformazioni prodotte dal taglio. La soluzione del problema si fa dipendere dalla ricerca dei punti uniti, a distanza finita, di certe punteggiate simili sovrapposte. Da ultimo l'Autore indica come il metodo possa estendersi anche al caso di una trave a sezione variabile.

Per la novità del metodo, per la sua relativa semplicità e per l'importanza pratica che esso eventualmente potrà acquistare in varî quesiti d'ingegneria la vostra Commissione propone che il lavoro dell'ing. Ovazza venga letto.

VITO VOLTERRA.
C. GUIDI, *relatore.*

---

*L'Accademico Segretario*
ANDREA NACCARI.

# CLASSI UNITE

## Adunanza del 9 Gennaio 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

Della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Cossa, Vice Presidente, D'Ovidio, Direttore della Classe, Salvadori, Berruti, Mosso, Naccari, Spezia, Camerano, Segre, Peano, Volterra, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti.

Della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Claretta, Direttore della Classe, Peyron, Rossi, Bollati di Saint-Pierre, Pezzi, Ferrero, Cognetti de Martiis, Graf, Boselli, Cipolla, Brusa, Perrero, Allievo e Nani, Segretario.

Letto ed approvato il verbale dell'ultima adunanza delle Classi Unite, 2 gennaio 1898, il Presidente inaugura la seduta mandando un reverente saluto alla memoria del Gran Re, fondatore dell'unità nazionale, della cui morte ricorre oggi il vigesimo anniversario.

Si procede quindi alla votazione per il conferimento del decimo premio Bressa. Il premio viene conferito al Dott. Giuseppe Pitré.

Si addiviene in conformità dell'art. 1° del Regolamento interno per il conferimento del premio Bressa alla nomina della 1ª Giunta per l'assegnazione di tal premio pel quadriennio 1895-1898.

Per ultimo si procede alla elezione del Presidente dell'Accademia per il prossimo triennio e viene confermato, salva l'approvazione sovrana, in tale carica l'attuale Presidente Prof. Giuseppe CARLE.

# CLASSE
DI
# SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

---

## Adunanza del 9 Gennaio 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

---

Sono presenti i Socii: Claretta, Direttore della Classe, Peyron, Rossi, Bollati di Saint-Pierre, Pezzi, Ferrero, Cognetti de Martiis, Graf, Boselli, Cipolla, Brusa, Perrero, Allievo e Nani, Segretario.

Il Socio E. Ferrero offre in omaggio alla Classe, a nome dell'Autore, sig. Héron de Villefosse dell'Istituto e Conservatore del Museo nazionale del Louvre, un opuscolo intitolato: *Diplôme militaire de l'année 139 découvert en Syrie.*

Il Socio C. Cipolla presenta per l' inserzione negli *Atti* due note:

1° *Il Sacramentario Veronese e Scipione Maffei,* del sac. Antonio Spagnolo;

2° *Il codice Vallicelliano C. III. Contributo allo studio delle dottrine religiose di Claudio, vescovo di Torino,* del Dott. Prof. Giuseppe Boffito.

# LETTURE

## *Il Sacramentario Veronese e Scipione Maffei;*

Nota del Sac. ANTONIO SPAGNOLO.

Nell'Ottobre (1) dell' anno 1713 (2), per merito precipuo dell'illustre Scipione Maffei, venivano scoperti in un ripostiglio dell'antica Cancelleria dei Canonici di Verona, i preziosi Codici, che la Capitolare biblioteca quasi da un secolo piangeva come perduti.

Il Capitolo riconoscente per sì grande servigio, dava piena facoltà al giovane scienziato, di studiare i mss. ritrovati, di usarne per le sue opere, anzi di portarsene molti a casa (3).

Egli stesso racconta (4) come lo colpì subito un codice antichissimo di scrittura quadrata, contenente bellissime orazioni e prefazi, e gli balenasse l'idea di illustrarlo (5). Ne dava intanto notizia al pubblico. Disputando nel 1716 con il ch. Plaff sopra alcuni frammenti greci e intorno il mistero dell'Eucaristia, così esprimevasi: *In un prezioso e antichissimo Sacramentario del nostro Capitolo Canonicale, scritto in carattere maiuscolo e ricco di bellissime orazioni inedite, questa si legge: Remotis obumbrationibus* ecct. (6).

Ebbe cura di farlo trascrivere diligentemente, dettandolo in gran parte egli stesso, con la speranza di inserirlo nella rac-

(1) Così apparisce da una nota autografa del Maffei, *Ms. Maff.*, busta XIX, N. 1.

(2) Scip. Maffei, *Verona illustrata*, parte III, cap. VII, p. 454. Verona, Vallarsi, 1732.

(3) G. B. C. Giuliari, *La Capit. Bibliot. di Verona*, p. 27.

(4) *Biblioth. Manuscripta Capitularis curante Anton. Masotti*, t. I, p. 344.

(5) È il cod. LXXXV (80), *Sacramentarium Veronense*, membr. di ff. 139, mm. 235 × 172 in onciale, legato in pergamena.

(6) *Opusc. Ecclesias. in App. alla Stor. Teolog.*, p. 14. Trento, 1742.

colta di tutti i Sacramentari, lavoro che incominciò, ma non compì mai.

Ne parlò di nuovo l'anno 1732 nella " Verona Illustrata ", celebrandolo per *indizi d'antichità ancor maggiori delli dati fuori dal Cardinal Tomasi* e per *Prefazii e orazioni e circostanze molto notabili* (1).

Finalmente, temendo di non poterlo illustrare nella sua *Bibliotheca Manuscripta Capitularis,* che aveva messa da parte, per attendere ad altri studi, si accontentò di mandare all'Editore dei suoi Opuscoli Letterari, le poche notizie che si leggono a pag. 62 (2).

Nell'anno 1735, mentre il Maffei si trovava fuori d'Italia, il Cancelliere del Capitolo Don Bartolomeo Campagnola, mandava a Roma al P. Giuseppe Bianchini, la copia del Sacramentario, fatto per cura del Maffei e il Bianchini lo dava alla luce, inserendolo nel T. IV dell'Anastasio, con questo titolo: *Codex Sacramentorum vetus Romanae Ecclesiae a S. Leone Papa I°. confectus.*

Non pochi allora convennero col Bianchini nell' attribuire questo Sacramentario al Pontefice Leone, tra gli altri il Cenni, nella sua dissertazione *de Romana Cathedra* (3) e gli Editori del Messale di Parigi (a. 1739), i quali facendo elogi del nostro ms., confessano di aver estratte *preces plurimas eximiam pietatem spirantes, Magnique Leonis, cui tanquam certo auctori tribuuntur, stilum ac doctrinam referentes* (4).

Altri scienziati però furono di parere diverso.

Il P. Giuseppe Orsi, pregato dall'Editore a dare il suo giudizio, lo stimò il puro Gelasiano (5) e questa opinione fu sostenuta dal P. M. Merati nelle sue osservazioni e aggiunte al *Thesaurum Sacrorum Rituum Bartholomaei Gavanti* (6). Il P. Eusebio Amort invece, in una lettera manoscritta al Bianchini, negava

---

(1) Cap. VIII, parte III.

(2) *App. Hist. Eccl.*, p. 62.

(3) Anastasius, T. IV, § XI e XII, p. 152 sgg.

(4) Vedi Ballerini, *Opera Leonis Magni*, t. II, p. III.

(5) Attribuisce poi quello scoperto dal card. Tomasi ad altro Pontefice posteriore.

(6) T. I, parte I, p. 8.

che l'autore fosse il Pontefice Gelasio e non trovava argomenti per poterlo attribuire a Leone: *Non est opus alicuius Pontificis, sed est Sacramentarium Romanorum Pontificum, usu receptum primis temporibus, auctum usque ad tempora Gelasii Papæ. Specialiter in hoc Sacramentario agnoscuntur manus Sixti III, Leonis I et Felicis III* (1).

Nell'anno 1748 il Muratori, nella dissertazione *de origine sacræ liturgiæ* (2), premessa all'opera *Liturgia Romana Vetus* (*Venetiis 1748*), espose l'opinione che il Sacramentario Veronese fosse una raccolta fatta ai tempi di Felice III, da un collettore ignoto, il quale, senza nessun ordine e scelta, riunì in un volume tutte le Orazioni e Prefazi che potè rinvenire, composti tanto da Leone, quanto dai Romani Pontefici suoi predecessori (3).

Nello stesso anno comparve un' operetta del Co. Giacomo Acami, *Dell'antichità e pregi del Sacramentario Veronese pubblicato dal M. R. P. Giuseppe Bianchini. Roma 1748.* In essa egli combatte le opinioni dell'Orsi, del Merati, dell'Amort e del Muratori e sostiene che l'autore e compilatore del Sacramentario non può esser altri che S. Leone Magno:

" 1° Per l'uniformità dei sentimenti, detti e frasi che si rinvengono tanto nel Sacramentario Veronese, quanto nelle opere di S. Leone.

" 2° Perchè vi s'impugnano l'eresie di Nestorio e di Eutichete impugnate da S. Leone.

" 3° Perchè vi si parla de' Manichei convertiti e scacciati da Roma, come avvenne sotto 'l Pontificato di San Leone.

" 4° Perchè vi si confutano gli errori de' Pelagiani circa il peccato originale e la necessità della grazia, contro de' quali errori scrisse tanto S. Leone.

" 5° Perchè vi si vede chiaramente l'incursione degli Unni, l'invasione de' Vandali, il sacco dato a Roma, la partenza dell'esercito nemico ed altre cose notabili, che accaddero a' tempi di Leone „ (4).

---

(1) Vedi Ballerini, Op. cit., t. II, parte III.
(2) Capo III, col. 16 sgg.
(3) Muratori, Op. cit., cap. III, col. 29.
(4) Proemio e argomento dell'opera, p. 14.

L'Abate Assemani nell'anno 1754 ripubblicava il testo Muratoriano nel suo *Codex Liturgicus Ecclesiæ Universalis. Roma 1754* (1), dichiarando che il Sacramentario non era che una raccolta delle più antiche Liturgie della Chiesa Romana fatta non ad uso di alcuna Chiesa, ma piuttosto da un privato per sua devozione o curiosità (2). E più tardi il P. Anton. Vezzosi, nella Prefazione al To. VI delle opere del Card. Tomasi, rigettate le opinioni dell'Orsi e del Merati, aggiungeva, che l'attribuire il Sacramentario Veronese a S. Leone non soddisferebbe a tutte le difficoltà.

Tutti questi studi precorsero l'opera magistrale dei Ballerini, *S. Leonis M. Opera Volumi 3 Venetiis 1753,* che rese sfolgorante di nuova luce il sacro e vetusto Ms.

Il secondo volume comincia col *Sacramentarium Leonianum.* Nella prefazione ricca di erudite osservazioni per la maggior conoscenza del prezioso documento, gli Editori, dopo aver recati i vari giudizi dei dotti che lo aveano studiato a fondo, affermano non doversi l'opera attribuire nè a S. Leone, nè a Gelasio o ad altro Pontefice, esser certo un *Liber Sacramentorum Romanæ Ecclesiæ . . . omnium vetustissimum,* ma sempre una collezione di privato autore, rispettabilissima però e per le non poche cose da riputarsi al tutto Leonine e per la conferma dei dogmi cattolici e di molti usi dell'antica disciplina (3):

*Probabilius nobis est hoc Sacramentarium non fuisse compactum ab ullo Romano Pontifice publica saltem auctoritate in usum Romanæ Ecclesiæ; sed privati alicuius hominis fetum esse, qui quascumque invenit preces et præfationes a Romanis Pontificibus ac præsertim a S. Leone diverso tempore scriptas ordine non satis idoneo collegit et retulit in codicem qui publico usui non fuit* (4).

Tali onori si ebbe il nostro Ms. nel secolo passato; non gli mancarono però ammiratori anche nel nostro. Nel 1846 venne inserito nella Patrologia del Migne (5).

Leopoldo Delisle nel suo *Mémoire sur d'anciens sacramen-*

---

(1) Libro IV, cap. III.

(2) *Prefatio,* p. IX. Vedi ZACCARIA, *Storia letter. d'Italia,* IX, 168.

(3) Vedi GIULIARI, *Storia della Capitol. Bibl.*, p. 164.

(4) Vol. II. Prefaz., p. VII.

(5) Vol. LV, pp. 21-156.

*taires,* Paris, 1886, parlando del Veronese dice: *L'écriture me semble pouvoir être assignée au VII siècle... Le texte en a été publié au VII siècle* (1).

Il Duchesne (2) dopo aver citata l'opinione del Delisle; quanto alla data osserva, che alla fine di una Messa si ricorda la commemorazione di Simplicio Papa († 483); ma *il faut,* soggiunge, *descendre beaucoup plus bas que cette date* per l'epoca del Sacramentario. E accennando il codice ad assedi (3), crede che il Sacramentario alluda all'assedio di Roma del 537-8. Questo sarebbe il limite superiore. L'inferiore non sarebbe posteriore a S. Gregorio; quindi, conchiude, si può attribuirlo *au milieu ou au déclin du sixième siècle.* Ritiene che non sia un libro officiale, ma una compilazione privata di brani di varia età e disposti senza alcun ordine. Ciò non ostante è per lui un libro di grandissimo valore.

Lo esaminò anco il ch. A. Ebner e nella sua opera: *Quellen und Forschungen zur Geschichte und Kunstgeschichte des Missale Romanum im Mittelalter: Iter Italicum Freiburg. Herder 1896,* ne parla brevemente giudicandolo del VII secolo (4).

Ma dovea comparire un'altra volta sotto nuova e più elegante veste per cura dell'inglese Rev. Charles Lett. Feltoe, *Sacramentarium Leonianum edited with introduction, notes and three photographs. Cambridge at the Universitas press 1896.*

L'editore nella eruditissima introduzione che premette all'opera, dopo aver lamentata la mancanza dei tre primi quaderni del Ms., contenenti forse il *Canon Missæ,* che avrebbe dato luce a conoscerne l'epoca e l'autore, prende in esame le singole Messe, le confronta con quelle degli altri Sacramentari Gelasiano e Ambrosiano, col Messale Gotico e con l'Anglicano; fa rilevare le ripetizioni inutili, il disordine delle orazioni e dei prefazi; studia le rubriche, le annotazioni marginali, le citazioni scritturali e dopo aver risposto brevemente alle questioni degli eruditi del secolo scorso, conchiude molto giustamente: che il nostro Ms. non può essere opera nè di Leone, nè di Gelasio,

---

(1) Pag. 65.

(2) *Origine du culte chrétien,* pp. 128-137.

(3) Fol. 20 *v,* 46 *v,* 54 *r,* 60 *v.*

(4) Pag. 286.

nè di alcun altro Pontefice, ma una raccolta, unica forse, di orazioni e forme liturgiche in parte originali, in parte tolte da altre fonti, fatta da un privato scrittore del VII secolò, sia per proprio uso o per l'edificazione di qualche altro personaggio: *a sort of note-book or collection of liturgical forms partly no doubt original and partly drawn from earlier sources, but ...... of an entirely private nature. This collection may have been intended by the collector either for his own use or for the edification of some other personage at Rome, ....... but in any case he is one, in whom a certain amount of unskilfulness is combined with a considerable amount of meritorious love of labour, reserarch, and original composition or compilation* (1).

Di questi giorni M. Paul Leiay nella *Cronique de littérature Chrétienne* della " *Revue d'Histoire et de Littérature religieuse* „. *An. et Tome II, N. 1 et 2, Paris 1897,* parlando della Messa Latina, esamina la nuova edizione del nostro Sacramentario. Fatto un riassunto della introduzione del Feltoe, si domanda chi possa essere stato quel chierico romano, che pensò di unire insieme tante Messe ed orazioni, quelle perfino che sono attribuite a Damaso Papa, ove si leggono i suoi lamenti e gli attacchi contro certi *confessores.*

Risponde che ciò non si può spiegare che *par une situation analogue.* Trova analogia tra la lotta che agitossi nella Chiesa sul principio del secolo VII tra il clero regolare e secolare e quella della metà del V e congettura che il raccoglitore o redattore del Sacramentario Veronese lo si debba cercare tra quelle *personnes qui redoutent l'ingérence des moines. C'est sans doute parmi ces esprits défiants ou mécontents qu'il faut chercher le dernier rédacteur du Sacramentaire Véronais* (2).

Dopo quanto hanno scritto uomini sì illustri, dopo la bella opera del Feltoe, io credo si possa dire quasi con certezza, che il nostro Ms., quantunque di valore grandissimo, non può esser altro che un lavoro di un privato, lavoro forse unico, non fatto certamente per l'uso pubblico della Chiesa, e scritto sulla fine del sesto secolo o sul principio del settimo, come l'affermano,

---

(1) *Introduction*, pp. XVI-XVII.
(2) Op. cit., p. 192.

oltre al Delisle (1), al Duchesne (2), a l'Ebner (3) e al Mound Thompson (4), i signori, da me interrogati, E. Hauler dell'Università di Vienna, C. Cipolla dell'Università di Torino e F. Paoli dell'Istituto di studi superiori a Firenze.

Ma un giudizio assai dotto intorno al nostro Ms. è ancora sconosciuto agli studiosi, l'esame critico cioè che il Maffei dettava nella sua *Bibliotheca Manuscripta Capitularis,* opera che finì ne' suoi ultimi anni di vita e che inedita si conserva nella Capitolare.

M[r] G. B. C. Giuliari, mio predecessore, avea desiderio di pubblicarlo (5), forse gli mancò l'occasione. Io credo che l'occasione opportuna sia giunta. Si vedrà che il lavoro del Maffei, certo consultato dai dotti, servì di base ai loro studi. Apparirà manifesta una volta di più, la scienza profonda e la vastissima erudizione di Colui, che noi Veronesi onoriamo come la gloria più bella del secolo scorso.

---

## SACRAMENTARII VERONENSIS ORATIONES SELECTAE

---

Codicem hunc præclarissimum, vetustum continentem Sacramentarium, a centenis et amplius annis simul cum cæteris latitantem, et de quo ne fando quidem auditum quidquam fuerat, anno MDCCXIV reperire, ac detegere mihi contigit, repertumque perscrutari, atque ut quomodocumque illustrarem omni opera eniti. Anno MDCCXVI de Graecis fragmentis, et de Eucharistiæ misterio cum Cl. Plaffio disceptans, hæc verba protuli. *In un prezioso e antichissimo Sacramentario del nostro Capitolo Canonicale scritto in carattere maiuscolo e ricco di bellissime orazioni inedite, questa si legge: " Remotis obumbrationibus* ecct. „ (Vide opuscula theologica historiæ adnexa pag. 25). Curavi primum ut Brunonis Panolæ Parmensis presbyteri, et Abbatis Bacchinii eruditi alumni, manu, me dictante diligentissime transcriberetur: exemplum adhuc servo.

---

(1) Op. cit., p. 65.
(2) Op. cit., p. 132.
(3) Op. cit., p. 286.
(4) Vedi Feltoe, Op. cit., p. VII.
(5) *Memorie mss. per un futuro catalogo dei mss. della Capitolare.*

Incœpi exinde valde prolixum opus, quod nunquam perfeci, ut Sacramentariis omnia ferme, quæ memorari possunt, colligerem, et quot in monumentis id genus catholica dogmata, ab Apostolorum ævo, et auctoritate transmissa, manifesto eluceant, ostenderem et patefacerem; nam etiansi e vulgatis antea Sacramentorum libris eadem eruantur, eademque prorsus appareant, nihilominus momenti certe addit aliquid codex millenarius noster. Veruntamen cum tempore procedente pluribus de causis Bibliothecæ Veronensis manuscriptæ laborem curamque abiecissem, nec ad illam umquam amplius me reversurum putarem, opusculorum meorum collectori Historiæ Theologicæ decem abhinc annis adiectorum, ut paragraphum quem heic exhiberet, non denegavi; illius operis specimini in memoriæ subsidium cum consimilibus aliis tunc insertorum, cum opus aliquando me fortasse perfecturum, adhuc sperabam.

Secundæ magnitudinis liber Sacramentario superbit majoribus literis exarato, quo vetustius, et in hoc genere præclarius, ad hunc diem contrectatum ab eruditis non esse opinor. Ut integrum aliquando exhibeam, diligenti librario a capite ad calcem dictavi. Dolendum tres priores menses, et Aprilis partem deesse. Antiquum, eximiumve, quem reperit, et vulgavit codicem Ven. Cardinalis Thomasius, Gelasianum esse autumavit, ac bonis tabulis probare contendit. Veruntamen nullus dubito modo vir ille ecclesiasticis doctrinis, et sapientia refertus vitam duceret, quin hanc laudem in membranas nostras transferret. Gregorianum Sacramentorum librum memorans Ioannes Diaconus in S. Gregorii vita sic loquitur: *Gelasianum codicem de Missarum solemniis multa subtrahens, pauca convertens, non nulla vero super adiiciens, pro exponendis Evangelicis lectionibus in unius libri volumine coarctavit* (1). Gelasius preces omnes collegerat, quæ sparsim vagabantur. Gregorius, ut magis uniformem redderet liturgiam, quasdam selegit, et coarctato volumine ecclesiasticis hominibus tradidit. Vera igitur anterioris, et Gelasiani codicis nota a Missarum multiplicitate desumenda est; quæ in hoc nostro unice apparet, plures enim cuivis Festo Missas adsignat. *In Natali Apostolorum Petri et Pauli* Missas recitat numero XXX. Precationes ab ipso Gelasio conditas, et a Leone magno, tum vetustiores quoque, procul dubio hic perlegere est. Binæ habentur *in Silvestri Episcopi depositione,* quæ haud longo post S. Silvestri obitum intervallo videntur compositæ. In hoc codice mens est diutius immorari; multa enim in his elegantissimis precibus invenio, quæ catholica dogmata, Romanamque fidem, et ritus quoque, mire confirment atque illustrent. Multa id genus monumenta publici juris viri docti fecerunt, sed quid ex eis erui possit, satis perpendere et legentibus indigitare non vacavit.

---

(1) S. Gregor., lib. 2, N. 17.

Permisi quoque, ut characterum specimina, quæ multo ante insculpi curaveram, in eadem opusculorum collectione ederentur: (Pag. 62 in prima tabula num V hujus codicis scriptura visitur). Codicis autem ipsius notitiam anno 1732 publicam feceram in Veronæ Illustratæ Part. III, pag. 250. Post tres autem annos cum eximius Cancellarius Bartholomeus Campagnola nostras illius apographum, me extra Italiam degente, Romam misisset, Cl. P. Blanchinius integrum edidit tamquam *Opusculum secundum in Anastasii tomo quarto collocans, et Sacramentorum librum a Leone I confectum* denominans. Hæc ratio est, cur ego integrum Sacramentarium heic non iterem. Accedit quod nuper Cl. Comes Iacobus Acamius, ut rite, et recte ita denominatum assereret, et de illo fuse egerit, atque erudite. Ego quidem utriusque eruditionis piisque laboribus ingenue, ac libenter plaudo. Plura sunt in Cl. Acamii volumine, quæ a me probentur maxime, et collaudentur; sed cum de Sacramentario a Leone magno confecto convenire neutiquam possim, supervacaneum esse non arbitror, quædam in hoc argumentum afferre.

De Græcis sanctorum Iacobi, Basilii, Chrysostomi liturgiis disserere nihil attinet: Procli Constantinopolitani opusculum percurrere abunde est. Apud occidentales quoque cum Pontifices Summi, tum diversarum etiam ecclesiarum Episcopi, incommutabilem divini et incruenti sacrificii rationem ab Apostolis traditam, ac quæcumque ad eius integritatem spectant, religiose servantes, parerga quædam, nempe quarundam cæremoniarum ordinem, preces, præfationes, collectas, antiphonas auxerunt subinde, et diverse ac peculiariter tradiderunt. Valafridus Strabo (1): *Romani quidem usum observationum a beato Petro principe Apostolorum accipientes, suis quique temporibus, quæ congrua iudicata sunt, addiderunt.* Illorum qui addiderunt hæc in veteribus monumentis reperio nomina. De S. Alexandro I qui sedit Hadriano imperante, sic loquitur liber Pontificalis: *Hic passionem Domini miscuit in precatione sacerdotum, quando Missæ celebrantur.* De S. Telesphoro sub Antonino Pio: *Hic constituit ..... ut ante Sacrificium hymnus diceretur angelicus, hoc est Gloria in excelsis Deo.* De Cœlestino I: *Constituit, ut Psalmi David ante Sacrificium psallerentur antiphonati;* quæ verba in Mss variantur, sed de Missæ Introitu ab eo Pontifice instituto acceperunt omnes. Strabo sic retulit (2): *Antiphonas ad Introitum dicere Cœlestinus Papa instituit, sicut legitur in gestis Pontificum Romanorum.* Gregorius magnus addidit Canoni: *diesque nostros in tua pace disponas.* Gregorius III adiecit eidem Canoni: *Quorum solemnitas* ecct. De Nolæ episcopo Paulino Gennadius: *Sacramentarium et hymnarium fecit.* Idem de Voconio in Mau-

(1) *De div. Offic.*, c. 22.
(2) Cap. 22.

ritania episcopo: *Composuit etiam Sacramentornm egregium volumen.* Itemque de Musæo Massiliensis ecclesiæ presbytero: Episcopi hortatu *composuit Sacramentorum egregium et non parvum volumen.* Veruntamen cæteros in Missarum ordine dirigendo magnopere supergressus est Romanus Pontifex Gelasius I, qui ex eodem Gennadio scripsit Tractatum *Sacramentorum elimato sermone,* et ex Anastasio, ut a Cardinali Bona, qui in hac materia cæteris longe præstitit, itemque ab aliis citatur, *Fecit Sacramentorum Præfationes et Orationes cauto sermone* (1). Non ab ipso tantum, sed et ab anterioribus aliis compositas Gelasium collegisse, ordinatimque disposuisse, par est credere: quapropter Gelasiani nomen Missali librum inditum statim fuit. Sed cum ævo procedente, novis subinde adiectionibus nimium augeretur, Gregorius magnus *Gelasianum codicem de Missarum solemniis, multa subtrahens, pauca convertens, nonnullo vero saperadiciens pro exponendis Evangelicis lectionibus, in unius libri volumine coarctavit:* hæc docet Ioannes Diaconus in S. Gregorii vita (2). Concinit Strabo (3): *Curavit beatus Gregorius rationabilia quæque coadunare, et seclusis iis, quæ vel nimia, vel inconcinna videbantur, composuit librum, qui dicitur Sacramentorum.* Hæc est, ni fallor, paucis verbis conclusa, quod ad præsens institutum attinet, Sacramentarium historia.

Ex hac rerum serie ortum est, ut ab antiquis, a medianis et a recentibus Scriptoribus Gelasiani et Gregoriani Missales memorentur sæpius, iisque appellationibus veteres codices in ejusmodi usum confecti communiter nuncupentur; Leoniani vero Sacramentarii nomen numquam, et nusquam ante hosce dies auditum est. Card. Bona (4): *Digessit Missarum ordinem Gelasius Papa, et post eum Gregorius magnus:* extabant autem anno 831 in insigni Bibliotheca *Missales Gregoriani tres; Missalis Gregorianus, et Gelasianus modernis temporibus ab Albino ordinatus; Missales Gelasiani XIX* (5).

Leonem magnum vetus auctor non est, qui memoret de Sacramentis loquens, praeter Anastasium, qui quatuor hæc verba *Sanctum Sacrificium, immaculatam hostiam* orationi uni illum addidisse refert (6). Refert tamen secundum quosdam codices; secundum alios nequaquam, qua propter in prima editione ad oram tantum adicta sunt. Utcumque sit *nihil addidisse nisi prænotata verba,* doctissimus Cardinalis censet,

---

(1) Bona, lib. 2, c. 5.

(2) Lib. 2, c. 17.

(3) Strab., c. 22.

(4) Lib. I, c. 25, n. 16.

(5) Ibidem.

(6) In Leone.

non orationem integram, quam Leone vetustiorem existimat. Ponderet quæso quisque rerum æstimator prudens, num credi possit, si librum integrum, tamque amplam ac diffusam, quam quæ in codice nostro exhibetur, collectionem exhibuisset Leo, nullam de illa mentionem, verbum nullum ab eo Historico factum fuisse, qui de quatuor verborum adiectione posteros edocere non prætermisit. Honorius Augustodunensis duodecimi sæculi scriptor unice officium et *antiquum* vocat Acamius. Nec tamen plures in his collectionibus S. Leonis quoque preces, ac præfationes haberi, quisquam est qui neget, stilus enim ipse hoc suadet, ac indicat. Sed quæ Cl. Acamius pag. 165 nescio quo paroramate haberi insuper apud Bibliothecarium verba affirmat, minime quidem apud eum reperias.

Anonymus auctor prolixi operis de disciplina ecclesiastica, et divinis Officiis, in Ms. nostro LXXXIV nuper relato superstes, ubi agit *de secunda parte Missæ,* sic loquitur (1): *Gradualia, tractus, et alleluia Ambrosius, et Gregorius et Gelasius composuerunt, et ad Missam cantari statuerunt. Ieronymus tamen ait, quod alleluia diceretur in Missa; tractum esse de Ierolimorum ecclesia. Nocherius Abbas sancti Galli prius sequentias pro neumis illius alleluia composuit, et Nicolaus Papa ad Missam cantari præcepit. Sed et Hermannus Contractus, qui fuit inventor Astrolabii, fecit Rex omnipotens, et Sancti Spiritus* ecct. Et ubi de Missæ parte quinta (2): *Nota quod præfationes Gelasius eliminato sermone composuit; sed cum olim innumeræ fuerint præfationes, nunc solummodo IX cantari instituit: scilicet de Natali, de Epiphania, de Iejunio, de Cruce, vel Passione, de Ressurectione* ecct. Et inferius de hymno *Osanna in excelsis, quem hymnum Sixtus Papa ad Missam cantari præcepit.* Leonis magni nulla fit mentio.

Sacramentorum codices quamcunque ecclesiam olim habuisse, ambigi nequit; orationumque liturgicarum collectiones propterea plurimas variis in locis ab Episcopis confectas, quis inficietur! illos autem codices, ut cuiuscumque generis alios innumerabiles, ætas absumpsit, rerum vicissitudines abstulere. Eximiæ vetustatis ad hanc diem paucissimi reperti sunt, quos viri docti in lucem proferre non omiserunt. Rocca, Pamelius, Menardus inter hos eminent, *quorum quisque,* Card. Thomasius ait in præfatione ad codices Sacramentorum, *suam editionem ut germanum Gregorii foetum prædicat, sed mirum est, quam inter se dissideant.* Novi ejusmodi codices si prodibunt, nemo dubitet, dissidebunt pariter, et diversam videbuntur quodammodo collectionem continere. Venerabilis ipse Thomasius ex veterrimis aliis membranis *Gelasianum codicem pri-*

(1) In Cod. 79, p. 29.
(2) Pag. 35 in Cod. 79.

*migenium Romæ publicavit primus,* inquiunt præstantes S. Gregorii editores in Præfatione ad librum Sacramentorum. At cum Gregoriana nequaquam minor sit ea collectio qui credi possit, illam esse quam Gregorius deinde *coarctavit?* Adde, plura in ea deprehendi posteriorem ætatem loquentia, et nullam adhuc repertam esse istiusmodi orationum congeriem, quæ Gelasii nomen præseferat. Adde, quorundam confessorum etiam Missas in illa recitari, et pag. 31 afferri *Capitulum S. Gregorii Papæ.* Ita in Gregoriano, quod dicimus, S. Gregorii Papæ natale celebratur. Suspicari ergo liceat, nullum hucusque codicem emersisse, a quo ipsa nobis omnino exhibeantur, a Gelasio vel a Gregorio confecta Sacramentaria, sed utique commixta, et a diversis illorum vestigio inhærentibus, pie olim congesta. Nec tamen improbo, ita fuisse ab editoribus denominata, ideo enim factum puto, quia ad Gelasii, vel ad Gregorii tenorem, et modum ab antiquis Scriptoribus indicatum, magis accedere visa sunt. Cæterum prudentius Cardinalem Thomasium egisse opinor. cum monumenta ab eo eruta, et vulgata præfixe auctorum nomine, *Sacramentorum Romanæ Ecclesiæ, Missale Gothicum, Missale Francorum, Missale Gallicanum vetus inscripsit.*

Ad eximium codicem nostrum, millenaria fulgentem antiquitate, sermonem jam convertamus. Majusculis secundæ classis litteris constat totus: sexto, septimo, et octavo etiam seculo ea scribendi forma est adhibita: ulterius adhuc ubi de scriptis liturgicis ageretur.

Orthographia vetustior interdum deflectit, *colloquentes* enim pro conloquentes, et similia occurrunt quandoque. Non minorem præseferunt alii quidam ex codicibus, unde Sacramentorum libri sunt eruti, vetustatem; cursoria enim, vel mixta scriptio eodem etiam ævo percrebuit. Cui vero Sacramentarium tribuam nostrum, si quis a me percunctetur, quid ausim reponere? quis multiplicium in unaquaque olim ecclesia veterum hujusmodi collectionum auctores agnoscere, et designare præsumat?

Magna et præcipua præfationum, collectarum, precumque pars e Roma procul dubio, et a Romanis libris deducebatur, sed Episcoporum quam plurimi, vel ab iis ad hoc deputati, arbitrio et gestu suo seligebant, ordinabant, addebant. Nequibant tunc, quod post artem typographicam inventam præstitit Clemens VIII; ut iisdem prorsus verbis libri omnes liturgici ubique ederentur, decreto sanciri. Codicem hunc nostrum ad usum Romanæ Urbis perscriptum fuisse, affirmant modo. qui de illo nuper egerunt. Quia confectum asserimus *per uso della Chiesa Romana solamente* (1): eo quod in orationibus urbs Roma, Romana templa, cœmeteria, stationes memorentur. At hodierna quoque Missalia

(1) Acamius, p. 28.

Venetiis et aliis in urbibus impressa præferunt statim, *Statio ad S. Mariam majorem, Statio ad S. Crucem in Ierusalem,* et sic deinceps: proptereane ad Romanæ urbis usum singillatim dicemus cusa? In quovis liturgico libro ab orthodoxis adhibito veterum Romanorum Pontificum dictata, et preces Romæ ab ipsis compositæ, primum semper obtinuerunt locum. De Martyrologiis animadvertit Baronius, si quis eorum *originem petat, et ad suum principium reducere velit, omnia e Romano, velut ex trunco ramos, producta cognoscet* (1): idem prorsus de Sacramentariis dicendum.

At quæritur, quis Missalem hunc librum confecerit, collectionemque istam adornarit. Obvium quam plurimis responsum occurret statim, Gelasio tribuendam esse ob Missarum multiplicationem; quæ apta profecto. et valida ratio est: nihilominus, ut nuper tetigi, nec hujus nostri, nec aliorum id genus librorum quis fuerit peculiaris auctor, satis constat, neque ut puto, constabit.

Veruntamen, ut libere loquar, nulli minus quam Leoni, qui Gelasium, Felicem, Simplicium atque Hilarium præcessit, imputari posset. Gennadius, liber Pontificalis, Strabo Pontifices, a quibus aliquid est additum et in Missarum parergis innovatum, accurate recensent ut vidimus: siluissent de Leone magno, si tantam orationum congeriem elaborasset, vel si hujus amplissime et quæ cæteris ad hanc diem agnitis, cum integra habebatur, copiosior erat, auctor fuisset, atque exhibitor? Qui hoc credat profecto erit nemo. Iohannes Diaconus inter acta S. Gregorii Gelasianum codicem ob coarctatum non in transcursu, sed dilatato sermone memorat: in Leoniano, si extitisset nihil operatus esset Gregorius? nullam omnino ejus mentionem fecisset Iohannes? an non ea erat Leonis magni nominis celebritas et amplitudo, ut illud nemo unquam ecclesiasticorum hominum aut oblivisci posset, aut occultare vellet? Idem de omnibus dicas, qui de originibus liturgicis; et de officiis olim egerunt.

Quam plurimæ in Ms. orationes recitantur, quæ in aliis etiam editis Sacramentariis conspiciuntur, nec in Gelasiano tantum, sed et in Gregoriano, in Gothico, in Francico, in Gallicano. Quattuor interdum, interdum octo in eodem titulo, mense Octobri *super defunctos* XIV habentur preces, quæ in vulgato a Cardinali Thomasio pariter leguntur. Septembri mense *Consecratio Episcoporum* obvenit, in quo articulo quæ referuntur, Missale Francorum exhibet singula, ut apud Thomasium videre est. Prolixiores in Ms. allatas exempli causa *ad Virgines Sacras, in natali S. Clementis martyris, in Consecratione Episcoporum, Super Diaconos, in Actione Nuptiali,* aliasque Thomasiana etiam Sacramentaria continent. Postremæ perperam codex, eiusque editio præmittit (2). *Incipit Velatio*

(1) Diss. *De Rom. Mart.*, c. 9.

(2) Anast., t. IV, p. 49.

*Nuptialis*. Recte Thomasius: *Incipit Actio Nuptialis*. Ubicumque direptiones, clades, vel hostium depulsiones, ac tranquillitas reddita memorantur, cur rebus Leone sedente gestis, illiusque ætati semper adscribenda sint? an semel tantummodo istiusmodi eventa nobis renuntiat Historia? Quod in quibusdam precibus *Romani Principes,* aut *Romani nominis ubique Rectores* Deo commendentur, non ostendit plures eo tempore Romæ Imperatores, aut Principes dominio positos esse. In Missali Francorum quoque apud Thomasium legimus, *Francorum regni adesto Principibus, Protege Francorum nominis ubique Rectores:* omni tempore et loco ut protegat precatur. Quod eædem sæpe opiniones et consimilia catholica sensa in Leonis Sermonibus, et in his orationibus occurrant, quid mirum? mirum profecto esset, si aliter accideret. Item dicas de hæresibus impugnatis, quæ subsequentibus etiam seculis profligatæ sunt: frequentius aliis Ariana in his precibus exploditur, quæ multo ante debaccata fuerat. Quod stylus, et phrases utrobique interdum assimilentur, non evincit, eas preces Leonem elucubrant; multi scilicet Leonis dictionem studiose imitari diu perstiterunt: hinc oritur, ut periodos integras e Leone arreptas quandoque in his præfationibus videamus.

In hoc Sacramentario ad Sanctos quoque, qui Martyrii palmam non claruerant, diriguntur quandoque Missales preces; quin eorum festa eo tempore jam invaluisse apparet. Ipso initio: *Tuas Domine, virtutes, tuasque victorias admiramur, quoties in Ecclesia tua horum dierum festa celebrantur, quos insignes Confessorum tuorum, et Martyrum palmæ ad perennem memoriam, sollemnemque lætitiam fidelibus populis sacraverunt.* Ter sub eodem titulo hæc præfatio repetitur. Paulo post æque ac Martyrum obtinuisse tum Sanctorum non Martyrum cultum, ac celebritatem diserte docemur. *Qui non solum Martyrum sed etiam Confessorum tuorum es virtute mirabilis: licet enim illi passione sint clari, qui manifestis acerva supplicia sustinuere tormentis; etiam isti tamen occultæ proposito castigationis adflicti, et cruciati, spiritalis observantiæ disciplinis illorum sunt vestigia subsecuti.* Habetur et in Missali Gothico. Itidem alia, quæ in aliis non habetur (1): *Qui dum Confessores tuos etiam nunc tanta festivitate glorificas, simul et nullum apud te sanctum propositum doces esse sine præmio; et præter duriora certamina fragiles quosque ad tuæ retributionis munus invitas.* Iam vero quis veterum rituum conscius, et in Christiana antiquitate versatus non videat, nec Leonis, nec Gelasii ævo ista convenire, aut aptari posse? nondum siquidem æqualiter ac Martyribus publicus et sollemnis cultus Confessoribus adhiberi solebat. Cl. Acamius p. 23 *le Messe de Confessori ne cinque primi Secoli*

(1) Pag. 13.

*non erano state per anco introdotte nella Chiesa Romana.* Quomodo ergo collectio hæc Leoni magno adscribitur? Divus Augustinus in Ioannem (1): *ad mensam Domini non sic martyres commemoramus, quemadmodum alios, qui in pace requiescunt, ut etiam pro eis oremus, sed magis ut ipsi orent pro nobis.* Innocentius III de mysteriis Missæ (2): *sedes episcopales antiquitus constructas non in memoriam Confessorum, sed ad honorem Apostolorum et Martyrum, et præcipue B. Mariæ Virginis veterum devotio dedicavit.* Cardinalis Bellarminus (3) Confessorum cultus vetustiorem memoriam non reperisse ait, quam in Concilio Moguntiæ optimo Carolo magno imperante coacto. Veruntamen, quid plura? preces nuper allatæ, item illæ ibidem in aliis Sacramentariis non recensitæ: *Sanctorum, Domine, Martyrum tuorum supplicationibus tribue nos foveri, ut quorum venerabilem diem annuo frequentamus obsequio, eorum et intercessionibus commendemur et meritis. Deus qui ad deprecandum te conscientiæ nostræ perspicis non sufficere facultatem, cunctos Martires tuos fac orare pro nobis, quos digne possis audire. Celebramus Domine tuorum natalitia justorum* ecct. aliæ quoque plures omnium Sanctorum festum celebrari tunc consuevisse declarant. Quia ex duabus sequentibus illius octavam quoque jam institutam colligimus, ut optime Acamius quoque animadvertit. *Quia Sanctorum tuorum solemnia repetimus, quorum veneranda confessio, et mirabilia tuæ virtutis explevit et illius præmium cœleste quæsivit, et nobis patrocinia præparavit. Frequenti Sacramentorum perceptione satiati, quæsumus Domine, ut quorum honore seminantur salutifera nobis oratione proveniant.*

At notissimum est festum illud a Bonifacio IV septimi seculi initio indictum fuisse. Cl. ipse Acamius p. 37 *la qual solennità per sentimento comune degli eruditi fù instituita da Papa Bonifacio IV nel settimo secolo.* Quomodo ergo hujus Sacramentarii vel auctor, vel collector Leo magnus asseritur? De Pantheo a Bonifacio consecrato quis libro Pontificali repugnet? In vetusto Martyrologio a Florentinio prolato Kalendis Novembris hæc celebritas non memoratur. Subdit autem doctus editor: *Nondum festum omnium Sanctorum* vel universalis Ecclesia susceperat, vel ubique celebrandum sanciverat. Ecclesia S. Mariæ ad Martyres non eadem fuit, ac quæ ex Anastasio dicta est *Mariæ semper Virginis et omnium Martyrum.* Testis est idem Anastasius, qui illius ad Martyres *tectum vetusta incuria demolitum purgari fecit ad purum* ecct. Quisquis videt de Pantheo hæc accipi non posse.

Nec Leoni magno, nec ulli sigillatim hæc collectio imputari potest

---

(1) T. V, p. 84.
(2) Lib. III, c. 10.
(3) Vedi *De miss.*, lib. II, c. 20.

in qua magna sæpe orationum congeries sub uno titulo conservatur, et quarum plurimæ titulo minimæ respondent. Sacramentariorum, quæ typis antea sunt edita, valde dispar est ordo, delectus, compositio, compages. Dies in illis semper præfigitur, cui Missæ adsignantur: in hoc initium ipsum si respicis, XLIII vides Missas conjunctim, ad eundem certe diem non pertinentes. Vides etiam in decursu, quæ nec a Leone, nec a Romano Pontifice altero profectu credi possint, neque enim sacrificio liturgico, neque Christianæ mansuetudini et ecclesiasticæ pietati videntur aptari. Exempli gratia: *Contra inimicos catholicæ professionis. Exaudi Domine, preces nostras; et sicut profanas Mundi caligines Sancti Spiritus luce evacuasti, sic hostes Romani nominis, et inimicos catholicæ professionis expugna. Contra Impetitores. Deus qui vastatoris antiqui perfidiam, virtute filii tui, et Sancti Spiritus, destruendo, dedisti nobis de captivitate victoriam, concede quæsumus ut qui nos impetere moliantur, potentiæ tuæ dextera conterantur.* In aliis. *Longe aliud quippe est contumeliam præterire, aliud per improvidam benignitatem capiamur, intendere ecct. Da nobis legitimæ dilectionis tenere mensuram, ut quia justæ pacis puritate dissentiunt, in nobis tamen quod merito debeant laterare, non inveniant.* Conciones et variorum criminum insectationes videntur aliquando exhiberi: imitatam, et prolixam videre est p. 30. At quis hæc in divinis mysteriis admittat?

Quid memorem verborum explicationes, vel synonima, in orationis contextum illata? *multipliciter uberius, satiati ditati, justorum Sanctorum, sit accepta fiat grata, destructa subversa.* Quid importuna alicubi lemmata, ut *Præsumptio et reparatio primi hominis* (p. 18) ante præfationem de jejunio: hæc ne a magno Leone; quid precationes confuse ut plurimum et permixte positas, nec in aliis ordine, quo in liturgia adhibebantur. Usui liber hic etiam ob Missarum, et quidem conglobatarum numerum parum aptabatur, quarum, quæ seligenda esset a celebrantibus, non indicatur. In natali Apostolorum Petri et Pauli XXX proponuntur Missæ, quarum una tantummodo eo die recitanda erat. Videtur ergo constare prorsus, collectionem hanc e variis, sed Romanis præcipue codicibus olim congestam fuisse, et suinde pluries auctam; Veronæque non proprie, ut Sacramentarium altari serviens, sed velut venerabilem quamdam fodinam, ex qua libri Sacramentorum ad Ecclesiarum usum conficerentur, in Canonicorum Bibliotheca custoditam esse, et pro thesauro habitam. Orationes pro urbe Romana compositas omittebant, qui pro Veronensibus ecclesiis liturgicos ex codice hoc adornabatur libros. Omittebantur quoque procul dubio a celebrantibus orationes, quæ aliquam ob causam improbandæ essent.

Argumenta, quibus in Leonem I haec transfertur collectio, singillatim diluere, nimis longum esset: sed verbo uno satisfice omnibus.

Multa erudite congeruntur, ut in his orationibus quadam memorari ostendatur, quæ Leonis ævo conveniunt. Plura quidem afferre possem, ut hoc aut illud variis in locis refellerem; sed quid attinet? et a Leone composita, et ab anterioribus quoque non pauca in hoc libro reperiri, quid inficiari audeat? Num qui post Bonifacii IV tempora liturgica ista collegit, antiquiores prætermittere orationes debebat? Cl. Acamio nequaquam dissentio, cum in hoc Ms contineri asserit (1): *una raccolta di Messe da vari autori composte.* Dissentio, quia contra hæc asserta enixo studio suadere nititur *che S. Leone ne sia stato l'Autore* (2). Quod si non auctorem sed collectorem tantum velit eum quisquam dicere, magnus ne Leo tam frequenter easdem preces paucorum verborum mutatione transcripsisset, atque iterasset! Leo ne fabulas interdum in liturgiam intulisset ut de S. Clementis *amissis parentibus, alienisque inventis in terris,* quos a Recognitionibus acceptas binæ memorat Praefationes? Ne reponatur, accessiones has omnes esse, post Leonis tempora ab alia manu huic collectioni adnexas: illa enim plurima, quæ Leonis ævo, et doctrina adversantur, non habentur ad calcem, ita ut posterius addita credi possint; sed cæteris commixta ubicumque obveniunt; quamobrem eodem tempore collectionem omnem constructam et coarcevatam fuisse apparet. Viri doctissimi, Cl. Acamius hæc affert verba (3): *quod ad Veronensem codicem pertinet, nemo non videt, quam sit informis et incompositus et rudis quædam, indigestaque moles:* hanc ergo Leoni, vel Gelasio imputare non verebimur?

Veruntamen ad id, quod rei caput est, accedamus. Aureis hic vetustissimisque monumentis nihil prorsus auctoritatis, nihil pretii detrahit, si hæc eorum collectio non quinto sed sexto, aut septimo, octavo etiam seculo compacta fuerit. Orationum spectanda est antiquitas, non earum collectionis. Collectionem autem ipsam millenariam longe supergredi ætatem codex ipse eiusque majuscula scriptura testantur. *Ab aliquo consarcinatam fuisse,* Muratorius censuit, *qui quascumque reperit orationes et præfationes in unum codicem coegit.* Sed illum, quicumque demum fuerit, singulari studio vetustiores, utpote magis venerabiles, conquisisse, quis ambigat? Leonis magni præsertim operam dedisse, ut quæ habebantur aucuparetur omnes, atque insereret, quis non pro certo habeat? Iam vero librum integrum in lucem, ut jacet, prolatum fuisse, utile quam maxime reputo; sed nec inutile profecto censeo, delectum facere et præstantiores tantum, quæ in ea conservatione ferme occultantur, exhibere, ordine, etiam quodam adhibito. Instituti mei, ut

(1) Pag. 45.
(2) Pagg. 59, 89.
(3) Pag. 143.

rationem reddam, nullam afferam ex iis plurimis, quæ in aliis etiam Sacramentariis spectantur. Quas hic colligo, antequam hunc librum detegerem, invisæ fuerant omnes, atque omnino ignotæ. Eas item tantummodo seligam, quæ ad Fidei dogmata, et ad religionis instituta pertinent: mirum est scilicet, quam perspicue, quam solide in Præfationibus. Collectis, Postcommunionibus, Secretis, Offertoriis, Precibus quæ in Sacramentorum libris recensentur, catholica placita eluceant. Mirum est. quoties, et quanta dignitate asserantur, ineffabilis divinarum Personarum Trinitas, Christi divinitas, atque humanitas, realis in Eucharistia præsentia, Sacrificii veritas in Missae celebratione, multitudo Martyrum, Romanorum Pontificum in universali Ecclesia Primatus, Episcoporum jus in presbiteros, Sanctorum, ut Deum pro nobis orent, invocatio et cultus, reliquiarum veneratio, jejunorum usus, afflictati corporis meritum, Virginitatis praestantia, et prærogativa pro defunctis suffragia, pluraque alia, quibus omni ævo Catholici institimus, ac ne tantillum quidem recessimus. Veritates quidem et Apostolicæ traditionis argumenta hinc eruuntur tam valida, tam manifesta, ut persuadeam mihi, ingenio et doctrina præditos ætherodoxos, modo præiudiciis posthabitis documenta hæc serio expendere non recusarent, Romanam incusaturos amplius non esse, nec oppugnaturos fidem.

Institutam in ipso Christianæ religionis exordio Missam, et precibus, atque apparatu quodam statim auctam, ornatamque, ab Apostolorum ætati proximis Iustino, Irenæo, Clemente Alexandrino, Tertulliano, aliisque abunde discimus. Ethnici et Hæretici *panis oblationem* celebrare, et *ipsas res de quibus Sacramenta Christi* administrantur, æmulari atque exprimere affectabant, pariterque *sensum de sensibus, verba de verbis:* hæc docet Tertullianus (1). Ex Gregorio magno (2): *mos Apostolorum fuit, ut ad ipsam solummodo orationem Dominicam oblationis hostiam consacrarent:* præter verba intellige, quibus ipse Dominus institutor consecrationem peregit.

Post Apostolos Pastores primi, quorum aliqui ipsos audierant Apostolos, modo unam, modo aliam in regionibus variis concinnarunt orationem et addiderunt. Ex libro Pontificali addidit Hadriano imperante. Alexander I addidit sub Antonino Pio Telesphorus. Eodem secundo sæculo preces et gratiarum actiones in liturgia adhibitas memorat Iustinus Martyr. Tertio pariter sæculo gratiarum actionem præter consecrantia verba memorat Origenes, *Nos cum gratiarum actione,* et cum oratione. quæ fit super exhibita, oblatos panes comedimus, qui propter orationem illam corpus evadunt sacrum, et integra voluntate comedente santificans Ἡμεῖς = τοὺς μετ᾽ εὐκαρισίας καὶ εὐκῆς τῆς ἐπὶ δοθεῖσι προσαγομένους ἄρτους ἐθίμεν, σῶμα γενομένους διὰ τὴν εὐκὴν ἅγιόντι καὶ αγιάζον τοὺς μετὰ ὑγιέος

(1) *De Praescr. hereticorum,* CXL.
(2) Lib. IX, ep. 112.

ποθέσεος ἀυτῶ χρωμένους. Preces quæ in vetustis Sacramentariis nobis sunt reliquæ, sæcula tertium. quartum, quintum et sextum dilucide et aperte produnt. Leonem I, Gelasium, Gregorium vel eorum temporum auctores alios manifeste detegunt. Non ne ergo tradita ab Apostolis dogmata, ritus et sensa ἐκ διαδοκῆς per successionem nobis transmisere? Erit ne qui opinetur doctrinam et instituta Apostolica mutare, inflectere, corrumpere omnes voluisse? Patet equidem prorsus, sententias ac documenta in veterrimis his precibus prolata, ab Apostolica traditione descendere. Quanti autem intersit, quantum ineluctabilis auctoritatis pondus involvat, institutiones nostras in his orationibus inveniri, nondum satis animadversum est; neque enim hic de scriptore uno, aut altero, vel de quibusdam ex Patribus agitur. Loquitur in his precationibus Ecclesia tota, quanta ubicumque fuit. In quibuscumque provinciis, civitatibus, pagis, Monasteriis, Ecclesiis Missales libri observabantur, et canebantur, neque sine his orationibus Christiana mysteria peragebantur. Quanto minor in Conciliis omnibus Episcoporum, et ecclesiasticorum hominum numerus adfuit? universi enim catholici Sacerdotes effata in his precibus comprehensa ubique pronunciabant, celebrabantque. *Ecclesiarum catholicarum quam plurium auctoritatem sequamur*, inquit D Augustinus, eo magis omnium (1). Qui orationes alias commenti sunt vel alium Sacramentorum modum effingunt, dicant quo vetustatis, et traditionis jure; *edant origines ecclesiarum suarum, evolvant ordinem Episcoporum suorum,* inclamat Tertullianus (2).

Quo majori pretio orationes in Sacramentariis collectæ habendæ sunt, eo promptius e vetustissimis membranis nostris hunc delectum habui et eo libentius exhibeo. Elegantia quoque præstant non paucæ, et ob peregrina, ac sublimia sensa ingenii laude.

In Ms. sigla quædam iterato interponuntur, quæ cum nondum explicata sint, ostendere non prætermitto.

| | |
|---|---|
| F̄ . C̄ . S̄P . | *facta communione super populum.* Apud Card. Thomasium pag. 200 titulus est: *super populum post communionem.* |
| F̄ . Ē . S̄P . | *facta eleemosina super populum.* |
| P̄ . F . Ē . S̄P . | *post factam eleemosinam super populum.* |
| P̄ . | *preces.* |
| P̄ . R̄ . F . E . | *preces facta eleemosina.* |
| P̄ . F . C̄ . | *post factam communionem.* |
| P̄ . F̄ . C̄ . S̄P . | *post factam communionem super populum.* |

(1) *Doct. Christ.*, l. II, c. 8.
(2) *De Praescr.*, c. 32.

## *Il codice Vallicelliano C III.*

### *Contributo allo studio delle dottrine religiose di Claudio, vescovo di Torino.*

Nota del dott. GIUSEPPE BOFFITO, barnabita.

Il codice vallicelliano C III, contenente il commento di Claudio, vescovo di Torino, al Vangelo di San Matteo, è un grosso volume pergamenaceo rilegato in tutta pelle bianca, a quella foggia che si osserva uniforme in molti codici della Vallicelliana di Roma e che rimonta al principio del secolo scorso. Sul dorso, scritto a mano, oltre all'indicazione di catalogo, sta il titolo del sec. 17° o 18°: " Claudius in Mattheum ". S'accompagna alla rilegatura un frontespizio anch'esso non antico, su cui, di mano probabilmente non anteriore al secolo scorso, leggesi: " Ritus probandi homines de furte accusatos per aquę immersionem ab Eugenio II Papa ut dicitur institutus, sed postmodum ab aliis Romanis Pontificibus abolitus Claudii Taurinensis Episc. Commentariorum libri III in Evangelium S. Matthaei ad Iustum Abbatem ". Consta in tutto di carte 202 perg. ($31 \times 23\, ^1/_2$), scritte in doppia colonna ($22 \times 6\, ^1/_2$), numerate progressivamente da mano moderna. La numerazione originaria non riguarda che i quaderni, i quali son numerati in calce all'ultima loro carta *v.*, nel mezzo del margine inferiore con lettere maiuscole onciali sino alla c. 89, con cifre romane per le cc. 90-197. La numerazione è di raro tralasciata, come avviene pei quinterni che dovevano essere segnati colle lettere J, N, e colla cifra VIII. Ogni quinterno consta, come di solito nei codici più antichi, or di sei carte ed ora, e più spesso, di otto. Di sei non ve n' ha che tre (A. cc. 2-7; B. cc. 8-13; XIII, cc. 192-197); un solo è di quattordici carte, o meglio di tredici, essendone stata tagliata via una, senza danno peraltro del testo (cc. 61-73). Lo stesso si avvera per il quinterno *h*, che invece di otto carte ne conta perciò sette (cc. 54-60). La prima carta, l'antica guardia del

codice, che contiene il *Ritus probandi homines,* ecc., appar cucita al resto, come alle altre appaion pure cucite le ultime cinque. Tre di queste non hanno margine inferiore nè superiore (cc. 200-202). Il margine inferiore fu pur tagliato alle cc. 37, 67, 92, 174-176, 190, 192, 133; non mai, fuorchè in quest'ultima, a danno del testo; sono pur tagliuzzate inferiormente le cc. 65, 66, 109, e lateralmente le cc. 70, 71, 75, 110. Le altre sono ancora in buono stato, se si eccettuano le prime cinque e le ultime tre che portan qua e là alcune chiazze d'acqua.

Il carattere è un bel minuscolo carolino. Somiglia molto a quello della tav. IV del Prou (1). Le lettere *l*, *d*, *q*, *h* hanno i gambi di solito rigonfi; la *t* non sporge mai fuori della linea; la *m* ha il gambo rivoltato in dentro o appena sporgente in fuori; accanto all'*a* chiuso compare non di rado l'*a* aperto, che già nel X secolo, a giudizio del Wattenbach (2), va scomparendo; il dittongo *ae* ora si trova scritto per intiero ed ora è espresso con ę, od anche costituito dalla semplice *e*, il che veramente, secondo il Prou, non sarebbe avvenuto che più tardi del secolo IX (3); il *g* rare volte è aperto sull'alto e poco varia in basso la sua forma serpeggiante; l'*h* minuscola è sempre aperta nella base; l'*h* maiuscola è spesso così sformata, da rassomigliare all'*n* semi-onciale; l'*y* non è quasi mai prolungata inferiormente ed è sormontata d'ordinario da un punto; l'A maiuscola capitale è talvolta sormontata, giusta l'uso classico, da un apice assai prolungato in sul davanti, da destra a sinistra. Le maiuscole sono a volte onciali; ma per lo più capitali. Qualche onciale o semionciale è seminata qua e là in mezzo alle altre lettere minuscole caroline. Le parole son quasi sempre scritte separatamente le une dalle altre. Il contrario accade nei titoli e quando s'incontrano due parole di cui la seconda abbia per lettera iniziale quella che è lettera finale della prima: in quest'ultimo caso le due lettere si riducono spesso ad una e le due parole s'incorporano strettamente (angelumeum, in carceremittaris, ecc.). Qualche lettera, più di sovente l'*m* onciale,

---

(1) *Manuel de paléographie latine et française*, 2e éd. Paris, Picard, 1892, p. 86.

(2) *Anleitung zur lateinischen Palaeographie.* Leipzig, 1886, p. 44.

(3) Prou, Op. cit., p. 72.

la *q* e la *d*, appaion punteggiate nel vano centrale, con iscopo di ornamentazione.

Quanto all'interpunzione, non s'avvera che in parte ciò che il Prou dà come norma d'uso nei manoscritti carolini (1): il punto e virgola non sempre indica forte sospensione di senso, della quale invece son spesso indizio o un punto o due punti, in ambedue i casi accompagnati dalla virgola ( ., :, ). Segno di lieve interpunzione è di solito il punto fermo; come interpunzione un po' più forte serve una serie di punti e di virgole variamente disposte (2). Per il segno d'interrogazione si trova usato il punto fermo sormontato da una linea capricciosamente serpeggiante, di cui si posson riscontrare nel Wattenbach le diverse forme (3).

Le abbreviazioni non sono molte, a non tener conto delle antiche e comunissime, quali sono ad esempio: " đs̄ deus, dn̄s dominus, ih̄s χps ihesus christus, sp̄s spiritus, sc̄i sancti, sp̄alibus spiritualibus, apłi apostoli, matth̄s matthaeus, sc̄đm̄ secundum, ee esse, fri fratri, đđ david, ecla ecclesia, abb̄i abbati, n̄ non, s̄ sunt o sint, m̄s meus, urm̄ vestrum, n̄r̄ae nostrae, ih̄l̄m iherusalem, ḡl̄am gloriam, scl̄a saecula, om̄ omnem, qm quoniam, ecc. „. Altre abbreviazioni più caratteristiche sono: " miđām (misericordiam), eaḡl̄m (evangelium), sr̄l (israel), aū od aut (autem), ūl (vel), sđā (secunda) „. Una lineetta orizzontale superiore serve in mezzo alla parola a compensare la scomparsa dell'*m* (quāvis), dell'*n* (persecūtur, cōdiendis), di *un* (egerˉt), di *en* (docum̄ta), di *er* (etn̄i); e in fine di parola serve anche per l'*it* (dix̄) e per l'*unt* (precesser̄). Il q̇ sta per " qui „ e per " quod „. Il segno ; compensa l'*ur* finale (prohibebat ;), l'*us* finale (caelestib ;) e serve ad abbreviare il *que* in fine e in mezzo di parola (atq ; q;rentes). Una virgoletta sopra la *t* sta in mezzo di parola per *er* (t'ra); in fine sta per *er* e per *ur* (significat', reficieban't, uniuersalit'). Segno dell'*us* finale è una specie di virgola sopra la parola (corp', ei'), che alle volte è pur segno di *ur* (merent'). La *p* ricorre con varie forme d'abbreviazione

(1) Op. cit., pp. 158 segg.

(2) Wattenbach, Op. cit., l. cit.; Prou, Op. cit., pp. 87 segg.

(3) Op. cit., p. 91.

(ꝓgenies, ꝑdicta, ꝑvilegio, suꝑbia) e nella forma $\overline{pp}$ per " propter ". Al posto della sillaba *rum* finale, è usata la solita abbreviazione della *r*.

Abbreviazione singolarissima è quella dell'*enim* che ci si presenta a guisa d'una piccola ancora coricata (7). Pensai dapprima che nell'intenzione del copista fosse uno dei cosidetti *tituli* usati sopra le lettere a sostituire l'*n* (1); o che derivasse dall'N che valeva a significare *enim*, se tagliato per metà da una lineetta inclinata N (2) o se racchiuso tra due punti (3). Ma è forse più probabile che sia una nota tironiana dell'*enim*, benchè nel Dizionario di paleografia latina del Kopp, non abbia precisamente la forma suindicata, bensì una forma di croce (per *enim*) e di ψ (per *enimvero* (4).

Possiamo pertanto assegnare come età del codice il sec. IX, che è pur l'età assegnatagli da C. Cipolla, al quale sono anche molto riconoscente per avermi assistito coi suoi consigli in questo qualsiasi studio (5); possiamo quindi sicuramente pensare che abbia errato chi appiè del frontespizio scrisse: " Codex X saeculi ".

Colla c. 98 la mano cambia, ma i caratteri paleografici rimangono quasi tutti gli stessi. Sono più frequenti peraltro le abbreviazioni e gli *a* aperti; e si preferisce davanti a vocale il *c* al *t* (discuciunt, spacium, sacerdocium, ociosum, tocius, particio, arcium, exercicium, noticia, senciebant, iusticia, proposicio, nequiciores, pocius, nupciali, hospicium, etc.). Tuttavia anche la prima mano avea scritto: " cercius, eciam, sacerdocium ". Abbiam quindi una conferma di quell'incertezza dell'uso del *c* e del *t* davanti a vocale, già notata e spiegata dal Rajna (6).

---

(1) Prou, Op. cit., p. 65.

(2) Wattenbach, Op. cit., p. 73.

(3) C. Paoli, *Le abbreviazioni nella paleografia latina del M. Evo*. Firenze, Le Monnier, 1891, pag. 10.

(4) U. F. Kopp, *Palaeographia latina*. Mannhemii, 1817, II, p. 114.

(5) Sono pur molto grato al cav. avv. F. Carta, prefetto della Nazionale di Torino, per avermi dato agio a studiar nelle sale riservate della Biblioteca il codice, che egli stesso e il Cipolla s'erano interposti presso il Ministero, perchè fosse temporaneamente traslocato a Torino.

(6) *Il trattato ' De Vulgari eloquentia '*. Firenze, Le Monnier, 1896, p. CLXII della Pref.

L'assimilazione tra consonanti non avviene che rarissime volte: " amonitus, amonentur „. Quasi sempre invece le consonanti rimangono intatte: " adsurgit, inlusus, inruerunt, inluminati, inliterati, inmerito, inpedimento, conloqui, adtestante, conburent, adsimilabitur, obpugnari, inmundi, inpulsu, etc. „.

È manifesto che nella pronuncia non si teneva conto dell'*h*: non la troviamo dove più ce l'aspetteremmo (abet, *con tutte le altre voci di questo verbo,* abitandum, orreum, erodes, iosep, neptalim, ominibus): e ci capita invece davanti dove meno l'avremmo attesa (prohice, introheat, humbra, hostendit, hac *per* ac, scophis *per* scopis, sadduchei, hoccasiones, his *per* is, etc.).

Alla storia esterna del codice molto importa una nota che una mano del secolo XVII appose nel margine superiore della guardia interna, c. 1ª *r*: " ex Bibliotheca lugdunensi ab | hęreticis combusta excerptus | codex venditus est ab Erretico | Exemptus a P. Joanne a Bosco Caelestino „. Di fronte a questa nota, vi ha un numero, che servì forse all'antica segnatura del cod. (CXLIIJ). Il fatto accadde di certo al tempo che le guerre di religione desolavano la Francia, quando fu pure incendiata la biblioteca dei francescani di Chartres (1568) (1).

Ma quali siano state le vicende anteriori del nostro manoscritto, quale sia la sua patria, a quale delle sette scuole paleografiche del tempo esso appartenga, è ben difficile poter giudicare. Certamente non mancano parole e forme glottiche caratteristiche, che farebbero alla prima assegnare un'origine particolare a preferenza e ad esclusione delle altre; ma si fan poi avanti altre forme che tolgono ogni valore all'argomento desunto dalle prime. Insomma, la varietà e disparità delle forme linguistiche, ben ci ritrae il lento e svariato elaborarsi dei linguaggi volgari nell'unità dell'impero carolingio. Vi son forme che paiono italiane, quali: storia, fugire, salmo, di (usato per la prepos. *de*); altre che paion dovute a influsso spagnuolo, come: favulis, invecillitas per imbecillitas, sivi per sibi, preventis per prebentis, acervitas per acerbitas, adoravis, devitoribus, manifestavit, per manifestabit, praeparavit per praeparabit, nouiscum; ed al contrario: plubia per pluvia, fribolis per frivolis, bibere

(1) Petit-Radel, *Recherches sur les bibliothèques anciennes et modernes jusqu'à la fondation de la bibliothèque Mazarine.* Paris, 1819, p. 165.

per vivere. Frequente è lo scambio della sorda colla sonora, dovuto probabilmente ad influsso germanico (gameli, adque, hypogrita, semedipsum, babtismate, eglesia, obtemus, obtimum), ed anche nelle finali (inquid, dereliquid, capud, ad *per* at), sebbene in esse avvenga di solito il fenomeno contrario (aliut, aput, illut, davit, at *per* ad) che una sola volta si nota pure al principio di parola, in centium per gentium. Una tendenza di quello che poi si chiamerà francese, si potrebbe forse scorgere in opera nei seguenti casi: gesse, magestatis, geiunio, contientiam per conscientiam, vexitur per vescitur, excelsum, exidetur, trecii per tercii, aguriantur.

Gli errori grammaticali abbondano specialmente nella prima parte che termina colla c. 97 *v*. Ma la colpa non ne va tutta data al copista, che pur non poche forme linguistiche volgari lasciò correre nella trascrizione. Prima ancora che i suoi avversarii glielo rinfacciassero (1), Claudio stesso riconosceva che gli facea difetto ogni coltura di lettere profane: " quod in me recognosco, pusillum habens intelligentiae eloquium; quia nec saecularis litteraturae didici studium, nec aliquando exinde magistrum habui " (2). Onde, al contrario di quel che suol accadere per gli altri scrittori, i manoscritti claudiani più antichi e che dovrebbero perciò essere i migliori, sono appunto quelli, come osserva il Dümmler (3), che più riboccano di spropositi grammaticali. Possiam di qui ricavare un'altra conseguenza, che cioè, sebbene tutto il codice sia stato trascritto indubbiamente durante il secolo nono, vi si debba riconoscere una parte più antica (cc. 2-97) di scrittura più bella e più larga e più chiara, ma anche più spropositata, ed una meno antica (cc. 98-202) d'altra mano e di scrittura più fitta, meno bella, ma anche più corretta.

---

(1) " Licet incondito ac rustico utpote ab homine doctrinalis experte " scientiae, sit haec edita contextu epistola ". Dungali, *Responsa contra perversas Claudii Taurinensis episcopi sententias*, in Migne, *P. L.*, CV, c. 467. — " Si ab his qui litteraria arte imbuti sunt vel tenuiter discutiantur pene " nihil in eis reperitur quo ars recte loquendi non offendatur, exceptis his " quae de aliorum opusculis furtim subribuit... ". Jona, *De cultu imaginum*, in Migne, *P. L.*, CVI, c. 312.

(2) *In libros informationum litterae* ecc., *P. L.*, CIV, c. 616.

(3) *Ueber Leben und Lehre des Bischofs Claudius von Turin*, in " Sitzungs. der kön. preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin ", 1895, p. 428.

Il manoscritto, di cui parliamo, non è il solo che ci conservi l'opera di paziente illustrazione al Vangelo di S. Matteo condotta a termine da Claudio nell' 815. Ben altri nove ne menziona il Dümmler (1), dei quali quattro in Inghilterra, a Londra e a Cambridge, uno a Berlino (proveniente da Reims) e a Troyes, entrambi del secolo IX, un altro a Tolosa, e due altri infine che ancora nel secolo scorso esistevano a Laone e a San Germain-des-Prés. Tra le opere esegetiche di Claudio è quindi quella che forse vanta maggior numero di codici. Dei commenti dell'Esodo (a. 821) e dei Numeri non ci rimane alcuna copia che si conosca; del commento della Genesi (a. 811) un solo manoscritto (Parigino 9575), uno del libro di Rut (a. 824) conservato a Mons, del Levitico (a. 823) a Reims, di Giosuè e dei Giudici (a. 825-6) a Parigi 2391, dell' epistola ai Galati (a. 814-816) a Parigi (2394 A); due del commento ai Re (a. 824 circa) a Pistoia e a Mantova, e delle epistole agli Efesi e ai Filippesi (a. 817) a Parigi e a Roma. Solo i commenti ad altre lettere paoline potrebbero gareggiare nel numero dei manoscritti col nostro commento di S. Matteo (2). Nessuna maraviglia perciò ch' esso non sia rimasto ignoto agli scrittori posteriori (3).

Sventuratamente il nostro codice non ci conserva intero il commento. Tra le due parti, che abbiam già distinto in esso, perchè di mano differente e per altre ragioni, vi ha discontinuità molto rilevante del testo, e sul finire ci colpisce pure un'altra brusca interruzione. Il che ci fa pensare che molti quaderni siano andati perduti prima che il codice fosse nuovamente rilegato. Per valutare la gravità del danno sofferto ci convien esaminare più da vicino il testo.

Non tenendo conto della c. 1 che non ha nulla che fare col resto, come quella che contiene una formola rituale di cui dovrà riparlare il chiariss. Prof. Patetta, la c. 2 *r* comincia con bella iniziale ornata così: " Domino sc̄o | hac bea | tissimo | et mihi | peculiari | cultu affectuq ; specialiter | excolendo patri iusto

(1) Op. cit., p. 430.

(2) Dümmler, Op. cit., l. cit.

(3) Comba, *Claudio di Torino*. Firenze, 1895, p. 145 seg. Egli li menziona ivi in un'appendice alla sua opera, dove pure descrive brevemente il codice di cui ci occupiamo (p. 154).

abbi | claudius peccator | Anno . dcccxv . incar | nationis saluatoris ihu | xp̄i dn̄i nr̄i. Postquam | pius hac mitissimus prin | ceps scāe di ecclesiae | catholicę . filius hludo | uuicus . anno secundo | imperii sui etc. etc. „. È la epistola dedicatoria a Giusto abate di Charroux, che lo aveva pregato di esporre il Vangelo di S. Matteo a edificazione dei suoi frati; già pubblicata varie volte, in piccola parte dal Baronio (all'a. 815, n. xxxi), intiera dal Mabillon, dal Mai, dal Migne e da ultimo con molto miglior apparato di critica dal Dümmler (1). Il resto del commento è rimasto sinora pressochè inedito, fatta eccezione di qualche breve frammento pubblicato dal Rudelbach e dall'Allix (2). La c. 5 *r* fa pompa anch'essa d'una bella iniziale (P) a fregi, in capo alle prime parole che sono: " Post aduuentum sp̄s sci sup discipulos suos die pentecostes . et deinceps etc. „. Claudio premette al suo commento in questa e nelle quattro carte seguenti, a guisa di prefazione, varie notizie generali intorno agli Evangelisti ed ai Vangeli, desumendole, quasi sempre alla lettera, da San Girolamo, da Beda, da San Gregorio Magno e da Sant'Agostino, com'è facile rilevare dal confronto del testo claudiano (cc. 5 *r*-6 *v* e 9 *v*) col Prologo del commento geronimiano a San Matteo (Migne, *P. L.*, XXVI, col. 18 e 19-20), col commento a S. Giovanni e colle Omelie di Beda (Claudio, c. 6 *r*, col. 2ª e c. 7 *v*, col. 2ª; Migne, *P. L.*, XCII, col. 638; XCIV, col. 38), colle Omelie intorno a Ezechiele di San Gregorio (Claudio, cc. 8 *r*, 2ª col.-9 *r*, col. 1ª; Migne, *P. L.*, LXXVI, 815-6) e col *De Consensu Evangelistarum* di Sant'Agostino (Claudio, cc. 9 *r*, 1ª col.-9 *v*, 1ª col.; Migne, *P. L.*, XXXIV, col. 1043).

Con la c. 10 *r* ha principio il commento, che Claudio divise in tre parti o libri, non in quattro, come, fondandosi, forse su altri codici, asserisce il Dümmler (3). La seconda e la terza parte portano in capo il proprio titolo di *Liber secundus* e *Liber tercius,* che qui invece manca per trascuraggine al certo del copista. Solo nel margine superiore della c. 47 *v* leggiamo scritto LIBR, a che risponde nella medesima carta *r* PRIOR, ma forse,

(1) *M. G. H.*, Epist. IV, pp. 593 seg.

(2) P. Allix, *Some remarks upon the ecclesiastical history of the ancient churches of Piedmont.* Oxford, 1821, pp. 67-70; Comba, Op. cit., p. 147.

(3) *Ueber Leben*, ecc., l. cit.

benchè paia della stessa mano che vergò il codice, è un'aggiunta posteriore, mancando siffatta indicazione in tutte le altre carte. Quasi al sommo della seconda colonna della c. 10 si legge scritto in caratteri onciali: " Incipium capitula subsequenti opuscula „. Seguono in carattere minuscolo i titoli o capitoli che si trovavan probabilmente nella bibbia di cui Claudio si serviva. Già da tempo s'era introdotta nelle bibbie l'uso dei capitoli, ossia del sommario, che dapprima naturalmente avea variato nel numero e nell' ampiezza dei titoli. Ma a nessuna delle parecchie forme di sommario del Vangelo di San Matteo esposte dal Berger (1), s'accosta quella seguìta da Claudio.

Confrontando il commento ai titoli del libro primo ci accorgiamo che non pochi di questi, e precisamente gli ultimi nove, non ricompaiano per nulla nel testo. La c. 97 *v* contiene l'esposizione del vers. " Et dicit eis: quid timidi estis etc. „ (c. VIII, v. 26), che appartiene al titolo " Ubi quidam dicit sequar te et ubi exitatus in naui imperauit uentum et mari „ che sarebbe, se numerato, il diciannovesimo. Convien supporre che non pochi quaderni siano andati per sventura smarriti.

La c. 98 *r* porta scritto in fronte alla prima colonna, in caratteri onciali: " incipiunt capitu | la liber secundus „. Seguono in minuscolo i titoli, che questa volta son numerati con cifre romane e dei quali, nessuno escluso, s'ha l'esposizione compiuta nel testo della c. 98 *v* alla 177 *r*. Precede in belle capitali, dipinte a rosso nella prima riga, a nero nella seconda e così alternativamente nelle altre, l' intestazione: " inci | pitli | bers ecun | dus „. Il primo vers. del libro: " Johannes autem cum audisset etc. „, sfoggia anch' esso una bella maiuscola ornata. Dei tre è questo il solo libro del commento claudiano che ci sia dal nostro codice conservato per intiero. Il libro termina con la c. 177 *r* appiè della 1ª col.: " explicit (*onciali*) | liber secundus (*capitali*) | dō gratias amen (*onciali*) | incipiunt | capitula | libri | trecii „ (*capitali*). Fra queste capitali notiamo una particolarità che ci conferma vieppiù l'antichità del codice: l'*i* di liber è tutto inscritto nell'L, l'*us* di secundus si legge nel vano nel D.

---

(1) *Histoire de la Vulgate pendant les premiers siècles du moyen âge.* Paris. Hachette, 1893, pp. 311 e 353.

Nella seconda colonna della medesima carta 177 *r* e nella 1ª col. del *verso* son riferiti i capitoli, ai quali tien dietro, al solito: " expliciunt capitula (*onciali*) incipit liber tercius „ (*capitali*). L'argomento di questo terzo libro può dirsi appena sfiorato nel commento, per colpa dello scrivente. Giunto il copista con la c. 201 *r* al terzo titolo, per una imperdonabile negligenza saltati a piè pari tutti gli altri, appose in capo alla c. 201 *v* il penultimo versetto di tutto il Vangelo " Euntes ergo docete etc. „. col rispettivo commento, a che fe' seguire l'ultimo versetto " Docentes etc. „. Ma un altro moto inesplicabile di pigrizia o altra qualsiasi ragione gli fe' anche di questo lasciare in tronco la spiegazione e in bianco la 2ª col. della c. 202 *v*. La 1ª col. termina così: " sic ueniet quemadmodum vidistis eum „. Nella colonna rimasta in bianco si leggon qua e là parole e proposizioni senza costrutto, scritte senza dubbio in qualche momento d'ozio da quei che possedettero per primi il codice: " istoria Gotramno — priusquam te formarem in utero hominis — gabriel angelus — cum coniuracione, etc. „. Vi fu anche chi con mano forse avvezza a far rider le carte di miniature, abbozzò nel mezzo del margine inferiore della c. 125 *v* una figura umana che le tinte troppo sbiadite non lascian più ravvisare.

Mentre i titoli del primo libro non si vedon mai segnati durante il corso del commento accanto al passo evangelico corrispondente, quelli invece del secondo e del terzo libro, qualche rara volta fan capolino accanto a un'altra numerazione del testo evangelico, la quale in questi ultimi due libri non è quasi mai tralasciata.

Il testo evangelico di cui Claudio si serve, si accosta al corbeiese più che agli altri testi evangelici, denominati *europei* perchè già noti e diffusi nell'occidente dell'Europa sin dal IV secolo in contrapposto agli *italiani* posteriori alla seconda metà. dello stesso secolo (1). Presenta anche più d'una somiglianza colla Volgata odierna; il che non poteva non essere dopo la riforma che Carlomagno aveva per opera d'Alcuino tentato d'introdurre nel testo biblico avvicinandolo alla bibbia geronimiana, riforma di cui ci son solenne documento le bibbie

(1) Berger, Op. cit., pp. 5 e sgg.

di Tours (1). Nessuna relazione ha il testo biblico claudiano colle celebri bibbie di Teodolfo, delle quali non avvera i caratteri indicati dal Berger (2).

Qua e là si osservano allato a certi versetti evangelici, alcune cifre romane in ordine progressivo, racchiuse di solito entro un *l* d'una forma strana, largo e slanciato, che farebbe dubitare di se stesso se una volta almeno non trovassimo scritta la parola intiera: " Levis ". Non accennano esse alla divisione attuale in capi ch'è stata, com'è noto, introdotta nella Bibbia da Stefano Langton durante il corso del secolo XIII, e molto meno a quella pure attuale, di versetti, che data dalla prima edizione della Bibbia procurata nel 1551 da Roberto Stefano. Ci troviamo invece dinanzi a quelle brevi pericope in cui andarono sin dal III secolo frastagliati i Vangeli per opera di Ammonio Alessandrino (355 nel Vang. di San Matteo; 236 in San Marco; 340 per Luca; 232 in San Giov.), e che furono adottate tra gli altri da Eusebio di Cesarea nei suoi *Decem Canones harmoniae Evangeliorum*, e da San Girolamo nel suo *Ordo Evangelicus* (3).

Il commento claudiano costituiva nella sua prima redazione (4) un volume così grosso ch'egli sentì il bisogno di mettere in guardia i monaci di Charroux a cui era indirizzato perchè non se n'avessero a spaventare: " non uos terreat prolixa expositio. nec uoluminis magnitudo " (5). Non era agevole impresa quella d'esporre la Sacra Scrittura, a causa della sua profondità, dell'altezza degli arcani celesti che sotto vi tralucono come la divinità del Verbo traluceva di sotto alla sua carne mortale:

---

(1) Richard Simon, *Critique de la Bibliothèque des auteurs ecclésiastiques de Du Pin*, 1730, I, 289: " Il (*Claudio*) suit partout la version de Saint Jerôme " qu'il appelle *novellam* ". Troppo recisa affermazione e che nel nostro caso non sempre concorda col fatto. — Berger, Op. cit., 184 sgg.

(2) Op. cit., p. 157.

(3) Migne, *P. G.*, XIV, 645; *P. L.*, XXIX, 526 sgg.; Berger, Op. cit., p. 329; Janssens, *Hermeneutica sacra*. Parisiis, 1835, p. 401.

(4) M'esprimo così, perchè potrebbe darsi che le redazioni dell'opera siano state due, differendo molto dagli altri i due mss. di Laone e di Saint Germain de Près, ora smarriti, dei quali si giovò il Mabillon (Cfr. Dümmler, Op. cit., l. cit.).

(5) C. 3 *r*, 2ª col.

" diuina optimaque dispensatione prouisum est. ut scriptura ipsa euangelica dñi nr̄i ita tegeretur caelestib; obumbrata mysteriis sicut secreto suo ipsa diuinitas operiebatur „ (1). " Sicut novissimis diebus Verbum Dei ex Maria carne vestitum processit in mundum, et aliud quidem erat quod videbantur in eo, aliud quod intelligebatur (carnis namque aspectus in eo patebat omnibus, paucis vero et electis dabatur divinitatis agnitio) ita et cum per prophetas vel legislatorem Verbum Dei profertur ad homines, non absque competentibus profertur indumentis. Nam sicut ibi carnis, ita hic litterae velamine tegitur: ut littera quidem aspicitur tanquam caro, latens vero spiritalis intrinsecus sensus tanquam divinitas sentitur „ (2). Le quali espressioni, che non dànno affatto sentore d'arianesimo, ci fanno anche intendere il perchè della preferenza data da Claudio all'interpretazione mistica o secondo lo spirito, morale e allegorica, sulla letterale.

Claudio stesso ci designa nella epistola dedicatoria le fonti a cui ha attinto: " euangelium scd̄m matheum. ex opuscolis sanctoꝝ patrum, licet non ad pur̄ quod etiam difficile est fieri tamen ut ualui inquirere atq; explanare conatus sum ex tractatib; doctorum et maiorum nr̄oꝝ qui nos in studio huius operis sicut scientiam ita et tempore p̄cesser̄ Idest. origenis. hylari ambrosii. hieronimi. agustini. rufini. iohannis. fulgentii. leonis. Maximi. Gregorii. et betae sed sicut in arche capitis inter om̄ia membra lingua plus membris om̄ib; sonat. ita in exponendo eglm inter om̄s est beatissimus agustinus multis etiam in locis ubi horum defuit sensus uel uerba hoc utcum; ualuit explere studiuit mea paupertas „ (3). Quello che Claudio voleva fare era insomma una *catena*. Per giudicare a dovere dell'opera sua, dovremo aver presente il fine ch'egli si è proposto.

L'esempio di Beda, autore di varie catene, d'Alcuino e di altri ancora, destò durante il secolo IX, quando la riforma carolina, d'indole essenzialmente religiosa, ebbe preso maggior piede, una fioritura non più vista di *catene patrum* intorno alla sacra scrittura, tale che non c'eran per nulla le greche. Primo

---

(1) C. 3 *r*, 1ª col.

(2) Claudii, *In libros informationum litterae et spiritus super Leviticum* in Migne, *P. L.*, CIV, c. 616.

(3) C. 2 *r*, 2ª col.; c. 2 *v*, 1ª col.

nella schiera poco, a dir vero, gloriosa, vien Claudio e con lui e dietro a lui Sedulio Scoto, Drutmaro, Smaragdo, Rabano Mauro, Pascasio Radberto, Aimone, Valafrido Strabone, ecc.; dei quali chi prese a soggetto principalmente il Vangelo di San Matteo, come Rabano, Drutmaro, Pascasio; chi le epistole e i Vangeli dell'anno, come Smaragdo; chi le epistole paoline, come Sedulio; e quale molti libri della S. Scrittura come Aimone; e quale tutta quanta addirittura, come Valafrido autore della Glossa che fece poi tanta fortuna (1).

Sulle orme di Beda Claudio s'era già messo quando avea scritto la sua prima opera esegetica sul Genesi (a. 811), e da Beda avea pur preso il costume, che mantiene anche nello scrivere il commento a Matteo e solo più tardi doveva smettere, di notare in margine per via d'iniziali gli autori ond'egli attingeva. Prima di proceder oltre nell'indagine delle fonti claudiane, riferirò la lista dei passi evangelici numerati in un colla lista delle rispettive sigle che si leggono in margine al commento e ne indicano le fonti. Sebbene più tardi Claudio si scusasse di aver smesso l'uso delle sigle marginali perchè s'era accorto di essersi qualche volta sbagliato nell'assegnare a qualche passo il suo proprio autore (2), tuttavia ho potuto accertarmi che per il nostro commento questo caso è tanto raro che può esser trascurato. Aggiungerò per maggior chiarezza l'indicazione delle pericope evangeliche anche quando non sono indicate nel codice, racchiudendole però in tal caso tra parentesi.

Dopo l'epistola dedicatoria a Giusto abate di Charroux e dopo la prefazione e il sommario già esaminati, Claudio premette ancora un breve proemio prima di passare al commento. Esso comincia appiè della prima col. della c. 11 *r* ed è preceduto da una bella capitale foggiata in figura di fantastico animale. Colla c. 11 *v*, col. 1ª comincia finalmente il commento coll'ordine e colle divisioni seguenti:

---

(1) Son tutte opere pubblicate dal Migne, *P. L.*, voll. CII, CVI, CXIII, CXVI, CXX, ecc.

(2) *In libros informationum* ecc., in Migne, loc. cit.; app. *M. G. H.*, Epist. IV, 603.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| C. 11 *v* | (I) | Liber generationis ihesu χp̄i . . . . | Iheronims - h. | Capo I, vers. 1 |
| „ 12 *v* | (II) | Omnes ergo generationes . . . . . | a̅. | „ „ „ 17 |
| „ 13 *v* | (III) | Xp̄i autem generatio sic erat . . . . | B̅. | „ „ „ 18 |
| „ 14 *r* | (IV) | Iosep aū uir eius . . . . . . . . | A - M - M - m - L. | „ „ „ 19 |
| „ 18 *r* | (V) | At illi dixerunt ei . . . . . . . | L. | „ II „ 5 |
| „ 18 *v* | (VI) | Tunc herodes clam . . . . . . . | G - A - Mx - M̅ - Fł - M̅ - h - h - B - B - h. | „ „ „ 7 |
| „ 22 *v* | (VII) | In diebus autem illis uenit . . . . | | „ III „ 1 |
| „ 23 *r* | (VIII) | Hic est enim qui dictus est . . . . | G. | „ „ „ 3 |
| „ 23 *r* | (IX) | Ipse autem iohannes . . . . . . . | M̅. | „ „ „ 4 |
| „ 25 *r* | (X) | Uidens autem multos fariseorum . . | G - h - G. | „ „ „ 7 |
| „ 27 *r* | (XI) | Ego quidem baptizo uos . . . . . | B h. | „ „ „ 11 |
| „ 27 *v* | (XII) | Cuius uentilabrum in. . . . . . . | B. | „ „ „ 12 |
| „ 28 *v* | (XIII) | Tunc uenit ihesus a galilea . . . . | h - B. | „ „ „ 13 |
| „ 29 *v* | (XIV) | Baptizatus autem ihesus . . . . . | h - a. | „ „ „ 16 |
| „ 30 *v* | XV | Tunc ihesus ductus est . . . . . . | B. | „ IV „ 1 |
| „ 31 *v* | (XVI) | Et cum ieiunasset XL diebus. . . . | hił-AM-hił-M̅ - h - M̅ - h - m - h. | „ „ „ 2 |
| „ 34 *r* | (XVII) | Tunc reliquit eum diabolus . . . . | G. | „ „ „ 11 |
| „ 34 *r* | (XVIII) | Cum audisset autem quod . . . . . | h. | „ „ „ 12 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| C. 34 *v* | XVIIIJ | Et relicta ciuitate Nazaret . . . . | | Capo IV, vers. 13 |
| „ 34 *r* | XX | Exinde coepit ihs pdicare . . . . . | h. | „ „ „ 17 |
| „ 34 *v* | (XXI) | Et ait illis uenite post me . . . . | | „ „ „ 19 |
| „ 35 *r* | (XXII) | Et procedens inde uidit. . . . . . | AG. | „ „ „ 21 |
| „ 35 *v* | (XXIII) | Et circumibat ihs totam . . . . . | AG. | „ „ „ 23 |
| „ 36 *v* | XXIIIJ | Uidens autem turbas . . . . . . | H - Ā. | „ V „ 1 |
| „ 37 *r* | (XXV) | Et aperiens os suum. . . . . . . | | „ „ „ 2 |
| „ 38 *r* | XXVI | Beati mites . . . . . . . . . . | | „ „ „ 4 |
| „ 38 *r* | (XXVII) | Beati qui lugent . . . . . . . . | | „ „ „ 5 |
| „ 38 *r* | XXVIII | Beati qui esuriunt . . . . . . . | | „ „ „ 6 |
| „ 39 *r* | XXVIIIJ | Beati misericordes . . . . . . . | | „ „ „ 7 |
| „ 39 *v* | XXX | Beati estis cum uobis . . . . . . | | „ „ „ 11 |
| „ 40 *v* | (XXXI) | Uos estis sal terre . . . . . . . | | „ „ „ 13 |
| „ 41 *r* | XXXII | Uos estis lux mundi . . . . . . . | hił - A. | „ „ „ 14 |
| „ 42 *v* | (XXXIII) | Nolite putare quoniam . . . . . . | | „ „ „ 17 |
| „ 42 *v* | (XXXIIIJ) | Amen quippe dico uobis . . . . . | H. | „ „ „ 18 |
| „ 43 *r* | (XXXV) | Qui enim soluerit . . . . . . . . | A.. | „ „ „ 19 |
| „ 46 *r* | XXXVI | Esto consentiens aduersario . . . . | | „ „ „ 25 |
| „ 49 *v* | (XXXVII) | Audistis quia dictum est . . . . . | | „ „ „ 27 |
| „ 60 *r* | (XXXVIII) | Sed si quis te percusserit | | „ „ „ 39 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| „ | 68 *r* | XL | Ego autem dico uobis diligite . . . | | „ | „ | „ | 44 |
| „ | 70 *r* | XLI | Si enim diligitis eos qui . . . . . | | „ | „ | „ | 46 |
| „ | 71 *v* | XLII | Attendite ne iustitiam . . . . . . | | „ | VI | „ | 1 |
| „ | 75 *v* | XLIII | Orantes autem nolite multum . . . | A - H.. | „ | „ | „ | 7 |
| „ | 77 *r* | XLIIIJ | Si enim dimiseritis hominibus . . . | | „ | „ | „ | 14 |
| „ | 77 *v* | XLV | Cum autem ieiunatis. . . . . . . | | „ | „ | „ | 16 |
| „ | 79 *r* | XLVI | Thesaurizate autem uobis . . . . . | | „ | „ | „ | 20 |
| „ | 79 *v* | XLVII | Lucerna corporis tui est . . . . . | | „ | „ | „ | 22 |
| „ | 80 *v* | XLVIII | Nemo potest duobus dominis . . . . | | „ | „ | „ | 24 |
| „ | 81 *v* | XLVIIII | Ideo dico uobis ne solliciti. . . . . | $\overline{\text{H}}$ - $\overline{\text{A}}$ - $\overline{\text{H}}$ - ā - $\overline{\text{H}}$ - $\overline{\text{A}}$ - $\overline{\text{H}}$. | „ | „ | „ | 25 |
| „ | 84 *r* | L | Nolite iudicare et non . . . . . . | | „ | VII | „ | 1 |
| „ | 84 *v* | LI | Quid autem uides ‖ fistucam . . . . | | „ | „ | „ | 3 |
| „ | 84 *v* | LII | Nolite sanctum dare canibus . . . . | | „ | „ | „ | 6 |
| „ | 85 *r* | LIII | Petite et dabitur uobis . . . . . . | | „ | „ | „ | 7 |
| „ | 86 *r* | LIIIJ | Omnia ergo quaecumque uultis . . . | | „ | „ | „ | 12 |
| „ | 86 *r* | LV | Intrate per augustam portam. . . . | H. | „ | „ | „ | 13 |
| „ | 87 *r* | LVI | Adtendite a falsis prophetis . . . . | | „ | „ | „ | 15 |
| „ | 87 *r* | LVII | Numquid colligunt de spinis . . . . | $\overline{\text{A}}$. | „ | „ | „ | 16 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| C. 87 *v* | LVIII | Omnis arbor bona . . . . . . . . | OR. | Capo VII, vers. 17 |
| „ 87 *v* | LVIIII | Non omnis qui dicit mihi . . . . . | A.. | „ „ „ 21 |
| „ 88 *r* | LX | Multi dicent mihi in illa die . . . . | | „ „ „ 22 |
| „ 88 *v* | LXI | Omnis ergo qui audit . . . . . . | | „ „ „ 24 |
| „ 89 *r* | LXII | Et factum est cum consumasset . . . | H.. | „ „ „ 28 |
| „ 89 *v* | LXIII | Cum autem descendisset . . . . . | $\bar{A}$ - H. | „ VIII „ 1 |
| „ 90 *r* | LXIIII | Cum autem introhisset Capharnaum . | B. | „ „ „ 5 |
| „ 91 *r* | LXV | Dico autem uobis quod multi. . . . | O$\bar{R}$G - hiR. | „ „ „ 11 |
| „ 92 *r* | LXVI | Et dixit ihs centurioni . . . . . . | O$\bar{R}$G - $\overline{AG}$. | „ „ „ 13 |
| „ 93 *r* | LXVII | Et cum uenisset in domum . . . . | $\bar{B}$ - $\bar{B}$ - $\overline{AG}$. | „ „ „ 14 |
| „ 94 *v* | LXVIII | Et accedens unus scriba . . . . . | | „ „ „ 19 |
| „ 95 *v* | LXVIIII | Et ascendente eo in nauicula . . . . | ORG. | „ „ „ 23 |
| . . . | . . . . . . | . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . | . . . . . . |
| „ 98 *v* | CII | Iohannis autem cum audisset . . . . | hił - h. | „ IX „ 2 |
| „ 100 *r* | CIIJ | Hic est enim de quo scriptum . . . | G. | „ „ „ 10 |
| „ 100 *r* | CIIIJ | Amen dico uobis non surrexit . . . | L - A. | „ „ „ 11 |
| „ 100 *v* | CV | A diebus autem . . . . . . . . | hil - G. | „ „ „ 12 |
| „ 101 *r* | CVI | Omnes enim prophete et lex . . . . | A. | „ „ „ 13 |
| „ 102 *r* | CVII | Cui autem similem aestimabo . . . | hil - Ag - h - A. | „ „ „ 16 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| „ 104 *r* | CX | In illo tempore respondens ihesus . . | A - hil - h. | „ | „ | „ | 25 |
| „ 104 *v* | CXI | Omnia mihi tradita sunt . . . . . | hil. | „ | „ | „ | 27 |
| „ 104 *v* | CXII | Et nemo nouit filium nisi . . . . . | A. | „ | „ | „ | 27 |
| „ 105 *r* | (CXIII) | Uenite ad me omnes. . . . . . . | | „ | „ | „ | 28 |
| „ 105 *r* | CXIIIJ | In illo tempore abiit ihesus . . . . | hier - B - A. | „ | XII | „ | 1 |
| „ 107 *r* | CXV | Aut non legistis in lege . . . . . | A - hil - h. | „ | „ | „ | 5 |
| „ 107 *r* | (CXVI) | Dominus est enim filius hominis . . | M̄ - ĀḠ - H - A.. | „ | „ | „ | 8 |
| „ 109 *r* | CXVII | Exeuntes autem pharisaei . . . . . | | „ | „ | „ | 14 |
| „ 109 *r* | CXVIII | Ihesus autem sciens secessit . . . . | B - L - h. | „ | „ | „ | 15 |
| „ 110 *r* | CXVIIIJ | Tunc oblatus est ei demonium . . . | | „ | „ | „ | 22 |
| „ 110 *r* | CXX | Et stupebant omnes turbe . . . . . | | „ | „ | „ | 23 |
| „ 110 *r* | CXXI | Pharisaei autem audientes . . . . . | | „ | „ | „ | 24 |
| „ 110 *r* | CXXII | Ihesus autem sciens cogitationes . . | H-B-hil-h-A-H-H. | „ | „ | „ | 25 |
| „ 112 *r* | CXXIII | Ideo dico uobis omne peccatum . . . | H - G. | „ | „ | „ | 31 |
| „ 112 *v* | CXXIIII | Aut facite arborem bonam. . . . . | H - A - L - A. | „ | „ | „ | 33 |
| „ 112 *r* | CXXV | Bonus homo de bono thesauro . . . | A - G - H. | „ | „ | „ | 35 |
| „ 113 *r* | CXXVI | Dico autē uob̄ q̄m̄ . . . . . . . | | „ | „ | „ | 36 |
| „ 113 *r* | CXXVII | Tunc responderunt ei quidam. . . . | H. | „ | „ | „ | 38 |
| „ 113 *v* | CXXVIII | Qui respondens ait illis generatio . . | R-G-A-B-H-A-hit. | „ | „ | „ | 39 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| C. 115 r | CXXVIIII | Cum autem immundus spiritus . . . | hil - h - B. | Capo XII, vers. | 43 |
| „ 116 r | CXXX | Adhuc eo loquente . . . . . . . | | „ „ „ | 46 |
| „ 117 r | CXXXI | In illo die exiens ihesus de domo . . | A - H - B - H - G - R - B. | „ XIII „ | 1 |
| „ 118 v | CXXXII | Qui enim habet dabitur ei . . . . . | h. | „ „ „ | 12 |
| „ 118 v | CXXXIII | Ideo in parabolis loquor . . . . . | A - A. | „ „ „ | 13 |
| „ 119 v | CXXXIIII | Uestri autem beati oculi . . . . . | B - M. | „ „ „ | 16 |
| „ 119 v | CXXXV | Uos ergo audite parabolam . . . . | B - G - A. | „ „ „ | 18 |
| „ 120 r | CXXXVI | Aliam parabolam proposuit illis . . . | AG. | „ „ „ | 24 |
| „ 123 v | CXXXVII | Aliam parabolam proposuit eis . . . | H - B. | „ „ „ | 31 |
| „ 124 r | vij CXXXVIII | Aliam parabolam locutus est eis . . | AG. | „ „ „ | 33 |
| „ 124 v | CXXXVIIII | Haec omnia locutus est ihs . . . . | | „ „ „ | 34 |
| „ 124 v | (CXL) | Tunc dimissis turbis uenit . . . . . | | „ „ „ | 36 |
| „ 127 v | CXLI | Et ueniens in patriam suam . . . . | L - A - hil - h. | „ „ „ | 54 |
| „ 128 v | viiij CXLII | Ihesus autem dixit eis non est propheta | H. | „ „ „ | 57 |
| „ 128 v | CXLIII | In illo tempore audiuit herodes . . . | Ag. | „ XIV „ | 1 |
| „ 129 r | x CXLIIII | Herodes enim tenuit iohannem . . . | H - B - L - ioh - B. | „ „ „ | 3 |
| „ 129 v | CXLV | Die autem natalis herodis . . . . . | H - B - H - m - A - hil. | „ „ „ | 6 |
| „ 132 r | CXLVI | Quod cum audisset ihs . . . . . . | hr. | „ „ „ | 13 |
| „ 132 v | CXLVII | Uespere autem facto accesserunt . . | A - H - A. | „ „ „ | 15 |
| „ 134 v | CXLVIII | Et statim compulit ihs | A | | 22 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| „ 135 r | CL | Uespere autem facto solus erat . . . | B - h - A - A. | „ | „ | „ | 23 |
| „ 136 v | CLI | Respondens autem petrus . . . . . | hił. | „ | „ | „ | 28 |
| „ 136 v | CLII | Et cum ascendissent in nauiculam . . | H - hił - A. | „ | „ | „ | 32 |
| „ 138 r | CLIII | Et cum transfretassent . . . . . . | hil - hil. | „ | „ | „ | 34 |
| „ 138 r | CLIIII | Tunc accesserunt ad eum . . . . . | h. | „ | XV | „ | 1 |
| „ 139 v | xii CLV | Tunc accedentes discipuli . . . . . | h - A. | „ | „ | „ | 12 |
| „ 140 r | CLVI | Sinite illos caeci sunt . . . . . . | h. | „ | „ | „ | 14 |
| „ 140 r | CLVII | Respondens autem petrus . . . . . | B - h. | „ | „ | „ | 15 |
| „ 141 r | CLVIII | Ipse autem respondens ait. . . . . | h - hil. | „ | „ | „ | 24 |
| „ 141 r | CLVIIII | Et illa uenit et adorauit . . . . . | L - R - A. | „ | „ | „ | 25 |
| „ 142 r | CLX | Et cum transisset inde . . . . . . | h - A - hil - B - L - G - A h - A. | „ | „ | „ | 29 |
| „ 146 r | CLXI | Et accesserunt ad eum pharisaei . . | hil - R. | „ | XVI | „ | 1 |
| „ 146 v | CLXII | At ille respondens ait illis facto . . | h. | „ | „ | „ | 2 |
| „ 146 v | CLXIII | Generatio mala et adultera . . . . | A - hil - H - R. | „ | „ | „ | 4 |
| „ 147 r | CLXIIII | Qui dixit illis intuemini . . . . . | H. | „ | „ | „ | 6 |
| „ 147 r | CLXV | At illi cogitabant inter se . . . . . | hil. | „ | „ | „ | 7 |
| „ 147 v | CLXVI | Uenit autem ihesus in partes . . . . | B - H - B - H - B. | „ | „ | „ | 13 |
| „ 148 v | xiiij CLXVII | Respondens autem ihs dixit ei beatus. | H - A - B. | „ | „ | „ | 17 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| C. 150 *r* | CLXVIII | Tunc praecepit discipulis suis . . . | L. | Capo XVI, vers. 20 |
| „ 150 *v* | CLXVIIII | Et assumens eum petrus . . . . . | | „ „ „ 22 |
| „ 150 *v* | CLXX | Tunc ihs dixit discipulis . . . . . | R - G - G - L - hil. | „ „ „ 24 |
| „ 152 *r* | CLXXI | Filius enim hominis uenturus est . . | | „ „ „ 27 |
| „ 152 *r* | CLXXII | Amen dico uobis sunt . . . . . . | A - h - B - Leo - R - B - L - L - B - h. | „ „ „ 28 |
| „ 155 *v* | CLXXIII | Et interrogauerunt eum discipuli . . | M. | „ XVII „ 10 |
| „ 156 *r* | CLXXIIII [xvi] | Et cum uenisset ad turbam . . . . | B - A - h. | „ „ „ 14 |
| „ 156 *v* | CLXXV | Tunc accesserunt discipuli . . . . . | hil - L - A. | „ „ „ 18 |
| „ 157 *v* | CLXXVI | Conuersantibus autem eis in galilaea . | h. | „ „ „ 21 |
| „ 157 *v* | CLXXVII | Et cum uenissent capharnaum . . . | A. | „ „ „ 23 |
| „ 158 *v* | CLXXVIII | In illa hora accesserunt discipuli . . | h. | „ XVIII „ 1 |
| „ 159 *r* | CLXXVIIII | Qui autem scandalizauerit . . . . . | G - Mx - L. | „ „ „ 6 |
| „ 160 *r* | CLXXX | Si autem manus tua . . . . . . . | B. | „ „ „ 8 |
| „ 161 *r* | CLXXXI | Uidete ne contempnatis . . . . . . | h. | „ „ „ 10 |
| „ 161 *r* | CLXXXII | Quid uobis videtur . . . . . . . | A. | „ „ „ 12 |
| „ 161 *v* | CLXXXIII [xvii] | Si autem peccauerint in te . . . . | G. | „ „ „ 15 |
| „ 162 *r* | CLXXXIIII | Si autem non te audierit . . . . . | | „ „ „ 16 |
| „ 162 *r* | CLXXXV | Amen dico uobis quecunque . . . . | A. | „ „ „ 18 |
| „ 162 *r* | CLXXXIIIII | Iterum dico uobis . . . . . . . | h. - hil. | „ „ „ 19 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| „ 163 *r* | CLXXXVIII | Ideo adsimilatum est . . . . . . . | A - h - A - G. | „ | „ | „ | 23 |
| „ 163 *v* | CLXXXVIIII | Et factum est cum con ‖ sumasset . . | $\overline{RG}$ - hil | „ | XIX | „ | 1 |
| „ 165 *r* | CXC | Dico autem uobis . . . . . . . . | | „ | „ | „ | 9 |
| „ 165 *r* | CXCI | Dicunt ei discipuli . . . . . . . | L. | „ | „ | „ | 10 |
| „ 166 *r* | CXCII | Tunc oblati sunt ei . . . . . . . | ioh - L - ioh - ioh - h. | „ | „ | „ | 13 |
| „ 166 *r* | CXCIII (xviiij) | Et ecce unus accedens . . . . . . | L - R - ioh - B - A. | „ | „ | „ | 16 |
| „ 167 *r* | CXCIIIJ | Ait illi ihs si uis . . . . . . . . | | „ | „ | „ | 21 |
| „ 167 *r* | (CXCV) | Cum audisset autem adolescens . . . | R - h. | „ | „ | „ | 22 |
| „ 168 *r* | CXCVI | quid ergo erit uobis . . . . . . . | H - A - h. | „ | „ | „ | 27 |
| „ 168 *v* | (CXCVII) | sedebitis et uos . . . . . . . . | A.. | „ | „ | „ | 28 |
| „ 169 *r* | (CXCVIII) | Et omnis qui reliquerit . . . . . . | h - B. | „ | „ | „ | 29 |
| „ 169 *v* | (CXCVIIIJ) | Multi autem erunt primi . . . . . | | „ | „ | „ | 30 |
| „ 169 *v* | CC (xx) | Simile est enim regnum celorum homini | L - G - G - A - inłr - ioh - h - h - ioh - G. | „ | XX | „ | 1 |
| „ 173 *r* | CCI | Et ascendens ihs iherosolimam . . . | h - R. | „ | „ | „ | 17 |
| „ 173 *r* | CCII (xxi) | Tunc accessit ad eum mater . . . . | ioh - H - ioh - ioh - ioh - B - ioh - G. | „ | „ | „ | 20 |
| „ 175 *r* | CCIII | Et audientes decem indignati . . . . | H - ioh - H - maxi. | „ | „ | „ | 24 |
| „ 175 *r* | (CCIIII) | Sicut filius hominis non uenit . . . | | „ | „ | „ | 28 |
| „ 175 *v* | CCV | Et egredientibus illis ab Iericho . . . | A - H - A - H - G - A - B. | „ | „ | „ | 29 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| C. 177 *r* | CCVI | Et cum adpropinquassent iherosolimis . | H - B - ioh - B. | Capo XXI, vers. 1 |
| „ 178 *r* | CCVII | Hoc autem totum factum . . . . . | ioh - ioh - B. | „ „ „ 4 |
| „ 179 *r* | CCVIII | Euntes autem discipuli fecerunt . . . | H - ioh - B - B. | „ „ „ 6 |
| „ 180 *r* | CCVIIII | Turbae autem quę precedebant . . . | B - ioh. | „ „ „ 9 |
| „ 180 *r* | CCX | Et cum intrasset iherosolimam . . . | H. | „ „ „ 10 |
| „ 181 *r* | CCXI | Et intrauit ihs in templum . . . . | G. | „ „ „ 12 |
| „ 182 *v* | CCXII | Et accesserunt ad eum . . . . . . | ioh. | „ „ „ 14 |
| „ 182 *v* | CCXIII | Uidentes autem principes . . . . . | H - ioh. | „ „ „ 15 |
| „ 183 *r* | CCXIIII | Et relictis illis abiit foras . . . . . | H - ioh - H - G - R - h - A - h. | „ „ „ 17 |
| „ 184 *r* | CCXV | Respondens autem ihs ait eis . . . | A. | „ „ „ 21 |
| „ 184 *v* | CCXVI | Et omnia quaecumque . . . . . . | B. | „ „ „ 22 |
| „ 185 *r* | CCXVII | Et cum uenisset in templum . . . . | H - R - H - B - A. | „ „ „ 23 |
| „ 186 *r* | CCXVIII | Quid autem uobis uidetur . . . . . | ioh - ioh - H - hil. | „ „ „ 28 |
| „ 187 *v* | CCXVIIII | Aliam parabolam audite . . . . . | R - H - ioh - H - R - A - R - A. | „ „ „ 33 |
| „ 193 *r* | CCXX | Et cum audissent principes . . . . | H. | „ „ „ 45 |
| „ 193 *v* | CCXXI | Et respondens ihs dixit iterum . . . | ioh - ioh - G - H - ioh - H - G - H - ioh - G. | „ XXII „ 1 |
| „ 198 *v* | CCXXII | Intrauit autem rex . . . . . . . . | G - H - A. | „ „ „ 11 |
| . . . | . . . . . . | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . | . . . . . . . |
| 201 [illegible] | (CCCLV) | [illegible] | [illegible] | [illegible] |

Basta una sola occhiata a questa tavola per capacitarsi che la conoscenza che Claudio avea dei Padri della Chiesa era molta e svariata, e per comprendere come anche più tardi in mezzo ai molteplici affari, abbia potuto condurre a termine sì gran numero di commenti. Nessuno può contestargli almeno il merito della operosità (1). L'ordine dato da Claudio alle sue schede avrebbe potuto esser migliore, ma non era stato in suo potere il rimediare a tal difetto: " Quod uero quedam minus ordinata condecet. In hoc codice multa reperiun't, non om̃ia tribuas inperitiae, sed quedam p̄p̄ paupertatē, quedam ignosce. p̄p̄ corporis infirmitate et meorum oculorum inbecillitatem, quia non fuerunt in tabellis exepta uel scedulis digesta sed ut a me inueniri uel disceri potuerunt ita in hoc adfixa codicae sunt „ (2).

Confrontando i vari passi riportati nel commento coi passi delle opere degli autori ivi citati si trova che quasi sempre si rispondono alla lettera. Nel mettersi all'impresa egli, come s'è visto, non s'era proposto di fare opera originale. Tutti gli autori di cui ha professato d'aver intessuto il suo commento ricompaiono in questo più o meno volte. Non fa come altri commentatori del tempo, a lui quasi coetanei, che dopo aver enumerati nella prefazione gli autori che loro son serviti di fonte, ne tiran poi in mezzo altri nel corso dell'opera, come fa ad esempio Rabano Mauro per Beda e per Origene. Onde a lui va data in questo lode di lealtà letteraria.

A Claudio è molto ben noto San Girolamo che cita almeno un centinaio di volte col nome intiero da principio (Iheronimus) e in seguito con sigla spesso varia (h, H, hR, HR, hier, hiR). Ma di lui non mostra di conoscer quasi altro che il commento a San Matteo (Cfr. Hieronymi, *Commentaria in Ev. S. Mt.* in Migne, *P. L.*, XXVI, col. 21 sg. col commento claudiano, c. 11 *v*-13 *r*; col. 25 con c. 15 *v*; col. 28 con c. 21 *r*; c. 29 con c. 22 *v* e sg.; col. 30 sg. con c. 26 *v* e sg.; col. 31 con c. 33 *r*; col. 32 con c. 33 *v*; col. 33 con c. 34 *v* e 37 *r*; c. 36 con c. 42; c. 45 con c. 81 *v* e 82 *r*; c. 46 con c. 83 *r* e 84 *r*; c. 47 con c. 86 *v*.; c. 69 con c. 98 *v* e 99 *r*; c. 75 con c. 104 *v*; c. 80 con c. 111 *v*: c. 117 con c. 149 *r*; c. 116 con c. 148 *r*; c. 52 con c. 91 *v*; c. 126

(1) Dümmler, *Ueber Leben und Lehre* ecc., loc. cit., p. 429.
(2) C. 3 *r*, 1ª e 2ª col.

con c. 157 *v*; c. 128 con c. 159 *r*; c. 131-132 con c. 162 *v*; c. 137 con c. 167 *r*; c. 139 con c. 169 *r*; c. 144 con c. 175 *r*; c. 152 con c. 182 *v*; c. 154 con c. 185 *r*; c. 156 con c. 187 *r*; c. 159 con c. 196; c. 218 con c. 201 *r*). Forse da qualche passo interpolato al prologo geronimiano, che Claudio riferisce quasi per intiero nella sua prefazione, si potrebbe dedurre che conoscesse pure l'altra opera di Girolamo " De viris illustribus „ (Cfr. in MIGNE, *P. L.*, XXIII, c. 619 con c. 5 *v*). Non conobbe l'" Expositio in quatuor Evangelia „ (MIGNE, *P. L.*, XXX, 531 sgg.) falsamente attribuita a San Girolamo.

Dopo S. Girolamo, gli autori che più mette a profitto sono S. Agostino e Beda, citati l'uno settantacinque l'altro quarantasette volte. Al primo egli ebbe a professar più volte, e anche nel proemio a questo suo commento, alta stima e profonda e religiosa venerazione: " Amantissimus Domini sanctissimus Augustinus, calamus Trinitatis, lingua Spiritus Sancti, terrenus homo sed coelestis angelus, in quaestionibus solvendis acutus, in revincendis haereticis circumspectus, in explicandis scripturis canonicis cautus, etc. „ (1); il secondo egli avea preso a modello perfino nel compilare la sua catena. Il nome dell'uno che spesso compare in margine (A, a, AG, Aug) e qualche volta pure si tace, sta ad indicare quattro opere del vescovo d'Ippona, cioè:

1. *De consensu evangelistarum,* la più spesso citata (Cfr. MIGNE, *P. L.*, XXXIV, c. 1074 con c. 13 *r* del commento claudiano; c. 1092 con c. 30 *r*; c. 1096 con c. 35 *r*; c. 1095 con c. 36 *r*; c. 1101 con c. 92 *v*; c. 1103 con c. 94 *r*; c. 1132 con c. 149 *r*; c. 1139 con c. 182 *v*; c. 1145 con c. 201 *r*; c. 1143 con c. 190 *r*).

2. *De sermone Domini in monte,* che Claudio riferisce a suo luogo quasi per intiero e alla lettera (2) (Cfr. cc. 37 *r* e sg., 40 *v* sgg., 81 *v* sgg., 83 *v*, 85 *r* rispettivamente colle coll. 1231, 1237, 129, 1294, 1298 del vol. 34 del MIGNE, *P. L.*).

3. *Quaestiones Evangelicae* (MIGNE, *P. L.*, vol. 35, col. 1323 con c. 195 *r*; col. 1328 con c. 175 *v*).

4. *Contra Faustum* (MIGNE, *P. L.*, vol. 42, col. 213 con c. 19 *r*).

---

(1) *Elogium S. Augustini*, in MIGNE, *P. L.*, CIV, c. 928.

(2) Onde a ragione dice il COMBA (Op. cit., p. 155) che " tutta l'esposizione del sermone sul monte si rileggerebbe con profitto „. Ma non c'è bisogno di ricorrere a Claudio; basta consultare S. Agostino.

Di Beda (B) non conosce forse altro che le omelie (Cfr. Migne, *P. L.*, vol. 94, col. 32 con c. 16 *r*; c. 34 con c. 16 *v*; c. 31 con c. 14 *r* sg.; c. 59 con c. 29 *r*; cc. 219-223 con cc. 147 *r*-150 *r*; c. 52 con 21 *v*; c. 121 con c. 177 *v*). Da un passo si potrebbe congetturare che ne conoscesse pure il commento a San Matteo (Cfr. Migne, *P. L.*, XCII, col. 17 con c. 27 *v*) come di certo ne conosceva quello su S. Giovanni.

D'un altro commento a Matteo si giovò pure, ed assai largamente: del commento del celebre vescovo di Poitiers, Sant'Ilario, a cui Claudio ci rimanda (hil) almen 29 volte (Cfr. Migne, *P. L.*, IX, col. 928 con c. 31 *v*; col. 935 con c. 41 *r*; col. 979 con c. 98 *v*; col. 984 con c. 104 *v*; col. 988 con c. 110 *v*; col. 991 con c. 114 *v*; col. 996 con c. 128 *r*; col. 998 con c. 131 *v*; col. 1002 con c. 137 *v*; col. 1003 con cc. 137 *v*, 138 *r* e 141 *v*; col. 1007 con c. 146 *v*; col. 1023 con c. 164 *r*; col. 1041 con c. 187 *v*).

Dei due celebri papi, S. Gregorio Magno (G.) e S. Leone Magno (Leo, L) ebbe presenti al pensiero e non poche volte gli ricorsero sotto la penna (28 volte G.; 18 L.) le *Homiliae in Evangelia,* opera così popolare dell'uno, e i *Sermones,* opera profonda dell'altro (Migne, *P. L.*, LXXVI, col. 1111 con c. 18 *v*; col. 1163 con c. 25 *v*; col. 1164 con c. 26 *v*; col. 1165 con c. 27 *r*; col. 1131 con c. 117 *v*. — Ib., LIV, col. 236 con c. 17 *v*; col. 246 con c. 18 *r*; col. 238 con c. 18 *v*; col. 311 con c. 154 *r*; col. 312 con c. 154 *v*). Però la prefazione premessa al commento, della quale già si è parlato, ci mostra che Claudio conosceva pure di S. Gregorio le omelie su Ezechiele.

Ricorre a S. Ambrogio almeno due volte, e precisamente alla sua *Expositio Evangelii secundum Lucam* (Migne, *P. L.*, XV, cc. 1617-1618 con c. 31 *v*; coll. 1636-7 con c. 90 *r*); e a S. Fulgenzio in un passo attorno all'adorazione dei magi che non si riscontra nelle sue opere edite, neppure col suo sermone intorno all'adorazione dei magi, e che potrebbe perciò essere un avanzo, misero avanzo, d'un'omelia smarrita (c. 20 *r*).

Altri scrittori latini citati da Claudio sono San Massimo (M., m., Mx., maxi. — 16 volte) e Rufino (R. — 14 volte). Quanto al primo gioverebbe per vari rispetti, se la brevità di questa nota ce lo consentisse, mettere in rilievo quali pagine delle sue opere avessero maggiormente fermata l'attenzione di colui che doveva essere creduto, se a torto o a ragione non c'importa

per ora esaminare, un così infame successore nella sua cattedra vescovile. Ma anch'esse si posson facilmente riscontrare nel Migne (*P. L.*, LVII, col. 284 con c. 17 *r*; col. 285 con cc. 17 *v* e 18 *r*; col. 281 con c. 19 *v*; col. 283 con c. 20 *r*; col. 286 con c. 21 *r*; col. 326-7 con c. 32 *r*; col. 321 con c. 32 *r*; col. 327 con c. 32 *r*; col. 320 con c. 32 *v*; col. 323 con c. 32 *v*; col. 321 con c. 34 *r*; col. 448 con cc. 159 *v*-160; col. 447 con c. 175 *r*), ad eccezione di tre passi che non trovandosi fra le opere edite del Santo, suppongo che siano stati attinti a qualche sua omelia smarrita o dalla sua esposizione del Vangelo che ci è pervenuta in istato frammentario (1). Dagli altri luoghi or citati non solo si fa manifesto lo studio e l'amore messo da Claudio nello sfogliare le sue omelie, ma, se non m'inganno, risulta chiaro che da quella lettura e da quello studio venne egli a formarsi nella mente un concetto tutto suo dell'" adoratio ", che sfuggì sinora a quanti parlarono di lui. Inoltre il biasimo d'idolatria, non di rado inflitto da San Massimo al suo popolo (2), mentre ci fa conoscere che ancor nel IV-V secolo perduravano le superstizioni pagane, doveva dar a Claudio una sinistra idea dei torinesi.

Rispetto alla fonte claudiana segnata con R e che risponderebbe al " Rufinus " nominato da Claudio nell'epistola dedicatoria, ci si presenta una grave questione che s'è già affacciata al Mai, al Rose, a Trombelli, al Dümmler, ma che, a giudizio di quest'ultimo, abbisogna ancora, perchè possa esser risolta, d'un esame più diligente e minuto (3). È appunto questo ch'io ho tentato di fare. Sorta dal notare che si fece l'identità di qualche passo dei commenti claudiani con qualche altro di Rabano Mauro, fu risolta dal Mai nel senso dell'originalità di Rabano. Egli appoggiò la sua asserzione sopra un solo luogo del commento claudiano (cap. V, vers. 32: " Omnis qui dimiserit uxorem suam excepta fornicationis causa etc. ") che nel codice ch'egli aveva tra mano era contrassegnato con la sigla R. e

(1) Migne, *P. L.*, LVII, c. 807 sgg. — Solo un sermone non autentico di S. Massimo presenta qualche espressione analoga a quelle che Claudio adopera parlando di S. Giovanni (Migne, Ib., col. 864; Claudio, cc. 23-24).

(2) Migne, *P. L.*, LVII, cc. 659, 610, 562, 322, 418-419.

(3) " Es scheint dass sogar der berühmte Raban von Fulda, der in ganz " ähnlichen Weise mosaikartig arbeitete, heraugezogen hat, doch bedarf " diese Annahme noch einer näheren Prüfung ". Dümmler, Op. cit., p. 442.

rispondeva appuntino a un passo di Rabano. Di qui trasse pure la conseguenza che il copista avesse nella dedica, dove Claudio indica esplicitamente tra le sue fonti anche Rufino, scritto Rufino invece di Rabano (1). Se non che nel nostro codice non appare nessuna sigla al luogo indicato (c. 55 *r*); il passo poi è uguale in entrambi, ma la fonte è comune, S. Agostino; infine in tutti i codici più antichi si trova scritto nella epistola dedicatoria il nome di Rufino, non mai quello di Rabano (2). Il rapporto di dipendenza ammesso dal Mai accettò pure il Rose (3). Ma ad altri, come al Dümmler, parve più vicino al vero far dipendere con ordine inverso Rabano da Claudio (4). A che si potrebbe opporre che Rabano in nessuna sua opera accenna mai, neanche di sfuggita, a Claudio; e che nel commento dell'abate fuldese a San Matteo i passi corrispondenti ai claudiani sono spesso contrassegnati con *Rab.* e quindi attribuiti a lui. Forse, o io m'inganno, vi si nasconde sotto un grosso abbaglio preso dai copisti o dagli editori, che quando fosse, sarebbe sciolto senz'altro il nodo intricato della questione.

Nel corso del commento di Rabano Mauro quale fu ristampato dal Migne, si notano non pochi passi che portano in capo il nome del loro autore (*Maur.* oppure *Maurus*). È egli possibile che questo doppio richiamo d'una medesima fonte (*Rab.* e *Maur.*) risalga allo stesso autore, a Rabano? Vero è che s'era egli proposto, come dichiara nella prefazione, di aggiungere di suo, dove gliene venisse il destro, alle molte citazioni dei Padri; ma aveva anche dichiarato espressamente che avrebbe indicati i brani suoi " *cum nota vocabuli agnominisque mei* „ cioè, a parlare propriamente e sciogliendo l'evidente endiadi, colla sigla della voce del suo soprannome, che era *Mauro* (5). Qualche ine-

---

(1) Migne, *P. L.*, CIV, col. 835, nota *b*.

(2) *M. G. H.*, Epist. IV, p. 588.

(3) *Katalog der Meermanhss.*, p. 96, cit. dal Dümmler, l. cit.

(4) " Rabanus ipse Fuldensis abbas doctissimus, nisi fallor, subsidio " eorum libenter usus est „. Dümmler, in *M. G. H.*, IV, p. 588.

(5) " Il a constamment désigné en marge les auteurs par les lettres " initiales de leur nom, et ses propres explications par le nom de Maurus „. A. Ebert, *Hist. gén. de la Litt. du M. Age en Occident*, trad. Aymeric-Condamin, II, Paris, 1884, pag. 147.

sperto copista posteriore convertì l'R. marginale in Rab., se pure non furono addirittura i primi editori.

La congettura or esposta è confortata da qualche altro argomento. Uso di Rabano Mauro in altri suoi commenti o *catene* fu d'indicare sè stesso con l'iniziale del suo soprannome cioè con M. (1). Inoltre, il commento di Rabano che cominciò a scrivere la sua prima opera nell'815 (2), è al certo posteriore a quello di Claudio composto in quell'anno per l'appunto: or i passi che in Claudio si trovano maggiormente simili a quelli di Rabano son quelli che portano per contrassegno la lettera R (per la quale, com'egli ci ha detto, intende Rufino) e che corrispondono ai passi segnati con *Rab.* nel commento del Fuldese. Nè se ne può perciò conchiudere che Rabano abbia avuto sott'occhio il commento di Claudio, perchè i detti passi non si corrispondono poi per la lunghezza e si differenziano per altre particolarità: se ne può bensì trarre, a quanto mi pare, la legittima conclusione che ambedue abbiano attinto ad una fonte comune.

Se così è, ci troviam davanti, come già per San Massimo, agli avanzi d'un'opera sconosciuta d'un Rufino, probabilmente di Rufino d'Aquileia, autore d'un commento al Credo e creduto autore di vari altri commenti (3). La polemica che ebbe a sostenere con San Girolamo, lo fece decadere nell'opinione pubblica dei contemporanei e dei posteri e coperse d'oblio questa e forse anche altre sue opere. Ma Claudio e Rabano ce n'hanno per fortuna conservati i frammenti nelle lor catene, simili in questo alle greche che ci han serbate le reliquie di antichi scrittori greci (4).

I passi di Rufino che, secondo questa congettura, si troverebbero, nei commenti di Claudio e di Rabano si possono riscontrare a cc. 113 *v*, 116 *v*, 117 *v*-118 *r*, 141 *v*-142 *r*, 146 *v*, 147 *r*, 150 *v*, 152 *r*, 163 *v*, 167 *r* del nostro codice, e nelle colonne rispettivamente corrispondenti del vol. CVII della *Patr. Lat.* del

---

(1) Anche nel comm. a S. Matteo, la prefaz. al lib. VIII che è certo di Rabano, è segnata con *Maur.* e non con *Rab.* (Migne, CVII, 1097).

(2) Migne, *P. L.*, CVII, col. 65.

(3) Migne, *P. L.*, XXI.

(4) Richard Simon, *Hist. crit. des principaux commentateurs du Nouveau Testament.* Rotterdam, 1693, pp. 437.

Migne, cioè cc. 933, 937, 940-941, 980-981, 986-987, 987, 994, 995, 1015-1016, 1021. A mostrarci una volta di più la non dipendenza di Claudio da Rabano valgono due passi che son contrassegnati con *R.* nel commento claudiano e mancano in quello di Rabano (a cc. 183 *v*, 173 *v*; col. 1044 e 1030). In questo invece si trovano molti altri passi, che Claudio non riportò dall'opera di Rufino, alle coll. 753, 866, 872, 934, 938, 949-950, 955, 956-958, 966-7, 970, 978, 983, 997, 1001, 1007, 1019, 1020, 1025, 1031, 1032, 1039, 1043, 1051, 1067, 1069, 1076, 1078, 1079, 1100, 1102, 1105, 1113, 1121-2, 1138-9, 1141-2, 1146 del vol. del Migne ora citato.

Dei Padri greci quello che Claudio più spesso cita è San Giovanni Crisostomo, che colle sue lettere iniziali (ioh) compare in margine ben ventotto volte, mentre Origene, l'altra fonte greca a cui attinge, non vi appare che quattro (OR, O̅R̅G).

Di San Giovanni Crisostomo ignora le omelie genuine su San Matteo (1) e solo si vale del commento che va sotto il titolo di " Opus imperfectum in Matthaeum ". Attribuito dapprima al Crisostomo, gli fu poi a ragione ritolto e giudicato opera d'un ariano della fine del sesto o del principio del settimo secolo. Sia che l'autore medesimo per accreditare la sua esposizione, le mettesse in fronte il nome del celebre padre greco, sia che più tardi fosse a lui aggiudicata, certo si è che nel nono secolo la si riteneva generalmente come opera genuina (2). I vari passi che Claudio ne riferisce sono immuni di errore, fuorchè uno, che farebbe nascere qualche sospetto se non fosse tolto dalla creduta opera d'un santo (3) (Cfr. S. Ioan, Chrys., *Opus imperfectum in Matt.* in Migne, *P. G.*, XXX, c. 804 con c. 166 *r*; c. 807 con c. 166 *r*; c. 822 con c. 172 *v*; c. 828 con c. 174 *v*; c. 836 con c. 178 *v*; c. 842 con c. 182 *r*; c. 859 con c. 193 *r*; c. 849 con c. 186 *r*-186 *v*).

---

(1) Migne, *P. G.*, XXXI, col. 21 sgg.

(2) Ond'è che anche Rabano, non sospetto al certo d'arianesimo, l'adopera credendola anch'egli del Crisostomo. Cfr. Rabani, Op. cit., loc. cit., col. 1036, coll'*Opus imperfectum*, l. cit., col. 836 e 834, e colle *Homiliae*, l. cit. c. 627-628 e col. 873, 1037, 1050, 1054, 1065, 1073.

(3) " Non dixit disce mandata quia deus docuerat eum factor naturę rationalis ", c. 166 *v*.

Di Origene, che nella serie dei dieci autori conosciuti da Claudio abbiam lasciato per ultimo, dobbiam ripetere il già detto rispetto a S. Massimo e a Rufino. Del commento origeniano di San Matteo non si posseggono ormai più per intiero che i libri 10-17 (1), mentre le quattro citazioni claudiane si riferiscono a qualcuno dei libri precedenti, non sappiamo ben a quale (cfr. cc. 87 *v* col. 2ª; 91 *r* col. 2ª-91 *v* col. 1ª; 92 *r* col. 2ª; 95 *v* col. 2ª).

Alcuni altri passi di Origene cita Rabano Mauro nel suo commento (coll. 752, 847, 848, 865), i quali anch'essi non si trovano nelle opere che di Origene ci son rimaste.

Ci rimane infine a considerare il commento claudiano in relazione alle accuse d'eresia che più volte e da varie parti si son mosse al vescovo di Torino. L'uso ch'egli fa di Origene non ci può mettere per sè medesimo in sospetto sia per l'indole dei passi che ne riporta, sia perchè anche altri scrittori del tempo, come Rabano Mauro e Smaragdo (2), traggon partito a tutto andare delle opere origeniane. Sono innumerevoli in cambio i luoghi in cui parlando delle relazioni del Figlio col Padre non si lascia mai sfuggire alcuna espressione che possa aver sentore, anche lontano, d'arianesimo. Il che fa al certo maraviglia in uno che, come pochi anni dopo la sua morte ne l'accusava Giona (3), aveva lasciato un armadio del palazzo episcopale, a quanto si diceva, pieno di libri ariani. Tante volte si presentò a Claudio l'occasione, citando un detto altrui intorno alla Trinità divina, di dar ad esso con una lieve aggiunta o cambiamento un senso conforme alle dottrine ariane; tante volte avrebbe potuto servirsi dei passi che nel commento di San Giovanni Crisostomo egli ravvisava più apertamente ariani: eppure non lo fece. Lo stesso si dica dell'accusa di adozianismo che, come a creduto discepolo di Felice d'Urgel, gli venne fatta.

Da Beda (4) riferisce Claudio alla lettera la seguente spie-

---

(1) Otto Bardenhewer, *Patrologie*, Freiburg im Breisgau, 1894: p. 155. — Migne, *P. G.*, X, c. 565, sgg.

(2) Cfr. Migne, *P. L.*, CII, c. 13.

(3) *De cultu imaginum*, in Migne, *P. L.*, CVI, c. 306.

(4) *Homiliae*, in Migne, *P. L.*, XCIV, c. 32.

gazione del vers. 23, c. I: " Et vocabantur nomen eius emanhuel etc. Nomen saluatoris quod nouiscum deus a propheta uocatur. utramque naturam unius persone ipsius significat. qui enim ante tempora natus ex patre deus est ipse in plenitudine temporum emanuel nobiscum deus in utero matris factus est quia nostre fragilitatem naturae in unitatem persone suscipere dignatus est. — Quando uerbum caro factum est et habitauit in nobis Mirum | uidelicet in modum incipiens esse quod nos sumus et non desinens esse quod erat. sic adsumens naturam nostram ut quod ipse erat non perderet " (c. 16, col. 1ª e 2ª). A S. Agostino (1) ricorre per il commento del vers. 9, capo II: " Qui cum audissent etc.... Quoniam christus uerbum dei est in quo antequam essent dicta sunt omnia. non consortium siderum fatum christi | est sed fatum etiam siderum christus est. quia et ipsam carnem sub caelo creatam ea uoluntate adsumpsit qua etiam caelum creauit ea uoluntate deposuit et recepit qua etiam sideribus imperauit " (c. 19 *r* 2ª col.-19 *v* 1ª col.). A San Gregorio Magno (2) toglie il brano seguente: " Scimus quia unigenitus filius uerbum patris uocatur. Iohanne euangelista adtestante qui ait. In principio erat uerbum et uerbum erat apud deum et deus erat uerbum. Ex ipsa nostra locutione cognoscimus. quia prius uox sonat ut uerbum postmodum possit audiri:, Iohannes ergo uocem se esse asserit. quia uerbum pręcedit Aduentum itaque dñi precurrens uox dicitur quia per eius ministerium patris uerbum ab ominibus auditur " (c. 237, 1ª col.). Con San Girolamo (3) commenta il v. 17 del capo III così: " Misterium trinitatis | in babtismate demonstratur dominus babtizatur spiritus descendit in speciae columbe. Patris uox filii preuentis (testimonium) auditur. Aperiuntur celi etc. " (c. 29 *v*, col. 1ª). A spiegazione del vers. 3 del capo IV riferisce da Sant'Ambrogio (4) il passo seguente: " Quid sibi uult talis locutionis exorsus si filius dei es is nisi quia cognouerat dei filium esse uenturum. sed uenisse per hanc infirmitatem corporis non putabat || aliut explorantis aliut temptantis est et deo se profitetur credere et hominem conatur

(1) *Contra Faustum manichaeum*, in Migne, *P. L.*, XLII, c. 213.
(2) *Homiliae in Evangelia*, in Migne, *P. L.*, LXXVI, c. 1100.
(3) *Commentaria in Evang. Matthaei*, in Migne, *P. L.*, XXVI, c. 31.
(4) *Expositio Evangelii sec. Lucam*, in Migne, *P. L.*, XV, c. 1617-1618.

inludere: „, (c. 31 *v*, 2ª col.-c. 32 *r*, 1ª col.). Con San Gregorio Magno (1) afferma di nuovo la divinità di Cristo: " Cognoscamus igitur in eo naturam nostram quia nisi hunc diabolus hominem cerneret non temptaret. Ueneremur in illo diuinitatem suam quia nisi super omnia deus existeret ei nullo modo angeli ministrarent „ (c. 34 *r*, col. 2ª). Con Sant'Ambrogio (2) condanna fra gli altri eretici anche Ario, prendendo occasione dalle parole di Cristo: " Volo, mundare „ (c. VIII, v. 3): " Uolo enim dicit propter fotinum. Imperat propter arrium. Tangit propter maniheum „ (c. 90 *r*, col. 1ª). Altre professioni di fede sulla persona del Cristo sono prese da San Girolamo, da Sant'Ilario e da Sant'Agostino: " Omnia mihi tradita sunt a patre meo. et tradentem patrem et accipientem filium mysticę intellege. alioquin si iuxta nostram fragilitatem sentire uolumus cum ceperit habere qui accipit incipit non abere qui dederit. Tradita autem sibi omnia non celum et terram et elementa intelligenda sunt et cętera que ipse fecit et condidit sed hi qui per filium accessum abent ad patrem et antea rebelles deum postea sentire coeperunt „ (3). " Tradita autem non alia sunt quam que in filio soli nota sunt patri. nota uero filio soli esse quae patris sunt. Adque ita in hoc mutue cognicionis secreto intelligitur non aliud in filio quam quod in patre ignorabile sit extitisset „ (4). " Erubescat eunomius tantum sibi notitiam patris et filii quantum alterutrum inter se habeant uindicans. Quod si inde contendit et suam consolatur insaniam quia sequitur et cui uoluerit filius reuelare (5). || Non dixit et cui uoluerit pater reuelare. quemadmodum || cum diceret nemo nouit patrem nisi filius addidit et cui uoluerit filius reuelare. Quod non ita intellegendum est quasi filius a nullo possit cognosci nisi a patre solo pater autem non solum a filio sed etiam ab eis quibus reuelauerit filius sic enim pocius dictum est ut intellegamus et patrem et ipsum filium. per filium reuelari quia ipse est menti nostrae lumen. ut quod postea intulit et cui uoluerit filius reuelare non tantum patrem

---

(1) Op. cit., l. cit., c. 1136.

(2) Ambrosii, Op. cit., l. cit., c. 1636.

(3) Hieronymi, Op. cit., l. cit., c. 75.

(4) Hilarii, *Comment. in Matt.*, in Migne, *P. L.*, IX, c. 984.

(5) Hieronymi, Op. cit., l. cit.

sed etiam filium accipias. ad totum enim quod dixit illatum est. verbo enim suo ipse pater declaratur. uerbum autem non solum id quod per uerbum declaratur sed etiam seipsum declarat „ (1). “ Aliud est naturę aequalitate nosse quid noveris Aliud reuelantis dignatione „ (2) (c. 104 *v*, col. 2ª-105 *r*, col. 1ª). Per bocca di San Leone Magno Claudio attesta ancora la sua fede: “ Hic est filius meus dilectus etc. „ (c. XVII, v. 5). “ Praesens quidem erat in filio pater et in illa domini claritate quam ad discipulorum temperarat aspectum non separabatur ab unigenito genitoris essentia sed ad commendandam proprietatem utriusque personae sicut uisui significauit filium splendor ex corpore sic auditui patrem uox nuntiauit ex nube „ (3) (c. 154 *v*).

Ma se Gesù Cristo era, secondo Claudio, vero figlio di Dio, i cristiani ne erano per l'opera della redenzione figli adottivi. Potrei anche qui moltiplicare le citazioni, ma per non andar per le lunghe, non riferirò che due passi, uno di Sant'Ilario e l'altro di San Giovanni Crisostomo: “ Non potest ciuitas abscondi etc. „ (c. V, v. 14). “ Civitatem carnalem quam adsumpserat nuncupat. quia ut ciuitas ex uarietate ac multitudine consistit abitantium ita in eo per naturam suscepti corporis quaedam uniuersi generis humani congregatio continetur Atque ita et ille ex nostra congregatione in se fit ciuitas. et nos per consortium carnis suae sumus ciuitatis abitatio... „ (c. 41 *v*, col. 2ª) (4). “ Homo quidam abebat duos filios „ (C. XXI, v. 28) quis ille homo est qui abuit duos filios nisi deus qui omnes homines quos creauit paterno affectu diligit qui cum sit natura dominus tamen magis uult diligi quasi pater quam timeri ut dñs propterea in principio mandatorum legis non dixit time dñm dm̄ tuum de || toto corde tuo sed diliges „ (c. 186 *r*, col. 2ª-186 *v*, col. 1ª) (5).

Neppur vi ha nel nostro commento espressione alcuna che possa dar appiglio a fare di Claudio un precursore della Riforma protestante, quale lo considerarono, fra gli altri, l'Allix, il Me-

---

(1) Augustini, *Quaestiones Evangeliorum,* in Migne, *P. L.*, XXXV, c. 1323.
(2) Hieronymi, Op. cit., l. cit.
(3) Leonis M., *Sermones* in Migne, *P. L.*, LIV, c. 312.
(4) Hilarii, Op. cit., l. cit., c. 935.
(5) Joannis Chrysostomi, Op. cit., c. 849.

nendez Pelayo, il Comba e parve lo ritenesse anche il Dümmler. L'Allix (1) riferisce, a conferma della sua opinione, un lungo passo del commento intorno all'istituzione dell'Eucaristia (*Coenantibus autem illis* etc.) che è identico peraltro a un passo che nel commento di Rabano è attribuito a Rab. cioè a Rufino, e che in nulla devia dalla dottrina cattolica (2). Il Menendez (3) non porta prova alcuna, e quindi da sè medesimo si mette fuor di questione. Il Comba (4) si fa forte, tra l'altro, della spiegazione data da Claudio del *Tu es Petrus* etc., informata, secondo lui, a un concetto agostiniano che fu (egli pensa) più tardi travisato dai cattolici. Ma ad eccezione d'un brevissimo passo tolto da Sant'Agostino, che nulla contiene di eterodosso, tutta la spiegazione claudiana è desunta in quel luogo da Beda, alla lettera, e precisamente dall'omelia XVI del libro II (5). Il Dümmler sostiene che quella contraddizione che i protestanti inculcano come esistente tra le idee teologiche di San Paolo e di Sant'Agostino da una parte e il concetto ecclesiastico già da lungo tempo dominante dall'altra, era già stata intravveduta da Claudio (6); ma a tale conclusione egli viene giovandosi solo delle opere claudiane posteriori al commento di San Matteo, e principalmente dell'Apologetico e perciò di tale argomento non tocca a me dir parola. Nel presente commento tutto ci è segno d'animo ortodosso; chè se più tardi sembrerà che Claudio si scagli contro la croce di Cristo, qui evidentemente le dimostra riverenza, facendo egli sue queste parole di Rufino: " Ubi paganorum quoque dementiam qui eius crucem deridere solent apertissime confutat, cum proximę suae passionis et tempus quasi futurorum praescius ostendit et locum quasi mortis intrepidus adiit „ (c. 173 *v*). Più tardi vorrà in Torino riformare un culto, ch'egli reputa idolatrico, distruggendone forse per troppo zelo i falsi oggetti. Probabilmente gli stava dinanzi al pensiero l'esempio

---

(1) *Some remarks upon the ecclesiastical history.* Oxford, 1821, pp. 67-70.

(2) Rabano, Op. cit., l. cit., coll. 1105-1108.

(3) *Historia de los heterodoxos españoles.* Madrid, 1880, I, 341.

(4) Op. cit., pp. 57 sgg.

(5) Augustini, *De consensu evangelistarum,* in Migne, *P. L.*, XXXIV, col. 1132; Beda, *Homiliae,* in Migne, *P. L.*, XCIV, c. 222. Claudio, c. 148 *v*.

(6) Dümmler, *Ueber Leben*, ecc., l. cit., p. 443.

di Cristo che scaccia i profanatori, a dichiarare il quale, dietro la scorta di San Gregorio e di Sant'Agostino, egli spende parte della c. 181 *v* e tutta la c. 182 *r* e *v*.

Di certo la questione dell'eresia di Claudio non viene decisa, con queste mie ristrette considerazioni. Dalla disamina qui istituita si può solo giustamente conchiudere che nell'anno 815, quando appunto Claudio componeva il suo commento a S. Matteo, egli non s'era ancor allontanato dalla dottrina cattolica. Se, e in qual senso egli si sia in seguito cambiato, solo potrà decidersi quando siano state diligentemente esaminate tutte le sue opere.

---

*L'Accademico Segretario*
CESARE NANI.

Torino — VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

# CLASSE

DI

## SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

### Adunanza del 16 Gennaio 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

---

Sono presenti i Soci: Cossa, Vice-Presidente dell'Accademia, D'Ovidio, Direttore della Classe, Berruti, Bizzozero, Mosso, Spezia, Gibelli, Camerano, Segre, Volterra, Jadanza, Foà, Guidi, Fileti e Naccari, Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della precedente seduta.

Il Socio Spezia presenta come omaggio all'Accademia un opuscolo del Dott. Giuseppe Piolti intitolato: *Sabbie della valle della Dora Riparia,* e il Segretario presenta i cenni biografici di J. J. Sylvester, scritti dal Socio corrispondente M. Noether e da questo inviati in dono.

Vengono poi accolte per l' inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° *Contribuzioni di geologia chimica. Esperienze sul quarzo,* nota del Socio Spezia,

2° *Nuova specie di Peripatus dell'Ecuador,* nota del Socio Camerano,

3° *Contribuzione allo studio del problema di Pothenot,* nota dell'ing. Giuseppe Delitala, presentata dal Socio Jadanza,

4° *Delle terminazioni nervose nei gomitoli delle glandule sudorifere dell'uomo,* nota del dott. Pasquale Sfameni, presentata dal Socio Mosso.

# LETTURE

## *Contribuzioni di geologia chimica. Esperienze sul quarzo;*

Nota del Socio GIORGIO SPEZIA.
(Con Tavola).

Le esperienze sulla solubilità del quarzo nell'acqua pura non possono certamente avere un' importanza di pratica applicazione in geologia, perchè le acque circolanti, sia alla superficie che nell' interno della crosta terrestre, sono sempre più o meno mineralizzate.

Tuttavia credo opportuno di comunicarne alcune da me eseguite, perchè potrebbero servire per un confronto quando si volesse continuare le esperienze con acque contenenti sostanze disciolte.

Aggiungo poi altre considerazioni ed esperienze, inerenti alla genesi del quarzo, le quali mi furono suggerite da alcuni fatti osservati durante le ricerche sulla solubilità.

In un precedente scritto (1) già indicai come io abbia esperimentato, che due lastre di quarzo non presentassero traccia alcuna di solubilità nell'acqua, anche dopo esservi rimaste per 5 mesi alle temperature rispettivamente di 27° e 25° ed alle pressioni di 1850 e 1750 atmosfere (2).

(1) " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXI, pag. 246.

(2) Durante la revisione delle bozze del presente lavoro lessi in una recente pubblicazione (" Groth's. Zeit. f. Kry. u. Min. ", vol. XXIX, p. 243) una critica alla mia esperienza per parte del sig. Viola, il quale scrive che essa è sbagliata, perchè, avendo io fatto l'esperimento sopra una lastra di quarzo e non sulla polvere di quarzo, il risultato da me ottenuto, non dimostrava l'insolubilità del quarzo nelle condizioni di tempo, temperatura e pressione suddette. E tale giudizio è basato dall'autore sulla conclusione

Le presenti esperienze invece furono eseguite a temperature superiori ai 100° e qualcuna con alta pressione onde stabilire se questa, anche combinata con alta temperatura, abbia un'azione diretta sulla solubilità del quarzo.

Il metodo sperimentale da me usato è lo stesso di quello accennato nel precedente lavoro, cioè di sperimentare sopra lastrine levigate di quarzo; perchè, essendo al microscopio visibile anche ciò che non è ponderabile colle odierne bilancie, le minime traccie di corrosione costituivano un controllo di effetto, necessario per essere convinti che anche una minima perdita in peso fosse dovuta all'effetto della soluzione e non ad errore di pesata.

Alcune esperienze preliminari, che io avevo eseguito, mi servirono nelle presenti, per avere un dato approssimativo sulla durata dell'esperimento necessario, sia per accumulare un effetto misurabile, sia per non raggiungere il punto di saturazione per le varie temperature, onde tener conto del fattore tempo.

Le lastrine adoperate furono tagliate da uno stesso cristallo di quarzo perfettamente jalino e senza traccie d'inclusioni. Esse

---

alla quale fu condotto da una sua teoria che: *se una faccia è insolubile il cristallo stesso può essere solubile.*

La difesa della mia esperienza è facilissima.

Trattandosi, quando sperimentai, di osservare soltanto l'effetto della pressione nella solubilità del quarzo nell'acqua, io adoperai, come scrissi, lastre rettangolari di quarzo ed anzi ne indicai il peso e la superficie complessiva.

A me pare che chiunque, pure vivendo di sola scienza astratta, avesse avuto un'idea della parte materiale di un'esperienza fisica o chimica avrebbe ritenuto che sarebbe stato per me impossibile di prendere colle dita e porre nell'apparecchio una lastra il cui spessore fosse nullo, ossia una lastra direi matematica.

Ciò posto è evidente che se la lastra rettangolare doveva avere uno spessore, essa, doveva anche, presentare all'azione solvente dell'acqua tre direzioni normali fra di loro; per conseguenza se vi fosse stata traccia di soluzione della sostanza in qualcuna delle tre direzioni, io avrei trovato una diminuzione di peso; invece questo non subì variazione alcuna.

Perciò se il sig. Viola vuole provare erronea la mia esperienza, basandosi soltanto sulla teoria e non contrapponendo una sua esperienza, bisogna che prima, speculando ancora un poco, dimostri che: *un cristallo può essere solubile non ostante si trovino in esso tre direzioni d'insolubilità normali fra loro.*

avevano forma rettangolare; per la maggior parte le due faccie di maggiore area erano parallele all'asse di simmetria principale, per altre lastre erano normali.

Le esperienze furono eseguite in eguali recipienti d'argento della stessa capacità, contenenti acqua distillata. Questi recipienti, che avevano un coperchio con bordo, erano posti nei recipienti d'acciaio contenenti parimenti acqua distillata.

L'apparecchio poi per le esperienze a grande pressione era quello descritto nel mio lavoro sull'apofillite e sul vetro (1).

Le lastrine nel recipiente d'argento erano poste di poco sotto la superficie dell'acqua e non sul fondo del recipiente, dove sarebbe avvenuta troppo presto la saturazione del liquido. Oltre a ciò, le lastrine erano disposte in modo, che le due superficie maggiori fossero in piani normali alla superficie del liquido, affinchè fossero entrambe sottoposte allo stesso effetto delle lente correnti, che dovevano formarsi nel liquido in causa del mutamento di densità di esso.

Di ciascuna lastrina presi non soltanto il peso; ma anche misurai, colla maggiore approssimazione possibile, l'area della superficie totale, onde avere qualche dato sulla profondità di erosione prodotta dall'azione solvente dell'acqua.

Per le esperienze eseguite, affine di confrontare la solubilità in direzione parallela all'asse di simmetria con quella normale ad esso, le due lastrine erano poste nello stesso recipiente in condizioni identiche.

A riguardo della temperatura io non potei eseguire le esperienze ad un grado fisso in causa dell'impossibilità di avere una pressione costante di gas; nè mi servirono varie specie di regolatori che volli sperimentare, forse perchè la fiamma necessaria alle esperienze richiedeva un efflusso di gas troppo grande relativamente ai regolatori. Perciò io mi limitai a servirmi della media della somma delle massime temperature nelle 24 ore, le quali temperature io osservava dalle 20 alle 21 ore; perchè, dalle esperienze eseguite con temperatura inferiore ai 250° e per le quali feci uso contemporaneamente al termometro ordinario anche di un termometro a massima, mi era persuaso che

---

(1) " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXX, pag. 455.

nell'ora sopra accennata si manteneva la temperatura corrispondente alla massima pressione del gas.

Il risultato delle esperienze è indicato nel seguente specchio, dove le prime sette si riferiscono a lastre parallele all'asse di simmetria principale, e le altre tre a lastre normali a detto asse:

| | Peso in grammi | Area in mm.² | Temperatura | Pressione in atmosfere | Durata dell'esperienza in giorni | Perdita in milligrammi | Perdita in 30 giorni e per 100 mm.² in milligr. | Profondità d'erosione in 30 giorni in millimetri |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 0,8540 | 371 | 153° | 1161 | 60 | 0,5 | 0,067 | 0,00025 |
| II | 0,8521 | 365 | 175° | 8,8 | 60 | 0,8 | 0,11 | 0,00041 |
| III | 0,7079 | 390 | 207° | 18 | 30 | 5,1 | 1,31 | 0,0049 |
| IV | 0,4340 | 282 | 224° | 24 | 32 | 7,0 | 2,32 | 0,0087 |
| V | 0,4674 | 289 | 231° | 28 | 30 | 7,6 | 2,63 | 0,0099 |
| VI | 0,8266 | 346 | 268° | 52 | 30 | 26,8 | 7,74 | 0,0292 |
| VII | 0,7312 | 420 | 323° | 122 | 11 | 18,3 | 11,87 | 0,0448 |
| VIII | 0,4346 | 284 | 182° | 1322 | 28 | 4,3 | 1,62 | 0,0061 |
| IX | 0,6999 | 385 | 207° | 18 | 30 | 13,6 | 3,53 | 0,0133 |
| X | 0,4676 | 287 | 231° | 28 | 30 | 14,5 | 5,05 | 0,0190 |

Da quanto più sopra osservai, a riguardo della temperatura, i miei risultati non possono avere che un valore approssimativo: tuttavia io credo che essi permettano qualche deduzione interessante per la solubilità del quarzo nell'acqua.

Dalle esperienze III e IX, come pure dalle V e X, nelle quali le lastrine di confronto erano mantenute nello stesso recipiente e perciò in identiche condizioni di temperatura, risulta evidentemente come la solubilità sia molto maggiore in direzione dell'asse di simmetria principale, che non nella direzione ad esso normale; le quali direzioni quindi indicherebbero nel quarzo la massima e minima solubilità.

Le figure di corrosione sulle superfici delle lastrine normali all'asse di simmetria, ossia alla direzione di solubilità massima,

erano prominenze di carattere romboedrico; invece sulle faccie ad esso parallele, ossia normali alla direzione della minima solubilità, erano incavi con impronta prismatica. Detta relazione fra il modo di presentarsi della corrosione e le direzioni di massima e minima solubilità si accorda con quella trovata nella fluorite da Becke (1).

Anche sulle faccie dei romboedri d'un cristallo sottoposto ad esperienza le figure di corrosione prodotte dall'acqua sono incavi triangolari, come si può scorgere dalla fig. 1 che rappresenta, con ingrandimento di circa 7 diametri, un cristallo di quarzo tenuto nell' acqua per 15 giorni alla temperatura da 320° a 340°.

Naturalmente la profondità delle corrosioni non si ottiene così presto e facilmente come coll'acido fluoridrico, gli alcali ed i carbonati alcalini, dei quali mezzi si servì il Molengraaff (2) nel suo importante lavoro sulle figure di corrosione del quarzo.

A riguardo dell' influenza della pressione sulla solubilità del quarzo, le esperienze I e II dimostrano ad evidenza come si debba ritenerla nulla, di fronte all' influenza della temperatura; infatti l'aumento di soli 22° nell'esperienza II diede un effetto quasi doppio della I nella quale vi era una maggior pressione di 1153 atmosfere. Anche le esperienze VIII e IX confermano lo stesso risultato.

Osservando poi nello specchio la colonna nella quale è indicata la perdita in peso ridotta allo stesso tempo di 30 giorni ed alla stessa superficie di 100 mm$^2$, si scorge chiaramente come la velocità di soluzione del quarzo nell'acqua pura aumenti col crescere della temperatura.

Dalle riferite esperienze non risulta quale sia la temperatura alla quale il quarzo comincia ad essere solubile nell'acqua; ma credo di potere affermare, che è inferiore a 100°, perchè a tale temperatura ottenni ancora un effetto di solubilità nello spazio di soli due mesi nel modo seguente: per altre esperienze di geologia chimica, aveva fatto costruire una specie di termosifone in tubo di stagno puro, nel quale l'acqua circo-

---

(1) " Tschermak's Min. Pet. Mitt. „, vol. 11, pag. 416.
(2) " Zeit. f. Kry. u. Min. von Groth. „, vol. 14, pag. 173.

lava. Adoperai tale apparecchio anche per un'esperienza sopra una lastrina di quarzo, che potei mantenere alla costante temperatura di 100° nell'acqua circolante per due mesi. La lastra, parallela all'asse, e che pesava gr. 0,8658, perdette in tal tempo 2 decimi di milligramma; l'area era di $395^{mm2}$.

La profondità media di erosione indicata nell'ultima colonna è riferita a 30 giorni di tempo e fu calcolata tenendo il peso specifico del quarzo eguale a 2,65. Una misura diretta non era possibile in causa delle figure di corrosione.

Noto poi, che, nei valori delle due ultime colonne, l'area complessiva di solubilità d'ogni lastrina fu considerata di orientazione eguale a quella delle superfici maggiori delle rispettive lastrine, ossia ho trascurato per entrambe le serie la rispettiva piccola differenza di solubilità che sarebbe stata data da quelle piccole superfici, le quali, dovute allo spessore delle lastrine, non erano rispetto all'asse principale nella stessa direzione delle due superfici maggiori delle stesse lastrine.

Nell'eseguire le precedenti esperienze non avevo trascurato di osservare l'effetto prodotto dal successivo raffreddamento, massime in quelle esperienze nelle quali, per la maggior temperatura, la quantità di quarzo disciolta era notevole; ed avevo sempre trovato, che pel raffreddamento si ricostituiva un deposito non già di quarzo, ma di silice idrata, la quale si presentava in un esilissimo strato sulle pareti del recipiente.

Benchè non vi dovesse esser nulla di strano, dal lato chimico, che l'anidride silicica sciogliendosi nell'acqua si mutasse in silice idrata, tuttavia il fatto si presentava curioso pensando alla genesi del quarzo ottenuta da alcuni sperimentatori colla silice idrata.

Credetti quindi opportuno di occuparmi del fatto con alcune ricerche sperimentali.

Anzitutto volli confermare le mie osservazioni fatte durante le prove sulla solubilità. Perciò una lastra di quarzo tagliata normalmente all'asse principale, e del peso di gr. 1,3643, fu mantenuta nell'acqua e nel consueto apparecchio per 22 giorni alla temperatura da 250° a 265°. La perdita in peso fu di 42 milligrammi. Sulle pareti e più di tutto sul fondo del recipiente d'argento rimase aderente un'esile patina, i cui frammenti stac-

cati ed esaminati al microscopio fra i prismi incrociati si presentavano isotropi, compressi e strofinati fra due vetri rigavano questi, al cannello imbiancavano senza fondere, e coll'acido fluoridrico scomparivano senza lasciare residuo.

Il liquido poi che era nel tubo d'argento e la cui quantità era di 43 centimetri cubi, venne evaporato in una capsula di platino previamente pesata, ed il residuo, che era silice idrata, portata al color rosso e ripetute volte finchè non eravi più perdita, aveva il peso di 16 milligrammi; tale residuo, che parimenti coll'acido fluoridrico scomparve senza lasciare residuo, rappresentava la silice rimasta in soluzione dopo il raffreddamento.

Detta quantità di silice disciolta nell'acqua pura raggiunge la media caratteristica delle acque termali silicee, le quali, è da notare, contengono traccie di composti chimici che potrebbero aumentare la solubilità della silice. Perciò l'esperienza ha un interesse geologico per la questione se la silice in tali acque sia, al loro efflusso, libera o invece combinata con alcali.

La seconda ipotesi è sostenuta dal Lapparent (1) il quale, basandosi sulle ricerche e deduzioni di Damour, ritiene che la silice depositata dai geyser non possa provenire da silice libera disciolta nelle acque, ma bensì provenga dalla presenza in esse di silicati alcalini disciolti, che si decomporrebbero all'atto d'efflusso delle acque, per azione di vapori solforosi e cloroidrici che si sprigionano nello stesso tempo che l'acqua calda.

Ossia, secondo Lapparent e Damour, il deposito della silice sarebbe dovuto ad una reazione chimica esogena che succederebbe allo stato, per così dire, effluente delle acque, le quali non conterrebbero silice libera.

A me pare che se l'esperienza, della soluzione del quarzo nell'acqua, dimostra che questa può contenere silice libera in quantità relativamente notevole, si possa ammettere che la reazione chimica della decomposizione dei silicati, alcalini o non, sia endogena e che la silice depositata all'efflusso delle acque per la loro evaporazione sia la parte rimasta in soluzione allo stato libero, e corrispondente alla temperatura dell'acqua.

Questa ipotesi sostenuta da altri geologi e appoggiata dal-

---

(1) *Traité de Géologie*, 1893, pag. 460.

l'esperienza, avrebbe anche il vantaggio di dare spiegazione del fatto che finora le analisi chimiche delle acque silicee stabiliscono per limite massimo della silice 0,606 per 1000 (1). Tale limite, ammettendo la silice libera, troverebbe ragione nella pochissima solubilità di essa; mentre non si spiegherebbe bene col supporre che vi sieno nell' acqua soltanto silicati alcalini; perchè questi essendo annoverati fra i più solubili composti chimici, potrebbero trovarsi nelle acque silicee in quantità molto più grandi. A mio avviso la presenza dei silicati alcalini nelle acque silicee, se l'analisi non la determina, come sovente avviene, in modo esatto, diventa ipotesi necessaria soltanto nel caso, che la quantità di silice sia maggiore di quella, che può essere tenuta disciolta dall'acqua alla temperatura del suo efflusso.

Ritornando all'argomento della ricostituzione del quarzo dalla sua soluzione nell' acqua, si è visto come io non abbia potuto ottenerlo neppure facendo evaporare la soluzione a 100°; allora provai se, esperimentando in modo che l'evaporazione accadesse ad una più alta temperatura, era possibile avere quarzo.

Perciò adoperai un solito apparecchio d'acciaio, ma avente un tappo di chiusura fatto in guisa che aprendo una valvola a vite, si ha una sfuggita di vapore, la quale può essere regolata in modo, che, sebbene la temperatura interna dell'acqua sia di 300°, la lenta evaporazione appaia soltanto come un'appannatura sopra una lastra fredda di vetro posta sull'orifizio di sfuggita.

In detto apparecchio mantenni una grossa lamina di quarzo alla temperatura da 290° a 300° per 36 giorni, e poi aprendo la valvola lasciai che l'evaporazione lenta, sempre fra i detti limiti di temperatura, cominciasse, ed essa durò per 32 ore. L'effetto ottenuto per tale esperienza fu la formazione di esili patine sulle pareti del tubo, le quali osservate fra i prismi incrociati si presentavano isotrope con qualche minutissimo punto anisotropo, riscaldate in un tubo non davano acqua, ma s'incurvavano leggermente.

In altra analoga esperienza, nella quale la temperatura

---

(1) J. Roth, *Allgemeine und Chemische Geologie*, vol. I, pag. 592.

durante 22 giorni fu da 315° a 330° ed alla quale avvenne l'evaporazione ottenni invece insieme a patine isotrope anche evidentissime patine quarzose; ma le dimensioni dei cristalli non erano da paragonarsi con quelle delle incrostazioni quarzose e dei cristalli liberi, che si ottengono assai facilmente ed a minore temperatura dalla decomposizione del vetro.

Si potrebbero fare ipotesi sull'effetto dell'evaporazione ad alta temperatura pel passaggio dell'acido silicico ad anidride silicica; ma tralascio, non sapendosi nè meno quale acido silicico si costituisca dalla soluzione del quarzo nell'acqua. Mi limito quindi a porre le esperienze a disposizione dei chimici, che fanno ricerche nell'oscuro campo degli acidi silicici, che, nonostante molti studi, si trova finora illuminato soltanto da una luce di ipotesi, la quale, sebbene abbia già attratto i mineralogi a speculare molto genialmente sulla costituzione dei silicati, non può tuttavia penetrare nell'oscurità del campo, perchè mancante del potente riverbero delle prove sperimentali, molto difficili per tale argomento.

Ora i risultati delle mie esperienze non concorderebbero con quelli ottenuti da coloro i quali si occuparono della riproduzione del quarzo, adoperando soltanto silice ed acqua, ossia senza l' intervento di altre sostanze, le quali funzionassero da agenti mineralizzatori.

Se le mie indagini non errano, fra i molti, che cercarono la riproduzione del quarzo, soltanto Schafhaütl e K. v. Chrustschoff fecero esperienze nelle condizioni anzidette; quello operando sulla silice gelatinosa, questi sulla silice dializzata.

Il Schafhaütl (1) riscaldando con acqua della silice gelatinosa, preparata di fresco, in una pentola di Papin e, facendo in seguito evaporare la soluzione, avrebbe ottenuto dopo 8 giorni dei cristalli microscopici di quarzo; ma nell'accennare la sua esperienza il Schafhaütl non indica, se la silice gelatinosa fosse pura o vi fosse insieme ancora qualche altra sostanza inerente al processo chimico per la separazione della silice, la quale sostanza avrebbe potuto agire come agente mineralizzatore. D'altronde dallo scritto dell' autore risulta evidentemente, che lo

(1) " Gelehrte Anzeigen ". München, vol. 20°, 1845, pag. 502.

scopo principale dell'esperienza era di dimostrare che il quarzo si formava per via umida: perciò poco importava la purezza della silice.

Anche secondo Fouqué e Lévy (1) esisterebbe un certo dubbio sulle condizioni ed i risultati di detta esperienza.

Considererò invece le esperienze di K. v. Chrustschoff.

Questo autore pubblicò nel 1873 alcune esperienze per le quali avrebbe ottenuto silice cristallizzata con silice dializzata. Anzi in una sua nota posteriore (2) reclamò a sè la priorità del metodo idrotermico, sebbene Schafhaütl, Senarmont ed altri nelle loro esperienze avessero già impiegato prima di lui processi prettamente idrotermici.

Le esperienze di K. v. Chrustschoff riportate nella sua nota sopracitata sono tre.

Nella prima riscaldò in un tubo di vetro della silice dializzata alla temperatura di 150° da 10 a 14 giorni ed ottenne un deposito granulare, ma senza traccie di cristallizzazione.

Nella seconda riscaldando della silice dializzata acquosa parimenti in un tubo di vetro alla temperatura di 250° da 10 a 14 giorni, ottenne un deposito che si presentava, con 300 volte d' ingrandimento, formato da evidenti prismi esagonali con le faccie terminali della piramide.

Nella terza esperienza poi l'autore fece uso invece del vetro di un tubo d'acciaio dorato internamente. La soluzione di silice dializzata fu mantenuta alla temperatura di 350° da 10 a 14 giorni.

L'effetto ottenuto non era rappresentato da quarzo ma da un precipitato che aveva il peso specifico di 2,25 a 2,30 e che osservato con ingrandimento di 300 volte si presentava costituito da lamine esagonali.

Ossia in queste esperienze K. v. Chrustschoff non ottenne quarzo, senonchè dalla seconda; la quale soltanto proverebbe, che colla silice dializzata si forma facilmente quarzo, se non vi fosse il dubbio che il quarzo ottenuto sia provenuto non dalla silice dializzata ma bensì dalla decomposizione del vetro costituente il recipiente usato per l'esperienza.

(1) *Synthèse des mineraux et des roches*, pag. 82.

(2) " Tschermak's Min. und petr. Mitt. ", 1882, pag. 536.

E tale dubbio, a mio avviso, ha solido fondamento nel fatto, che nella terza esperienza, in cui il recipiente era di acciaio dorato, ossia mancava il vetro, non si ebbe quarzo.

Lo stesso K. v. Chrustschoff (1) ripetè analoghe esperienze in palloncini di vetro; questi, della capacità di 250$^{cc}$ e con lo spessore di 5 millimetri, furono riempiti di una soluzione acquosa di silice al 10 $^0/_0$, e quindi mantenuti in bagno di sabbia alla temperatura di 250° da 1 a 3 ore ogni giorno per 6 mesi. Nel corso dell' esperienza 3 palloncini scoppiarono perchè la temperatura era salita a 320°, infine anche il quarto subì la stessa sorte; ma l'autore dice che trovò nell'interno dei frammenti di esso dei cristalli di quarzo dello stesso tipo di quelli ottenuti dal Daubrée.

Non discuto sull'impiego dei palloncini di vetro, di cui, se è problematico il vantaggio per l'esperienza, appare quasi certo un pericolo per lo sperimentatore; ma mi permetto di osservare che volendo sperimentare se si ottiene quarzo da una soluzione silicea, non sia prudenza adoperare come recipiente un materiale già ricco di silice e facilmente decomponibile per le condizioni dell'esperienza.

Quindi anche per tali esperienze io ho il forte dubbio che il quarzo non provenisse dalla silice disciolta, ma dalla decomposizione del silicato costituente il vetro del palloncino; tanto più che l'autore descrivendo l'apparecchio (2) afferma che i palloncini sono di vetro *très facilement fusible;* e perciò dovrebbero essere, a mio avviso, più decomponibili; perchè le esperienze di Kreusler e Henzold (3) avrebbero dimostrato, che i vetri più fusibili darebbero, sotto l'azione del vapore acqueo a 100°, maggiore alcalinità all'acqua.

A me pare quindi, che per le considerazioni esposte a riguardo delle esperienze sulla sintesi del quarzo con sola silice idrata, senza l'aiuto cioè dei così detti agenti mineralizzatori, si possa conchiudere che tale via di sintesi non sia quella che fornisca facilmente quarzo; e tale conclusione si accorderebbe coi risultati da me ottenuti, pei quali dalle soluzioni di quarzo

---

(1) " Bull. Soc. Française de Mineralogie ", vol. X, pag. 32.

(2) Loc. cit., pag. 138.

(3) I. Guareschi, *Supp. Enciclopedia chimica*, 1884-85, pag. 160.

si avrebbe difficilmente, e solo in speciali condizioni, per es. l'evaporazione ad alta temperatura, l'anidride silicica.

Osservo poi che io feci diverse esperienze con silice gelatinosa ed acqua, sia producendo una lenta evaporazione ad alta temperatura, sia anche obbligando il liquido, in un apparecchio di speciale disposizione, a filtrare, sempre ad alta temperatura, attraverso le pareti di un tubo poroso di argilla prima di evaporare; ma ottenni soltanto opale.

Debbo peraltro notare che la silice gelatinosa da me adoperata era stata preparata da alcuni anni e sempre tenuta nell'acqua in vasi chiusi; perciò si potrebbe obbiettare che la causa di non prodursi il quarzo fosse dovuta al fatto di non essere la silice di recente preparata. Ciò potrebbe darsi, sebbene la formazione dell'opale in globuli e concrezioni dimostrerebbe, che la silice si era sciolta e perciò avrebbe potuto anche dar luogo a quarzo invece di opale.

Ciò che può agevolare la formazione del quarzo, sia dalla silice gelatinosa, sia dalla soluzione del quarzo, è la presenza di un poco di silicato di soda. Ciò provai con due esperienze. in una delle quali, sempre inteso che il recipiente era d'argento. vi era soltanto silice gelatinosa ed acqua, e nell' altra avevo aggiunto del silicato sodico in soluzione, in quantità soltanto da avere una leggera reazione alcalina. Le due esperienze, nelle quali fu mantenuta per un mese la temperatura da 280° a 300°, mi diedero per risultato: opale da quella senza silicato sodico: e quarzo da quella contenente il silicato, ma in cristalli piccolissimi anche osservati con forte ingrandimento. Eguale effetto di questa seconda esperienza io l'ebbi mantenendo una lastra di quarzo con un pezzetto di silicato sodico vetroso nell'acqua alla temperatura di 290° a 310° per 17 giorni.

In ogni caso poi ammettendo anche si possa ottenere quarzo da soluzione di esso o dalla sola silice gelatinosa, non credo si abbia tale minerale con la stessa grande facilità con cui esso si ottiene dalla decomposizione di certi silicati, sia che la decomposizione di essi, per via idrotermica, avvenga coll'intervento di reagenti, sia per mezzo dell'acqua sola.

Ed a proposito di esperienze sulla sintesi del quarzo per decomposizione di silicati, credo opportuno di aggiungere alcune mie a quelle iniziate dal Daubrée e continuate da altri.

Volendo provare la proprietà decomponente del solfo sul silicato sodico, posi dette sostanze con acqua in un tubo d'argento, colla speranza che il primo strato di solfuro d'argento, che si sarebbe formato, avrebbe difeso il resto della parete del tubo, la quale aveva lo spessore di un millimetro. Invece l'argento fu tutto convertito in bellissima argentite cristallizzata e ciò forse per dover essere il solfuro d'argento facilmente solubile ad alta temperatura nel solfuro alcalino formatosi nel liquido per eccedenza di solfo.

Allora rifeci l'esperienza in un tubo di vetro, il quale fu posto in uno dei soliti apparecchi d'acciaio. L'esperienza durò soltanto 43 ore colla temperatura di 300° ed ottenni un disco di incrostazione quarzosa ricoprente un residuo di solfo, nella quale i cristalli di quarzo sono visibili con piccolo ingrandimento. Il tubo di vetro, benchè la durata dell'esperienza fosse breve, era perfettamente decomposto; ma la quantità di quarzo era molto maggiore di quella che mi diedero altre esperienze sull'azione dell'acqua sola sul vetro.

Io ritengo che l'eccedenza di silice libera data dal silicato sodico avrà contribuito per la sua presenza a far depositare allo stato di quarzo tutta quella proveniente dalla decomposizione del vetro, la quale rimane in parte disciolta costituendo un silicato solubile, quando si fa reagire soltanto acqua sul vetro. Tale idea mi venne dall'avere sperimentato, che solfo, silicato sodico ed acqua, alla temperatura e durata dell' esperienza riferita, ma posti in tubo di platino, ossia senza il contatto del vetro, non mi diedero che una quantità di globuli trasparenti di opale.

E rispetto all' esperienza sopradetta ed eseguita nel tubo di vetro, debbo aggiungere che la pressione di 88 atmosfere. corrispondente alla tensione del vapore acqueo alla temperatura di 300°, non dovette avere influenza diretta sulla reazione chimica. Ciò perchè la stessa esperienza, con identica qualità di solfo, silicato sodico e vetro, ripetuta alla temperatura ordinaria con 1600 atmosfere di pressione durante sei mesi, non mi diede che un poco di silice gelatinosa, come l'ottenni con altra identica esperienza fatta contemporaneamente con egual temperatura ed alla sola pressione atmosferica.

Col silicato sodico io eseguii altre esperienze.

In un tubo d'argento posi con acqua un pezzo di silicato sodico fuso, alcuni frammenti di pirite e del clorato potassico, prevedendo che l'acido solforico prodotto dall'ossidazione della pirite avrebbe reagito sul silicato sodico dando luogo a quarzo. Il tubo d'argento fu quindi posto nell'apparecchio d'acciaio contenente anche acqua e mantenuto alla temperatura da 250° a 260° per 8 giorni.

Per risultato ottenni una grande quantità di polvere rossa di sesquiossido di ferro ed il quarzo in cristalli liberi ed aggregati sferoidali. Nelle esperienze di sintesi dei minerali sovente si ottiene l'impreveduto; questi fu nel mio caso l'argento filiforme depositato sopra un filo di platino che serviva a porre e togliere dal recipiente di acciaio il tubo d'argento. La formazione, nella mia esperienza, dell'argento filiforme io l'attribuisco al concorso di fenomeni elettrolitici, pei quali si ridusse l'argento forse da una piccola quantità di solfato d'argento prodottosi.

Tale forma dell' argento io l'ebbi in maggior copia nella seguente esperienza.

Al fondo di un recipiente di platino avevo posto acido solforico ed un pezzo di magnesite; e più in alto un piccolo recipiente d'argento che non toccava il liquido sottostante e che conteneva una soluzione di silicato sodico con un poco di calcite in polvere. Il tutto fu posto in un recipiente d'acciaio contenente poca quantita di acqua e mantenuto per 7 giorni alla temperatura da 280° a 290°.

Lo scopo dell'esperienza era essenzialmente di osservare l'azione ad alta temperatura dell'acido carbonico sul silicato sodico ed in pari tempo l'azione della silice, allo stato nascente, sul carbonato di calcio in presenza di eccesso di acido carbonico, il quale doveva esser somministrato dall'azione dell'acido solforico sulla magnesite, quando si alzava la temperatura.

Il risultato ebbe molto dell'impreveduto; perchè io ottenni, oltre a quarzo in cristalli visibili anche a piccolo ingrandimento, dell'argento filiforme sparso ed anche riunito in massa con fili lunghi 1 centimetro; inoltre si produssero delle microscopiche lamine esagonali di aspetto metallico e di color giallo oscuro, le quali erano magnetiche e coll'acido cloridrico davano idrogeno solforato e che ritengo quindi di pirrotina.

Avendo poi fatto l'esperienza nell'apparecchio d'evaporizzazione, dopo il raffreddamento aprii la valvola e ne escì un getto di gas che abbruciava con una fiamma leggermente bluastra e con un odore che ricordava quasi il siliciuro d' idrogeno.

È un' esperienza per la quale spero di poter analizzare le cause degli effetti prodotti, facendo sintesi parziali con diverse combinazioni delle stesse sostanze e condizioni usate nell'esperienza.

Ma fin d'ora, non tenendo conto dell'argento filiforme già prodotto anche da Sénarmont, Riban e Margottet, l'esperimento può servire per stabilire che la pirrotina si può ottenere per via idrotermica ed alla sola temperatura non superiore a 290°.

La facilità poi colla quale si ottiene quarzo dalla decomposizione di certi vetri mi servì per un altro genere di esperimento.

Volendo osservare come avvenisse il deposito di quarzo sopra un cristallo di quarzo preesistente, esperienza che non mi risulta sia stata eseguita per detto minerale, impiegai per avere il deposito di anidride silicica un vetro giallo costituente alcuni recipienti di prodotti chimici che avevo acquistato.

Al fondo di un recipiente d'acciaio posi un vaso cilindrico di caolino, nell'interno di questo vi erano due crogiuoli di porcellana posti l'uno sopra l'altro in eguale direzione; ma il superiore era di diametro di poco maggiore dell'inferiore, affinchè trovasse appoggio sull'orlo del vaso cilindrico. Il crogiuolo superiore aveva poi una stretta apertura al fondo, e i due crogiuoli distavano di 5 centimetri l'un dall'altro. Tale disposizione costituiva una cavità nella quale poteva entrare la sostanza disciolta prodotta dalla decomposizione del vetro, ma non i pezzi residui di esso.

Nel mezzo della cavità poi posi, sostenuto da un sostegno d'argento, un cristallo di quarzo incoloro rotto da un capo, disponendolo in direzione verticale, ed un cristallo di quarzo ematoide terminato ai due capi, ma avente un piccolo incavo lungo uno spigolo del prisma. Adoperai anche quarzo ematoide perchè su di esso sarebbe stato più evidente il deposito del nuovo quarzo incoloro. Il quarzo ematoide era disposto sotto e lateralmente al quarzo incoloro e coll'asse orizzontale, appoggiava cioè con una faccia del prisma sopra un disco d'argento che costituiva la base del sostegno del quarzo incoloro.

Disposti in tal modo i cristalli di quarzo nella cavità, coprii questa col crogiuolo che aveva l'apertura e poi posi al disopra una quantità di frammenti del vetro giallo e versai nel recipiente acqua distillata. L'apparecchio fu quindi mantenuto per 15 giorni alla temperatura da 290° a 300°.

Terminata l'esperienza ed esaminato il risultato trovai che la parete della cavità e gli oggetti in questa contenuti erano rivestiti da un fine deposito di minutissimi cristalli ed aggregati cristallini di quarzo; il quale deposito aveva dato alla parete della cavità un aspetto come vellutato, aveva tolto lo splendore al sostegno d'argento e la lucentezza alle faccie prismatiche dei due cristalli di quarzo, rendendo bianchiccie quelle del quarzo ematoide; le faccie dei romboedri invece parevano a prima vista inalterate perchè prive di quella velatura generale.

Ma osservati i cristalli con una semplice lente, in quello di quarzo ematoide appariva distintamente che sulle faccie dei romboedri si era formato un deposito unito, trasparente e lucentissimo, il cui spessore, di circa $^1/_4$ di millimetro, costituiva un prolungamento delle faccie del prisma, inoltre tale deposito con eguale orientazione appariva anche sull'orlo dell'incavo del cristallo.

Lo spessore poi era sopra le faccie di un romboedro leggermente maggiore che su quelle dell'altro; inoltre le faccie non erano liscie ma presentavano, viste per luce riflessa, dei rilievi di diverso sviluppo per ciascun romboedro; e gli spigoli, più uniformi delle faccie, apparivano in rialzo rispetto alle faccie dei romboedri.

Ripetendo le esperienze spero di potere, in altro lavoro, delineare meglio i caratteri fisici delle faccie prodotti durante l'accrescimento del cristallo.

Il cristallo di quarzo incoloro poi presentava dal capo terminato lo stesso effetto osservato nel quarzo ematoide; invece dall'altro capo, dove eravi la superficie di rottura, si erano formate piccole faccie di romboedri, tutte egualmente orientate rispetto al cristallo; inoltre un frammento del cristallo si presentava cementato da quarzo. Per spiegare tale fatto, io ritengo, che quando ruppi il cristallo si sia prodotta un'incipiente spaccatura, la quale non diede luogo al distacco del frammento; poi, iniziando l'esperienza, la spaccatura avrà pel calore continuato

sino a staccare il frammento senza che questo, per la posizione che aveva il cristallo, mutasse di posto, rimanendo così cementato dal deposito di quarzo.

Il deposito fatto con orientazione si distingue dall'altro pel suo vivissimo splendore osservando i cristalli per luce riflessa, e spero che la fig. 2 riproducente parte del quarzo incoloro ossia la superficie di rottura ed il frammento, e la fig. 3 rappresentante il quarzo ematoide, renderanno evidente quanto descrissi. L' ingrandimento è di tre diametri.

L'esperienza sul cristallo di quarzo incoloro riprodusse il noto fenomeno del così detto risanamento dei cristalli, come si osserva in natura sopra la superficie di rottura di quei cristalli di quarzo, i quali per repentine scosse vennero staccati dalle pareti delle geodi, pur rimanendo in esse soggetti a cause di ulteriore accrescimento. Nelle geodi dei gneiss di Benra io osservai bellissimi esemplari che rappresentano in natura l'effetto che io ottenni sperimentalmente.

L'accrescimento maggiore osservato sulle faccie delle piramidi, massime nel cristallo di quarzo ematoide, il quale per la sua posizione nell'esperienza presentava in condizioni eguali sia le faccie di prisma che quelle delle piramidi, mi dimostrò l'esistenza di una direzione di più facile deposito.

Per meglio persuadermi ripetei l'esperienza colla disposizione analoga alla precedente, ma colla differenza che nella cavità invece di un cristallo intiero, posi un cristallo di quarzo ematoide ai due capi del quale avevo tagliato le piramidi con un piano possibilmente normale all'asse di simmetria principale. Il cristallo poi era disposto in modo che le faccie del prisma si trovavano orizzontali; ossia tre di esse avevano, si può dire, una posizione più favorevole, che non le due faccie artificiali del pinacoide, pel deposito della silice, che si formava al disopra per la decomposizione del vetro.

L'effetto ottenuto fu eguale a quello dell'esperienza precedente; le faccie del prisma erano coperte soltanto da una velatura di microscopici cristalli e concrezioni raggiate di quarzo; mentre sulle faccie artificiali ossia in direzione dell'asse il deposito fu molto maggiore, perfettamente orientato, limpidissimo e visibile ad occhio nudo. La fig. 4 rappresenta, col solo ingrandimento di 4 diametri, una lastrina di detto cristallo tagliata parallelamente all'asse.

In tali esperienze raccolsi nell'apparecchio più di 3 grammi di polvere cristallina di quarzo in cui i cristalli hanno una forma allungata e sovente hanno una faccia di un romboedro molto sviluppata e nel complesso rammentano i cristalli di quarzo del Delfinato. La maggiore lunghezza osservata nei cristalli fu di soli nove decimi di millimetro. Per detta quantità di quarzo raccolta sono d'avviso che, se avessi procurato un raffreddamento molto più lento, avrei potuto ottenere la completa formazione delle piramidi del quarzo ematoide; e spero che nuove ricerche sull'accrescimento del quarzo con altro sistema d'apparecchio mi confermeranno in tale idea.

Ad ogni modo da questa esperienza e da quelle eseguite sulla solubilità del quarzo risulta che la direzione di maggior deposito o di accrescimento del cristallo coincide con quella di maggiore solubilità; è un fatto analogo a quello osservato p. es. nell'allume (1), che le faccie che più facilmente crescono sono quelle che più facilmente si sciolgono.

Quando poi si volesse spiegare ciò che può sembrare un paradosso, cioè che la direzione di massimo accrescimento coincida con quella di massima solubilità, si potrebbe supporre che la coesione delle molecole sia inversamente proporzionale alla velocità colla quale si uniscono; allora sarebbe evidente che le molecole più facilmente si separerebbero ed entrerebbero in soluzione nella direzione secondo cui l'accrescimento fu più rapido, ossia la coesione rimase minore.

Nel caso poi speciale del quarzo io credo si possa dire che la grande differenza di velocità di accrescimento, che esiste fra la massima nella direzione dell'asse di simmetria principale e la minima nelle direzioni normali a tale asse, costituisce una proprietà interna del quarzo tale, che le circostanze esterne dell'ambiente in cui cresce il cristallo possono agire soltanto entro stretti limiti, senza cioè impedire che si formi quell'abito caratteristico del cristallo di quarzo.

Se invece in un minerale dello stesso sistema cristallino del quarzo la differenza fra il massimo e il minimo accrescimento fosse nulla o quasi nulla, allora potrebbero maggiormente influire le circostanze esterne di cristallizzazione. Per es. della

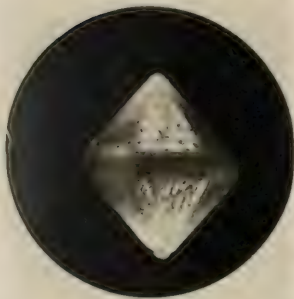
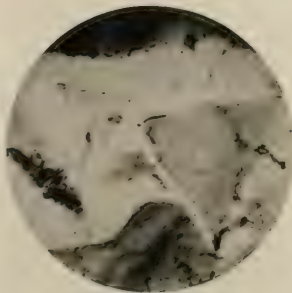
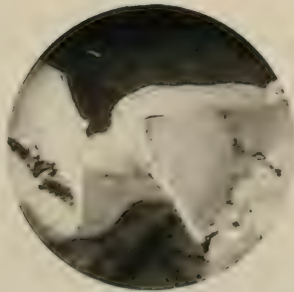
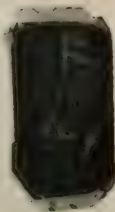
---

(1) Lehmann, *Molekularphysik*, vol. I, pag. 487.

3.

6.

FOT. CALZOLARI E FERRARIO, MILAN

1
2
3
4
5.
6

calcite sinora si è studiato da Spring soltanto la solubilità e la massima e la minima differiscono di poco; ed io ritengo che se si potesse studiare anche l'accrescimento, il massimo e il minimo presenterebbero pure piccola differenza.

Allora si spiegherebbe come sulla calcite, essendovi direi un'indifferenza nella direzione di sviluppo, mancando cioè quella preponderante tendenza ad accrescere in una direzione che possiede il quarzo, possano maggiormente influire le circostanze esterne, in modo che p. es. dalla soluzione di uno scalenoedro di calcite si possa, col variare di circostanze esterne, ricostituirsi una lamina esagonale formata solo dalle faccie del prisma e del pinacoide. Tale grande trasformazione sarebbe impossibile nel quarzo, ed una prova si ha che non havvi cristallo di quarzo, per distorto e deformato che sia, che non abbia almeno una faccia di romboedro principale, sempre presente nel quarzo per qualsiasi combinazione di forme.

In altri termini, considerando le forze interne inerenti alla materia individuale del quarzo e della calcite, si potrebbe dire che nel quarzo sono tali, che esso resiste di più della calcite alle influenze delle forze esterne dipendenti dall'ambiente, in cui crescono i rispettivi cristalli.

Ed anche a riguardo del così detto *risanamento dei cristalli* mi pare naturale che per il quarzo la velocità, dirò, di guarigione debba dipendere dalla direzione della ferita rispetto alla direzione di massima velocità di accrescimento. Ossia se supponiamo in un cristallo di quarzo due spaccature o due sottili litoclasi (parlando da mineralogo e non da medico) di eguale ampiezza, una parallela all'asse di simmetria principale e l'altra inclinata ad esso, quest'ultima dovrà riempirsi di sostanza quarzosa molto più presto e tanto più velocemente quanto più la sua direzione si avvicina ad essere normale alla direzione dell'asse di simmetria principale il quale, nel quarzo, coincide con quello di massima velocità di accrescimento. Ed in un prossimo lavoro spero di ciò dimostrare con figure ritraenti i risultati di altre esperienze sul quarzo relative a detto argomento.

L'associazione delle idee conduce naturalmente dalla riparazione dei cristalli rotti alla cementazione di frammenti di quarzo; perciò termino questo lavoro coll'accennare ad una preliminare esperienza che fa parte di un tentativo di ricerche che

sto facendo per stabilire un carattere petrografico distintivo fra le quarziti di origine chimica e quelle di origine detritica.

In un esperimento conforme a quello eseguito per l'accrescimento del quarzo ematoide, posi questa stessa sostanza ridotta in polvere grossolana per averne la cementazione colla silice che, proveniente dalla decomposizione del vetro, si sarebbe deposta allo stato di quarzo. Infatti io ebbi per risultato una massa, la quale, essendo i grani troppo grossi, presentava ancora delle cavità in cui apparivano faccie terminali di cristalli di quarzo, ma tuttavia la massa si presentava tenace al punto da lasciarsi segare per farne preparati microscopici. E la fig. 5 rappresenta una sezione, di una parte scevra di cavità, vista alla luce naturale e nella quale le parti oscure figurano i granuli più o meno trasparenti di quarzo ematoide; e la parte bianca il quarzo nuovo che, costituendo il loro cemento, si depositò intorno ai granuli, come risulta dalla fig. 6 vista fra i prismi incrociati.

---

## *Nuova specie di Peripatus dell'Ecuador;*

Nota del Socio LORENZO CAMERANO.

Le specie di Onicofori dell'America centrale, delle Antille e dell'America meridionale sono ancora poco note malgrado i lavori del Sedgwick e del Pocock. Ciò dipende particolarmente dalla rarità degli individui delle varie specie nelle località dove vivono e dalla difficoltà a procurarseli.

Della Repubblica dell' Ecuador, ad esempio, non vennero fino ad ora studiati che gli esemplari dai quali lo Schmarda trasse il disegno del suo *Peripatus quitensis* e gli esemplari coi quali io potei (1) dare la descrizione di questa specie, cosa che lo Schmarda non aveva fatto.

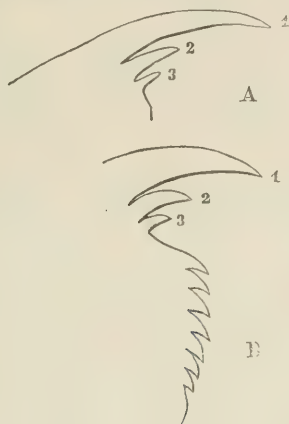
Di tutta la Bolivia non vennero studiati fino ad ora che due esemplari i quali mi servirono per la descrizione del *Peripatus Balzani* (2).

(1) Sul *Peripatus quitensis* Schmarda, " Atti R. Accademia delle Scienze di Torino ", vol. XXXII, 1897.

(2) L. Camerano, *Nuova specie di Peripatus raccolta dal Prof. Balzan in Bolivia*, " Annali Mus. Civico di Genova ", ser. 2ª, vol. XVIII, 1897.

Riesce perciò di speciale interesse un esemplare di *Peripatus* che il Dottor E. Festa ha raccolto recentemente nei contorni di Quito e che ha spedito generosamente in dono al Museo Zoologico di Torino insieme con altre ricchissime collezioni zoologiche.

L'esemplare ora menzionato presenta i caratteri seguenti (esemplare in alcool):

♀ — Lunghezza m. 0,022.
Larghezza mass. m. 0,004.
Zampe in numero di 26 paia.

A. Mandibola esterna. — B. Mandibola interna (molto ingrandite).

La mandibola esterna presenta tre denti. Il 1° il più lungo, il 2° poco più corto della metà del primo, e il 3° quasi lungo come la metà del secondo. La mandibola interna presenta: un grande dente ricurvo, un 2° dente poco più corto della metà del primo, un 3° dente lungo come la metà del secondo: viene quindi un diastema al quale fanno seguito sette denti relativamente grandi, vale a dire: i primi cinque quasi eguali al 3° dente sopradetto che precede il diastema, e gli ultimi due di poco più piccoli.

La colorazione è superiormente nerastra con una fascia longitudinale mediana più scura. Le antenne sono del colore del dorso e così pure la parte esterna delle zampe. Qua e là sul dorso vi sono alcune piccole macchiette un po' più chiare. Le parti inferiori sono bruno scure.

L'esemplare in questione è una femmina ed è adulto poichè contiene due embrioni a sviluppo avanzato sebbene ancora bianchicci. Esso rientra nel 2° gruppo da me proposto pei *Peripatus* neotropicali (1) nel quale la mandibola esterna ha almeno tre denti.

In questo gruppo si trovano pure: il *Peripatus quitensis* Schm. e il *P. Balzani* Camer.

La prima specie ha un numero di paia di zampe variabile da 31 a 36 (Gli embrioni a pelle già inscurita ne presentano 33 paia). I denti che seguono il diastema nella mandibola interna sono grandi e in numero di quattro: e i denti della mandibola esterna sono pure in numero di quattro.

Nel *P. Balzani* le paia di zampe variano da 26 a 27. La mandibola interna ha quattro denti prima del diastema e tredici molto piccoli dopo.

Il nostro esemplare può quindi considerarsi appartenere ad una nuova specie, diversa dal *P. quitensis* pel numero di paia di zampe e per le mandibole interna ed esterna e diversa dal *P. Balzani* pure per la mandibola interna e per la colorazione. Propongo per essa il nome di *Peripatus Corradi,* lieto di dedicarla all'Avv. Corrado Festa padre del nostro coraggioso e generoso esploratore e naturalista il Dott. Enrico Festa.

La diagnosi del *P. Corradi* si può formulare nel modo seguente:

## ***Peripatus Corradi*** n. sp.

*Superiormente di color nerastro* (esempl. in alcool) *con una linea mediana longitudinale più scura: antenne e parte esterna delle zampe colorite come il dorso: parti inferiori di color bruno scuro: zampe in numero di 26 paia: mandibola esterna con 3 denti: il 1° il più lungo, il 2° un po' più corto della metà del primo, il 3° lungo circa la metà del secondo: mandibola interna con 3 denti prima del diastema: il 1° il più lungo, il 2° poco più corto della metà del primo, il 3° lungo come la metà del secondo: i denti che tengono dietro al diastema sono 7 e sono grandi presso a che come il 3° dente che precede il diastema stesso* (Habitat. Quito).

(1) Nuova specie di *Peripatus* (Op. cit.).

# *Contributo allo studio del Problema di Pothenot;*

Nota dell'Ing. GIUSEPPE DELITALA.

§ 1. **Preliminari.** — Nei rilevamenti grafici coll'uso della tavoletta pretoriana e in alcuni casi di rilevamento numerico coll'uso dei goniometri è utile la determinazione grafica di un *punto a vertice di piramide,* cioè d'un punto rilevato per intersezione inversa da una sola stazione misurando gli angoli orizzontali delle visuali dirette dal punto che si vuol determinare almeno a tre punti già noti di posizione.

Ai metodi finora conosciuti crediamo vantaggioso nella pratica suggerirne uno molto semplice, rigoroso e che non richiede l'uso del compasso, esso è basato sul seguente teorema (*):
" La congiungente il vertice comune B di due lati AB, BC col
" punto a vertice di piramide P, è l'altezza del triangolo avente
" per base la congiungente l'estremità E, F dei diametri pas-
" santi pel vertice comune delle due circonferenze capaci degli
" angoli α, β sotto cui sono visti quei due lati ".

*Dimostrazione* (fig. 1ª). — Sieno i due lati $AB = a$, $BC = b$ e l'angolo $\widehat{ABC} = B$ d'una triangolazione; $\widehat{APB} = \alpha$, $\widehat{BPC} = \beta$ gli angoli sotto cui sono visti i due lati dal punto a vertice di piramide P. Si costruiscano sui due lati AB, BC le due circonferenze capaci degli angoli α, β; la congiungente l'estremità dei due diametri BE, BF passerà pel punto P e riescirà perpendicolare alla congiungente BP. Infatti, si tirino le rette PA, PC; PE, PF; AE, CF, ne risultano i quattro triangoli rettangoli BPE, BPF; BAE, BCF e la retta BP forma colle due rette PE, PF due angoli consecutivi $\widehat{EPB}$, $\widehat{FPB}$ che sono retti, dunque i due lati non comuni PE, PF sono per diritto.

(*) Il primo ad indicare questo metodo è stato il sig. Sossna nel " Zeitschrift für Vermessungswesen ", 1896, pag. 269.

§ 2. **Soluzione grafica del problema** (fig. 1ª). — Si osserva che l'angolo $\widehat{AEB} = \widehat{APB} = \alpha$, $\widehat{BFC} = \widehat{BPC} = \beta$, quindi saranno:

$$(1) \qquad BE = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}, \qquad BF = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$$

e si deduce il metodo grafico per determinare la posizione del punto a vertice di piramide P.

Si costruiscano sui due lati BA, BC col vertice comune in B ed in senso opposto l'uno dell'altro gli angoli $\widehat{ABE} = \frac{\pi}{2} - \alpha = \alpha'$, $\widehat{CBF} = \frac{\pi}{2} - \beta = \beta'$, cioè sieno $\alpha'$, $\beta'$ complementi di $\alpha$ e di $\beta$ e si portino su queste due direzioni le lunghezze BE, BF date dalle formule (1), la perpendicolare abbassata dal vertice B sulla congiungente EF risolve il problema.

Si può evitare il calcolo numerico dei due diametri BE, BF osservando che l'estremità E, F si trovano pure sulle perpendicolari elevate in A e in C ai due lati della triangolazione BA, BC.

Si può anche fare a meno di costruire col rapportatore nel vertice comune B i due angoli $\alpha'$, $\beta'$, specialmente quando sono disegnate sul foglio di tavoletta le direzioni delle visuali dirette dal punto di stazione $S_e$ ai tre punti del terreno (A), (B), (C) e si vuole l'orientamento della medesima (fig. 2ª).

Perciò s'inserisca nell'angolo $(A)\widehat{S_e}(B)$ un segmento di retta perpendicolare alla direzione $S_e(A)$ ed eguale al lato $A_1 B_1 = a$ e sia $B_1$ l'estremità o punto d'incontro colla direzione $S_e(B)$: da esso punto si abbassi la perpendicolare sulla direzione $S_e(C)$ e si porti il segmento $B_1 C_1 = b$; quindi dal punto $C_1$ la parallela alla direzione $S_e(C)$ fino ad incontrare in $S_f$ la direzione $S_e(B)$. I due triangoli rettangoli così costruiti $S_e A_1 B_1$, $S_f C_1 B_1$ riportati nella medesima scala di proporzione sui due lati AB, BC forniscono le estremità E, F, dei due diametri passanti pel vertice comune B e quindi si completa la costruzione abbassando la perpendicolare BP sulla congiungente EF (*).

---

(*) Nella scelta dei punti trigonometrici e d'appoggio è necessario che sieno in posizioni favorevoli; per riconoscere queste vedi il recente lavoro: *La determinazione di un punto a vertice di piramide,* dell'ing. G. B. Maf-

§ 3. **Soluzione analitica del problema.** — Dalla considerazione delle due coppie di triangoli (fig. 1ª): PAB, PEB; PCB, PFB si ricava l'eguaglianza degli angoli:

$$\widehat{PAB} = \widehat{PEB} = \varphi, \qquad \widehat{PCB} = \widehat{PFB} = \psi$$

cioè gli angoli alla base in E ed F del triangolo BEF, di cui si conoscono due lati e l'angolo compreso, non sono altro che gli angoli in A e in C del quadrilatero ABCP dal quale ultimo si fa dipendere appunto la risoluzione analitica del problema di Pothenot. Quindi la risoluzione di esso triangolo conduce alle note formule di risoluzione degli angoli $\varphi$ e $\psi$. Infatti, poniamo:

$$BE = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = a', \quad BF = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = b',$$

$$\widehat{EBF} = B + \alpha + \beta - \pi = B'$$

saranno:

$$(2) \qquad \varphi + \psi = 2\pi - (B + \alpha + \beta), \qquad \frac{\varphi+\psi}{2} = \pi - \frac{B+\alpha+\beta}{2}$$

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{b'-a'}{b'+a'} \times \operatorname{tang}\frac{\varphi+\psi}{2}$$

$$= \frac{b\operatorname{sen}\alpha - a\operatorname{sen}\beta}{b\operatorname{sen}\alpha + a\operatorname{sen}\beta} \times \operatorname{tang}\frac{\varphi+\psi}{2}$$

e ponendo:

$$(3) \qquad \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a\operatorname{sen}\beta} = \cot\rho$$

si avrà:

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{\cot\rho - 1}{\cot\rho + 1} \times \operatorname{tang}\frac{\varphi+\psi}{2}$$

ossia:

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\frac{\varphi-\psi}{2} = \cot\left(\rho + \frac{\pi}{4}\right) \times \operatorname{tang}\frac{\varphi+\psi}{2}$$

le formule (2), (3), (4) sono identiche a quelle conosciute.

---

FIOTTI, pubblicato nella " Rivista di Topografia " di Torino, vol. X, nⁱ 3-4-5, anno 1897. Nel caso dell'*indeterminazione* cioè di $B = \pi - (\alpha + \beta)$ la BP è in linea retta con EF.

Al triangolo BEF che gode l'importante proprietà di offrire la costruzione grafica e la soluzione analitica del problema diamo il nome di *triangolo fondamentale* corrispondente alla terna dei punti d'appoggio A, B, C rispetto al vertice comune o punto di collegamento B e s'indicherà mettendo per prima lettera quella di questo punto.

Così se il punto di collegamento fosse C (oppure A) gli angoli osservati saranno quelli dei due lati CA, CB (oppure dei lati AB, AC) ed allora il *triangolo fondamentale* da doversi considerare è rispetto al vertice C (oppure A) e s'indicheranno con $C\,E_1\,F_1$ (oppure $A\,E_2\,F_2$).

§ 4. **Verifica della soluzione grafica del problema.** — Affinchè il problema sia determinato in generale basta collimare dal punto di stazione a tre punti noti di posizione; nella pratica si suole collimare a quattro o più punti d'appoggio per avere un mezzo di controllo delle misure angolari; perciò applichiamo anche qui il metodo grafico per la verifica (fig. 1ª).

Sia D un quarto punto trigonometrico collegato direttamente al punto C mediante il lato $CD = c$ e l'angolo $\widehat{BCD} = C$ noti; si misuri l'angolo $\widehat{CPD} = \gamma$ e si consideri la nuova terna di punti B, C, D.

Col vertice comune in C ed in senso opposto l'uno dell'altro sui due lati CB, CD si costruiscano gli angoli $\widehat{BCG} = \frac{\pi}{2} - \beta = \beta'$, $\widehat{DCH} = \frac{\pi}{2} - \gamma = \gamma'$, essendo $\gamma$ l'angolo sotto cui è visto il lato CD, e sulle direzioni così determinate si portino le lunghezze: $CG = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$, $CH = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$.

Si può semplificare tale costruzione osservando che la direzione del diametro CG deve passare pel punto di mezzo $O_2$ del diametro BF ed essere a questo eguale in grandezza. La congiungente le due estremità G ed H dei due diametri e la perpendicolare CQ s'incontrano nel piede Q che deve coincidere, se gli angoli sono esatti, col punto P. Si ottiene così un mezzo di controllo per verificare l'esattezza degli angoli osservati $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, senza tener conto di altri controlli che la costruzione grafica della figura presenta.

Nel caso in cui non sia verificata la coincidenza dei due punti P e Q si domanda quale sarà la posizione vera o approssimata del punto a vertice di piramide? Per rispondere adeguatamente alla domanda osserviamo che l'effetto dello spostamento del piede della perpendicolare dalla sua vera posizione può dipendere: *a)* dall'errore, sempre piccolissimo, commesso nella misura di uno solo dei tre angoli $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sotto cui sono visti i tre lati AB, BC, CD; *b)* dagli errori commessi in due soltanto dei tre angoli, p. es. $(\alpha, \beta)$ $(\beta, \gamma)$ $(\gamma, \alpha)$; *c)* dagli errori commessi nei tre angoli $(\alpha, \beta, \gamma)$.

Qualora l'errore avvenisse solo nell'angolo $\alpha$ oppure in $\gamma$ è facile vedere che il punto Q ovvero P è la vera posizione del punto cercato, in ogni altro caso i due punti si spostano entrambi dalla vera posizione del punto a vertice di piramide.

Ciò premesso, nella costruzione grafica possono avvenire solo i due casi seguenti: 1° L'altezza (la base) di uno dei due triangoli fondamentali non passa pel piede della perpendicolare dell'altro triangolo fondamentale e quindi non si verifica alcuna coincidenza e l'incontro delle quattro rette (due basi e due altezze) darà luogo ad un piccolo quadrilatero PRQT con due angoli opposti al vertice retti e perciò inscrittibile in una circonferenza (fig. 3ª).

2° L'altezza (la base) di uno dei due triangoli fondamentali passa pel piede P o Q della perpendicolare dell'altro triangolo, ed in questo caso dovrà pure verificarsi la coincidenza dei punti P e Q; infatti i quattro punti B, F; C, G estremità di due diametri dello stesso cerchio ed i punti P e Q devono trovarsi sulla medesima circonferenza capace dell'angolo $\beta$, quindi se l'altezza (la base) di uno dei triangoli fondamentali passa per il piede P o Q questi due punti debbono coincidere.

Supponiamo che gli errori angolari sieno piccole quantità dell'ordine di grandezza dei consueti errori di osservazione, col diminuire dei medesimi è evidente ci avvicineremo alla vera posizione del punto cercato ed il quadrilatero PRQT tenderà ad impicciolirsi. Perciò ci sembra logico affermare che un punto interno di esso è molto probabile goda la proprietà di occupare la vera posizione. Non conoscendo noi la legge degli errori degli angoli osservati, non possiamo dare la preferenza all'uno piuttosto che all'altro punto perciò siamo indotti ad ammettere come

posizione più probabile del punto a vertice di piramide cercato quello equidistante dai quattro vertici del quadrilatero, ossia il centro della circonferenza circoscritta ch'è il punto di mezzo 0 della diagonale RT.

A questo circolo possiamo dare il nome di *circolo di correzione degli errori* e definire come " il luogo dei piedi delle " perpendicolari abbassate dai *punti di collegamento* sulle basi " dei rispettivi *triangoli fondamentali* ".

§ 5. **Verifica della soluzione analitica del problema.** — Coll'esistenza di questo circolo nasce spontanea l'idea della ricerca dell'espressione del suo raggio, che crediamo poter determinare col ragionamento seguente.

Sieno gli angoli osservati $(\alpha, \beta, \gamma)$ affetti dagli errori $(\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma)$, saranno, per l'esatta determinazione del punto a vertice di piramide, gli angoli corretti: $(\alpha_0 = \alpha + \Delta\alpha,\ \beta_0 = \beta + \Delta\beta,\ \gamma_0 = \gamma + \Delta\gamma)$ e diciamo i complementi con $(\alpha_0', \beta_0', \gamma_0')$. Indichiamo inoltre con $(\Delta D_\alpha, \Delta D_\beta, \Delta D_\gamma)$ le differenze fra i diametri calcolati ed i veri delle tre circonferenze capaci dei rispettivi angoli e cominciamo ad occuparci di una di queste *variazioni dei diametri,* p. es. della prima, avremo:

$$(5)\quad \Delta D_\alpha = BE - BE_0 = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha+\Delta\alpha)} = a\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\Delta\alpha) - \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\Delta\alpha)}.$$

Vediamo subito che all'errore $\Delta\alpha \gtrless 0$ corrispondono gli angoli: $\alpha_0 \gtrless \alpha$, $\alpha_0' \lessgtr \alpha'$ ed il diametro $BE \gtrless BE_0$; nel caso concreto della fig. 3ª risulta $BE < BE_0$. Ciò premesso, la formula (5) si può trasformare così:

$$\Delta D_\alpha = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \times \frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\Delta\alpha - \operatorname{sen}\alpha(1-\cos\Delta\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha+\Delta\alpha)}$$

ossia:

$$\Delta D_\alpha = \frac{2a\operatorname{sen}\frac{\Delta\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\alpha} \times \frac{\cos\left(\alpha+\frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\alpha+\Delta\alpha)}$$

ed esprimendo l'errore $\Delta\alpha$ in secondi d'arco:

$$(6)\qquad \Delta D_\alpha = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \times \frac{\Delta\alpha}{\operatorname{sen}1''} \times \frac{\cos\left(\alpha+\frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\alpha+\Delta\alpha)}.$$

Osserviamo in quest'ultima che per il medesimo errore angolare $\Delta\alpha$ la variazione del diametro corrispondente è compresa fra i due limiti massimo e minimo vicinissimi e perciò indifferente prendere l'una o l'altra delle due seguenti:

$$(7)\qquad \Delta D_\alpha = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \times \frac{\Delta\alpha}{\operatorname{sen} 1''} \times \cot\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)$$

$$(8)\qquad \Delta D_\alpha = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \times \frac{\Delta\alpha}{\operatorname{sen} 1''} \times \cot(\alpha + \Delta\alpha).$$

Attenendoci al minimo, si otterranno formule analoghe per le variazioni degli altri due diametri corrispondenti agli errori angolari $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$.

$$(9)\qquad \begin{cases} \Delta D_\beta = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} \times \dfrac{\Delta\beta}{\operatorname{sen} 1''} \times \cot(\beta + \Delta\beta) \\[2ex] \Delta D_\gamma = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \quad \dfrac{\Delta\gamma}{\operatorname{sen} 1''} \times \cot(\gamma + \Delta\gamma). \end{cases}$$

Indichiamo con $\Delta p$ e $\Delta q$ gli *spostamenti normali* dei piedi delle perpendicolari P e Q dalla vera posizione del punto a vertice di piramide 0 misurato in direzione normale alla base del rispettivo triangolo fondamentale, possiamo determinarli nel modo seguente.

Per la piccolezza dell'errore angolare $\Delta\alpha$ si può ritenere il diametro BE = BK (fig. 3ª), quindi la variazione

$$\Delta D_\alpha = KE_0$$

e

$$KL = \Delta D_\alpha \operatorname{sen}\varphi_0.$$

Analogamente dalla considerazione del triangoletto rettangolo $NMF_0$ si ha:

$$MN = \Delta D_\beta \operatorname{sen}\psi_0$$

e per lo spostamento normale $\Delta p$ si può prendere la media aritmetica dei due spostamenti normali dei due vertici E, F del triangolo fondamentale e scrivere l'eguaglianza.

$$(10)\qquad \Delta p = \frac{KL + MN}{2} = \frac{\Delta D_\alpha \operatorname{sen}\varphi_0 + \Delta D_\beta \operatorname{sen}\psi_0}{2}.$$

In modo affatto analogo si ottiene lo spostamento normale dei vertici G ed H del secondo triangolo fondamentale e quindi del piede Q osservando che i seni degli angoli al vertice sono: $\mathrm{sen}(\beta+\psi_0)$ e $\mathrm{sen}(\gamma+C-\psi_0)$, quindi possiamo scrivere:

$$(11) \qquad \Delta q = \frac{\Delta D_\beta \,\mathrm{sen}(\beta+\psi_0) + \Delta D_\gamma \,\mathrm{sen}(\gamma+C-\psi_0)}{2}.$$

Finalmente troviamo l'espressione del raggio del circolo di correzione in funzione dei due spostamenti normali $\Delta p$ e $\Delta q$.

Si osserva che nel piccolo quadrilatero risultante PRQT i lati e le diagonali sono:

$$(12) \quad \begin{cases} PT=2\Delta p, \; QT=2\Delta q, \; PR=2\sqrt{r^2-\overline{\Delta p}^2}, \; QR=2\sqrt{r^2-\overline{\Delta q}^2}, \\ TR=2r \quad PQ=2t\,\mathrm{sen}\,\beta \end{cases}$$

ponendo l'angolo $\widehat{PTQ}=\beta$.

Applichiamo il teorema di Talete, si ha la relazione:

$$(13) \qquad r = \Delta p \times \frac{RQ}{PQ} + \Delta q \times \frac{PR}{PQ}.$$

Sostituendovi i valori dati dalle formule (12) avremo:

$$(14) \qquad r^2 \mathrm{sen}\,\beta = \Delta p\sqrt{r^2-\overline{\Delta q}^2} + \Delta q\sqrt{r^2-\overline{\Delta p}^2}$$

equazione questa che risolta rispetto all' incognita $r^2$ risolve il problema; fatte le debite operazioni si ottiene il risultato seguente:

$$(15) \qquad r^2 = \frac{\overline{\Delta p}^2 + \overline{\Delta q}^2 \pm 2\Delta p \times \Delta q \times \cos\beta}{\mathrm{sen}^2\beta}.$$

Si osserva che prendendo il segno inferiore il trinomio del secondo membro è il quadrato del terzo lato di un triangolo avente per gli altri due lati $\Delta p$ e $\Delta q$ e l'angolo da essi compreso $\beta$. Nella figura 3ª corrisponde precisamente al triangoletto $Tpq$ essendo i punti $p$ e $q$ di mezzo dei due spostamenti nor-

mali, quindi risulta: $pq = l = \frac{PQ}{2} = \frac{d}{2}$, sarà perciò il raggio del circolo di correzione:

$$r = \frac{l}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{d}{2\operatorname{sen}\beta}. \tag{16}$$

Si può dire: " Il raggio del cerchio di correzione è l'ipo-
" tenusa d'un triangolo rettangolo che ha un cateto eguale alla
" semidistanza dei piedi delle perpendicolari dei due triangoli
" fondamentali e l'angolo opposto eguale a quello delle due
" visuali dirette ai due vertici di collegamento "; daremo a $\beta$ il nome di *angolo di collegamento delle visuali.*

La relazione (14) si potea ricavare direttamente dalla considerazione del *triangolo normale* PQT e dal piccolo quadrilatero $Tp0q$ simile al quadrilatero TPRQ col rapporto dei lati omologhi di 1 : 2.

L'*angolo di collegamento* $\beta$ gode d'una importante proprietà che qui rileviamo: si vede chiaramente che coll'aumentare dell'angolo $\beta$ diminuiscono contemporaneamente la *variazione del diametro* corrispondente $\Delta D_\beta$ data dalla (9), gli *spostamenti normali* $\Delta p$ e $\Delta q$ dati dalle (10) e (11), il terzo termine del trinomio del numeratore della relazione (15), mentre aumenta in proporzione maggiore di questo terzo termine il suo denominatore; sicchè coll'aumentare l'angolo di collegamento, diventa sempre più piccolo il *raggio* del *cerchio di correzione,* quindi minore l'errore nella determinazione del punto a vertice di piramide; il minimo errore corrisponde all'angolo $\beta = \frac{\pi}{2}$ e si può conchiudere che la posizione più favorevole per la scelta dei punti d'appoggio si verificherà quanto più l'angolo di collegamento si avvicinerà all'angolo retto (*).

---

(*) Le denominazioni da noi adottate di: *triangoli fondamentali, cerchio di correzione degli errori, variazioni dei diametri, spostamenti normali* e *angolo di collegamento delle visuali*, crediamo sieno giustificate dall'ufficio cui gli elementi definiti adempiono nello studio compiuto.

§ 6. **Conclusioni.** — Dalle cose dette nella presente nota si deducono i seguenti risultati, non ancora, per quanto è a nostra conoscenza, da altri enunciati:

1° — " La risoluzione *grafica* ed *analitica* del problema " di Pothenot si può far dipendere dalla *costruzione* e dalla " *risoluzione* del *triangolo fondamentale* rispetto al punto di col- " legamento dei due lati della triangolazione osservati ".

2° — " La posizione più probabile del punto a vertice " di piramide appoggiato a quattro punti trigonometrici cade " nel *centro del circolo di correzione* ".

3° — " La verifica *grafica* ed *analitica* del problema di " Pothenot si può far dipendere dalla *costruzione* del *cerchio* " *di correzione* ".

4° — " Nella verifica del problema di Pothenot concor- " rono le determinazioni degli *spostamenti normali* che dipendono " dalle *variazioni dei diametri* che alla loro volta si esprimono " in funzione degli elementi dati, degli angoli osservati e degli " errori angolari ".

5° — " La posizione più favorevole per la scelta dei " punti d'appoggio nell'applicazione del problema di Pothenot " si avrà quando l'*angolo di collegamento delle visuali* si appros- " sima all'angolo retto ".

Fig. 1

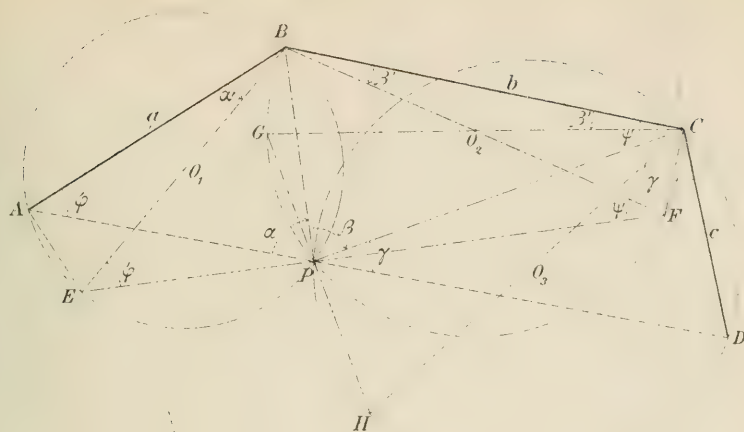
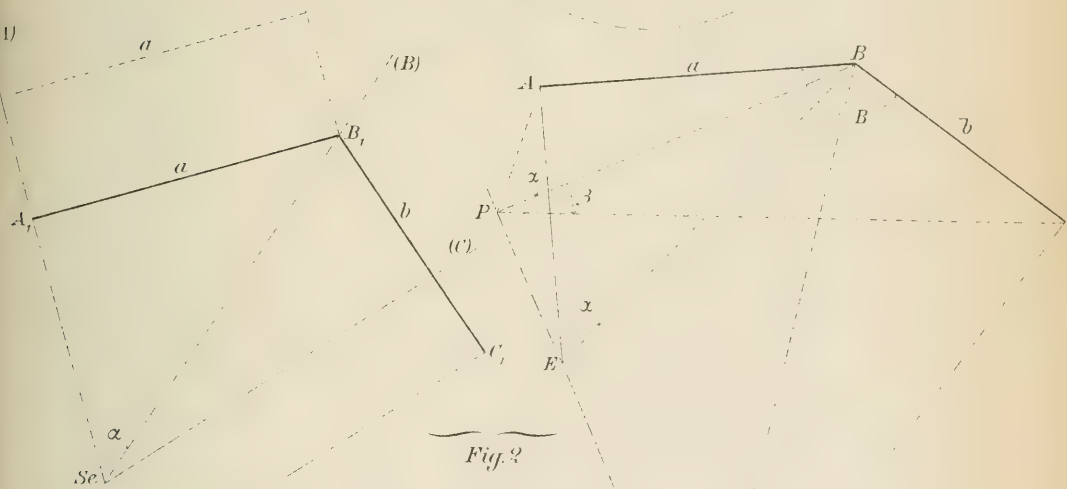



Fig. 2

Fig. 3

# *Delle terminazioni nervose nei gomitoli delle glandole sudorifere dell'uomo;*

Nota del Dott. PASQUALE SFAMENI.

In trattati anche recenti di Anatomia microscopica e macroscopica si nota, che intorno ai nervi delle glandole sudorifere o si tace addirittura (Schenk (1), Klein (2)), o è detto che essi vi sono sconosciuti (Beaunis e Bouchard (3)). Il Sappey accenna alla presenza di nervi sulle dette glandole con le seguenti parole: " intorno ad ogni corpo glandolare ho potuto " vedere un plesso nervoso quasi tanto ricco quanto la rete dei " vasi sanguigni „ (4).

L' Unna (5) dice che nervi fino rasente ai gomitoli delle glandole sudorifere furono seguìti da Hermann e da Coyne, i quali però non avevano potuto constatare le vere terminazioni di detti nervi.

Ma stando a quanto riferisce il Testut (6) parrebbe che l' Hermann e il Coyne non solo avessero accompagnato alcuni nervi fino rasente ai gomitoli delle glandole sudorifere, bensì che vi avessero riscontrato quello che già aveva visto il Sappey, cioè l'esistenza di una rete nervosa *amielinica* intorno a ciascuna glandola sudorifera, aggiungendo che anche il Tomsa e il Ficatier erano riusciti a risultati identici. Questa osservazione del Testut però non sembrami molto precisa, poichè il Sappey dice soltanto di aver trovato intorno ad ogni corpo glandolare un plesso nervoso quasi tanto ricco quanto la rete dei vasi sanguigni; ma non dice punto se questo plesso nervoso fosse fatto

(1) Schenck, *Istologia normale dell'uomo.* Trad. Monti con note originali di C. Golgi.

(2) Klein, *Nouveaux éléments d'histologie.* Trad. et annotés par Variot.

(3) Beaunis e Bouchard, *Anatomia umana normale.* Trad. pag. 1024.

(4) Sappey, *Trattato di Anatomia descrittiva.* Trad. vol. III, pag. 585.

(5) Ziemsenn, *Patologia e terapia medica speciale.* Vol. XIV, parte 1ª, p. 111.

(6) Testut, *Traité d'Anatomie humaine.* T. III, pag. 37, 1894.

di fibre amieliniche o meno. Il Testut aggiunge ancora che il Coyne riuscì a constatare elementi coi caratteri delle cellule nervose periferiche sulla faccia esterna della membrana propria del tubo glomerulare.

Solo a titolo di curiosità aggiungo che il Kölliker (1) dice di aver visto già da molti anni in una glandola ceruminosa una fibra a margini oscuri di 7μ di diametro.

Riassumendo dunque tutte le ricerche istituite allo scopo di conoscere i nervi nei gomitoli delle glandole sudorifere, conducevano a questi risultati:

α) esistenza di un plesso nervoso, quasi tanto ricco quanto la rete dei capillari sanguigni, intorno ad ogni corpo glandolare (Sappey);

β) esistenza di una rete nervosa intorno al corpo della glandola sudorifera fatta da fibre sprovviste di mielina (Tomsa, Hermann, Ficatier, Coyne);

γ) esistenza di elementi con caratteri di cellule nervose periferiche sulla faccia esterna della membrana propria del tubo glomerulare (Coyne).

Si tratta dunque, come ognun vede, di terminazioni nervose assai vagamente e indeterminatamente descritte, poichè nessun autore s'intrattiene a dire quali sono i rapporti che la terminazione nervosa assume coi diversi elementi del gomitolo glandolare.

Ma anche a questo proposito qualche notizia si trova nella letteratura. L'Unna (2), ad esempio, dice che il Dott. Openchowscky aveva seguìto filamenti nervosi privi di midollo, col metodo della preparazione d'oro, fin dentro ai gomitoli delle glandole sudorifere. " Io ho visto — dice l'Unna — su disegni " bene spiccati con acido osmico dei bottoncini terminali ner- " vosi tanto negli epitelii secretori, che negli epitelii di pas- " saggio al dutto; ma non fummi finora possibile di verificare " la costanza e l'appaiamento degli stessi ".

Il Ranvier (3) asserisce ch'egli, qualunque sia il metodo

(1) Kölliker, *Handbuch der Gewebelehre des Menschen,* 1889, S. 251, Erster Band.

(2) Ziemsenn, Loc. cit.

(3) Ranvier, " Journal de micrographie ", 1887, n. 5.

al cloruro d'oro impiegato, ha sempre constatato che ai glomeruli delle glandole sudorifere si portano in grande numero fibre nervose, formando un plesso a fibre finissime nella tunica connettivale; queste esili fibre si anastomizzano costituendo maglie assai strette e in generale dirette perpendicolarmente al grande asse del tubo secretore.

Un certo numero di fibre, seguita il Ranvier, partono da questo plesso nervoso, attraversano la membrana propria e arrivano allo strato muscolare. In questo strato — in sezioni ben fatte — fra gli elementi muscolari si scorgono linee violette, che potrebbero essere formate non solo dalla sostanza intercellulare, ma eziandio da fibre appartenenti al plesso, ben conosciuto per altri organi composti di fibre muscolari liscie — il plesso intramuscolare.

Nelle glandole sudorifere dell'uomo, egli conchiude, per quanto si può giudicare da preparazioni che ancora sono molto imperfette, esisterebbe un plesso fondamentale situato nella tunica connettivale del tubo secretore, e un plesso intramuscolare.

In seguito il Ranvier stesso aggiunge che per riguardo alle fibre nervose, che possono andare oltre la tunica muscolare, non si conosce nulla di positivo. Le cellule epiteliali, egli dice, del tubo secretore sono colorate in violetto intenso, su cui non risaltano le fibre nervose impregnate dall'oro — " Et encore " relativement au plexus intramusculaire il faut laisser un point " d'interrogation „.

Secondo me non è il caso di tenere in considerazione alcuna la notizia che, per conto del Dott. Openchowscky, ci fornisce l'Unna, e neppure una mediocre importanza si può accordare alle notizie proprie di questo autore, poichè desse sono assai monche ed imperfette. Degne di speciale attenzione mi sembrano invece le ricerche del Ranvier, dalle quali però non risulta altro di positivo che la esistenza di un plesso nervoso a fibre finissime nella tunica connettivale del tubo secretore — plesso fondamentale —, poichè l'esistenza del plesso intramuscolare, più che un fatto reale, si può ritenere come una induzione.

Esposto così tutto quello che è stato detto dagli autori su tale argomento, passo ad esporre il risultato delle mie ricerche.

Premetto anzitutto che le mie indagini si limitano solamente

alle glandole sudorifere dei polpastrelli delle dita e della palma della mano dell'uomo: delle glandole sudorifere, che si trovano in altri punti del corpo, non mi sono occupato.

Con queste mie osservazioni ho constatato che le fibre nervose dirigentisi verso il gomitolo della glandola sudorifera per formare in esso la terminazione nervosa, sono quasi sempre parecchie (fig. II), ma certamente non possono dirsi in grande numero. In alcuni esemplari però si nota che solo una o due fibre nervee si portano al gomitolo glandolare (fig. I); e qualche volta in fine si osserva che una sola fibra nervosa si divide in due rami, di cui uno va a raggiungere un gomitolo glandolare e l'altro un altro gomitolo vicino. Bisogna però aggiungere che questo fatto suole avvenire nei gomitoli di piccole dimensioni e mai in quelli di una certa grandezza, in cui la fibra nervosa che vi forma la terminazione non è mai unica, e per quello che io ho riscontrato, sembrami che il numero delle fibre nervose che vanno a penetrare dentro un gomitolo, stia in ragione diretta con la grandezza di esso.

Nella maggioranza dei casi avviene che le fibre nervose raggiungono il gomitolo tutte nel medesimo punto (fig. II) ed è raro che vi s' immettano in punti differenti (fig. I).

Nei casi in cui la fibra nervosa, che si dirige al gomitolo, è unica, essa è costituita dagli elementi proprii di ogni singola fibra nervosa periferica, ma quando le fibre sono parecchie, costituiscono insieme un piccolo fascetto nervoso fornito di nevrilemma (fig. II) che appena raggiunto il glomerulo glandolare, si continua direttamente con l' involucro connettivale del glomerulo medesimo (fig. II).

Le fibre nervose guadagnano il contorno del gomitolo, ne attraversano l' involucro celluloso, si spogliano della mielina e vanno a formare una ricca rete intorno al dutto glandolare, seguendo tutte le volute, che esso forma dentro al gomitolo, come vedesi distintamente nelle fig. I e II, in cui l' intreccio amielinico, che costituisce la terminazione nervosa sul tubo glandolare, segue i giri del condotto medesimo.

Ma per avere conoscenza esatta del rapporto, che la rete nervosa testè descritta assume rispetto ai diversi strati costituenti il condotto glandolare, ho creduto conveniente fare dei tagli al microtomo ed in essi ho riscontrato i seguenti fatti.

La rete nervosa si trova situata nello strato medio (membrana propria — membrana limitante) del tubo secretore; pare anzi che detta membrana sia totalmente costituita dalla rete nervosa: questa per conseguenza si trova in rapporto all'esterno con la tunica connettivale e all'interno con lo strato epiteliale (fig. III-IV), ma mentre esternamente presenta una superficie convessa, ben netta e limitata dalla tunica connettivale, in cui non manda alcun ramo, internamente invece essa con una superficie concava si adatta alla base dell'epitelio: da questo lato inoltre essa manda tra cellula e cellula piccoli prolungamenti che arrivano ad altezza differente (fig. III-IV) e servono senza dubbio ad aumentare i rapporti fra la terminazione nervosa e gli elementi secretori della glandola.

Sulle sezioni da me praticate per questo studio non ho mai trovato lo strato di fibre muscolari liscie, che dagli autori viene descritto tra membrana propria ed epitelio del tubo secretore. Però riferisco testualmente ciò che dice in proposito il Sappey (1): " Questo strato (muscolare) è molto evi-
" dente nelle grosse glandole del cavo dell'ascella e in quelle
" della areola della mammella. È però probabile ed anche ve-
" rosimile che esso appartenga a tutte le altre, ma in queste
" ultime la sua esistenza fino ad ora non è molto ben dimo-
" strata ". Io ritengo probabile che questo strato manchi nelle glandole sudorifere delle regioni da me esaminate. Ma ammesso pure che lo strato muscolare si trovi senza eccezione in tutte le glandole sudorifere, e che io non lo abbia riscontrato forse perchè il metodo al cloruro d'oro, da me impiegato, non lo renda evidente, tuttavia non credo che per questo fatto possano venire gran che modificati i rapporti fra rete nervosa e strato epiteliale del tubo secretore, poichè lo strato muscolare non forma un involucro continuo intorno all'epitelio: si sa infatti che tra le fibre muscolari non esistono rapporti di contiguità, essendo separate — come dice il Testut (2) — da spazii più o meno grandi, *attraverso cui, le cellule glandolari si mettono direttamente a contatto con la membrana propria.*

---

(1) Sappey, *Trattato di Anatomia descrittiva.* Vol. III, pag. 585.
(2) Testut, *Traité d'Anatomie humaine.* T. III, pag. 34, 1894.

Da quanto ho detto, appare chiaramente che i risultati delle mie ricerche sono affatto differenti da quelli ottenuti dagli autori, che si sono occupati delle terminazioni nervose nelle glandole sudorifere. Ed invero non si tratta nè di plesso nervoso (Sappey (1)), nè di rete nervosa amielinica (Tomsa, Hermann, Ficatier, Coyne (2)) intorno al corpo della glandola sudorifera, nè in fine delle numerosissime fibre nervose formanti un plesso a fibre finissime " dans la tunique connective „ (Ranvier (3)); ma si tratta invece di una rete nervosa amielinica data da una o parecchie fibre nervee, situata internamente alla tunica connettivale intorno al condotto secretore della glandola e precisamente nella membrana propria, che — ripeto — viene sostituita o meglio costituita dalla detta rete nervosa.

Con questo non intendo d'invalidare le ricerche dei citati autori e sono d'avviso che la rete nervosa amielinica da loro trovata intorno al corpo delle glandole sudorifere (compreso il Ranvier, che con maggior precisione la descrive come esistente nella tunica connettiva del glomerulo glandolare) rappresenti una rete di fibre pallide vasomotrici, che si distribuisce al ricco plesso di capillari sanguigni esistente intorno al corpo glandolare: a questa mia opinione fa buon viso l'asserto del Tomsa, il quale, secondo riferisce il Kölliker (4), nota che i nervi delle glandole sudorifere formano una ricca rete intorno alle glandole e *ai capillari di esse.*

D'altro canto ritengo che la terminazione da me descritta presieda direttamente alla funzione secretiva della glandola e per la posizione che occupa e per i rapporti che essa mantiene con l'epitelio secernente: per conseguenza sono nervi secretori quelli che dànno luogo alla detta terminazione nervosa.

Nelle mie ricerche fatte impiegando il cloruro d'oro, secondo i metodi di Fischer e di Löwit, non sono mai riuscito a vedere la rete nervosa descritta dagli autori sopra citati, ma questo fatto non offre nulla di strano per chi ha una certa pratica di queste ricerche e conosce quindi quanto sono incostanti

(1) Sappey, Loc. cit.
(2) Testut, Loc. cit., pag. 37.
(3) Ranvier, Loc. cit.
(4) Kölliker, Loc. cit.

i metodi al cloruro d'oro, come sono differenti i risultati che si ottengono adoperando un metodo, piuttosto che un altro, e in fine quanto è vario il risultato ottenuto con uno stesso metodo volta a volta che esso si adopera. Perciò a me sembra molto dommatica l'asserzione del Ranvier (1), il quale dice di aver trovato sempre la rete nervosa da lui descritta " quel que " soit le procédé de la méthode de l'or que l'on emploie ".

Riassumendo dunque a me pare di poter venire alle seguenti conclusioni:

I) La terminazione nervosa delle glandole sudorifere ha sede nella membrana propria del condotto secretore.

II) La detta terminazione ha forma di rete e mettesi in rapporto diretto e intimo con l'epitelio secretore.

III) La membrana propria si può ritenere costituita dalla rete nervosa.

IV) Sono nervi secretori quelli che formano la terminazione suddetta.

V) Molto probabilmente la rete nervosa amielinica descritta da Tomsa, Hermann, Ficatier, Coyne, e più dettagliatamente dal Ranvier, è costituita da fibre nervose vasomotrici che si distribuiscono ai capillari delle glandole.

Dal Laboratorio della Clinica medica di Bologna diretto dal Prof. A. Murri.

---

(1) Ranvier, Loc. cit.

## SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Le figure sono state disegnate con l'aiuto della camera lucida Abbé Zeiss ed all'altezza del tavolino del microscopio.

Le lettere adoperate nelle figure significano:

*i c* — involucro connettivale del glomerulo
*c e* — condotto escretore della glandola
*f n* — fibra nervosa
*R n* — rete nervosa
*n* — nevrilemma
*t c* — tunica connettivale del condotto secretore (strato esterno)
*T n* — terminazione nervosa (strato medio)
*p* — prolungamenti della terminazione nervosa verso l'epitelio
*e* — epitelio.

Figura I — Glomerulo di glandola sudorifera, in cui la terminazione nervosa è data da 2 sole fibre penetranti nel gomitolo per punti differenti (1 . 2).
3/6 Koristka × 220.

Figura II — Gomitolo di glandola sudorifera, in cui la terminazione nervosa è data da 4 fibre penetranti tutte nello stesso punto. Due fibre nervose durante la preparazione si sono rotte e i capi sono allontanati. La terminazione nervosa si presenta a zone concentriche che indicano l'andamento dei giri del tubo secretore, intorno a cui essa è disposta.
4/6 t. a. Koristka × 325.

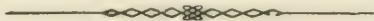
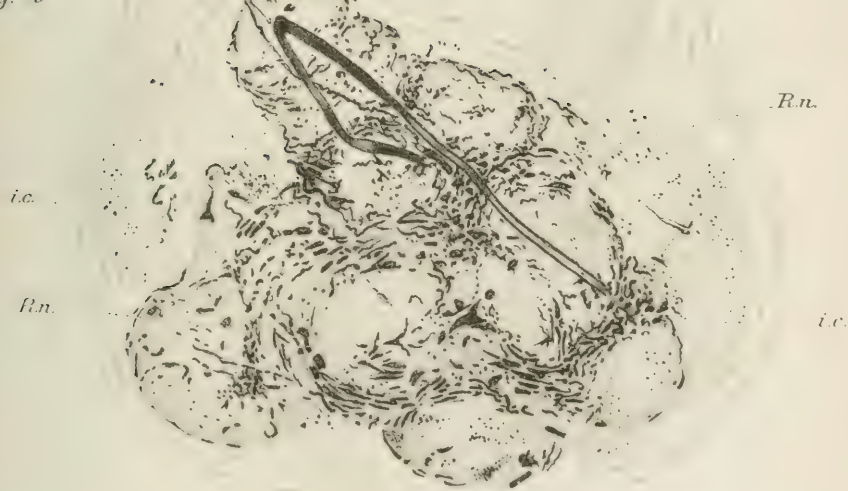
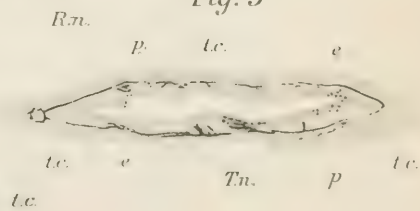
Figura III (*) — Sezione trasversale intiera del tubo secretore.
3/6 Koristka × 220.

Figura IV — Parte di sezione trasversa del tubo secretore.
3/8 t. a. Koristka × 450.

(*) Questa figura e la seguente hanno una forma ellissoide perchè, il gomitolo glandolare, essendo rimasto lungo tempo, prima di essere sezionato, sotto il vetrino coprioggetti, è rimasto schiacciato ed ha conservato questa forma.

*L'Accademico Segretario*
ANDREA NACCARI.

# CLASSE

DI

# SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

## Adunanza del 23 Gennaio 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Socii: Claretta Direttore della Classe, Peyron, Rossi, Perrero, Cognetti de Martiis, Boselli, Brusa e Nani, Segretario.

Il Socio Segretario dà lettura dell'atto verbale della precedente seduta, che viene approvato.

Il Presidente comunica una lettera del Dott. Giuseppe Pitré che ringrazia per il conferitogli X premio Bressa; quindi offrendo in omaggio alla Classe per parte dell'autore, abate Prof. V. Lilla, due pubblicazioni relative al sistema filosofico di A. Rosmini e due altre riguardanti le dottrine di B. Spinoza, ne accenna il contenuto.

Il Segretario presenta pure, a nome dell'autore, L. Passy, membro dell'Istituto di Francia, un'opera intitolata: *Mélanges scientifiques et littéraires* (Paris, 1896).

Quindi il Socio G. Claretta legge una sua nota: *Di un'accomandita di un patrizio torinese del secolo XVI.* La nota sarà pubblicata negli *Atti* accademici.

# LETTURE

## *Di un'accomandita di un patrizio torinese del secolo XVI;*

Nota storica del Socio GAUDENZIO CLARETTA.

Se la legislazione subalpina, com' è noto, agevolò sempre a chiunque, di qualsivoglia stato si fosse, purchè non trascurante del lavoro d'intelletto, i mezzi di salire ai sommi fastigi degli onori e della possanza, e così, volendo addurre un esempio, dall'ufficio di notaio poter riuscir a conseguire quello di segretario e di ministro del principe, e man mano innalzarsi ed ottenere poi investiture di feudi, insomma stato elevato, essa non consentiva che l'ordine patrizio in massima potesse darsi al traffico e al commercio. In via di eccezione, a Nizza e a Villafranca, porti di mare, esso usava consacrarsi al traffico e alla mercatura, senza pregiudizio delle sue prerogative: il che troviamo ammesso nel 1627 da Carlo Emanuele I. Suo figlio e successore Vittorio Amedeo I nella creazione di quell'ufficio, denominato dell'abbondanza, poichè promoveva l'abbondanza delle derrate e del commercio, dichiarava all'anno 1633 che *la noblesse pourra entrer en part du fonds du dit office sans que pour ce lon lui puisse imputer d'avoir mecanisé, comme aussi nos magistrats et officiers: à la charge néanmoins qu'elle n'exercera aucune art, ains les pourra faire exercer par tierces personnes* (1).

Ai tempi di Vittorio Amedeo II si hanno altre determinazioni analoghe, a cominciare dall'epoca in cui amministrava lo Stato sua madre Madama Reale Giovanna Battista. Già il 3 aprile del 1680 essa decretava, che nell'intento di favorire la nobiltà intendeva di seguire quel che, com'essa esprimevasi, prudentemente si osservava in alcune principali città d'Italia,

(1) Duboin, *Raccolta delle leggi ecc.* T. XVI, v. XVIII.

ed era presso di noi riconosciuto in forza dell'or citato decreto di Carlo Emanuele I. Ed ancor più esplicitamente ivi si dichiarava, che non avrebbe pregiudicato in alcun modo alla riputazione ed alle prerogative della nobiltà il tenere fondachi o magazzini di mercanzie " vendendole all' ingrosso, purchè ciò si faccia per mezzo di altri e non assistano i nobili immediatamente in persona „. E così del paro lor non si vietava " . . . il girare il proprio o l'altrui danaro a cambio col tener banco aperto e molto meno il collocarlo nelle mani dei mercanti accioche traffichino per mare e per terra, anzi nè pure il far travagliare con l'altrui mano nelle arti di lana, seta e simili che sono di pubblico beneficio . . . „ (1).

In tempi più vicini fu ripetuto che commercio ed industria in materie non riputate vili non dovevano far ostacolo all'acquisto di feudi. Ma la prima e profonda jattura che cominciò a provare la nobiltà nostra deve essere ascritta al notissimo editto del 1720, col quale venivano richiamati al demanio, inalienabile secondo la legge fondamentale dello Stato Sabaudo e depauperato, specie ai tempi delle reggenze trascorse, i beni feudali, i pedaggi alienati a titolo non oneroso. Se però l'editto fondavasi su diritto dello Stato, era odioso perchè spogliavane i possessori di buona fede che n'erano stati investiti dopo lungo spazio di tempo. Ottocento feudatarî, com'è cosa notoria, vennero citati in giudizio, donde liti, contestazioni innumerevoli, rese più gravi perchè il duca risoluto non erasi astenuto dal lasciar libero il corso alla giustizia e all'antica indipendenza dei magistrati. Si sa che quei feudi demaniali furono indi esposti all'asta pubblica: e così i titoli di nobiltà divennero rivali.

E furono allora ammesse certe lettere di abilitazione a quell'acquisto affinchè i molti non nobili che si supponeva avrebbero concorso potessero conseguire quei feudi. E con questo mezzo potevano essere in grado di divenire feudatarî i commercianti, gli appaltatori di primo ordine, che divenuti opulenti assai erano in grado di sottostare agevolmente a quella tassa, della quale sapevasi disporre più o meno elevatamente secondo la particolarità dei casi. E così poco per volta l'abito di camelotto e il rozzo saio cominciarono a camminar vicini a quelli di velluto.

---

(1) *Ib.* T. VIII, v. X.

il cavaliere colla spada e colla sua borsa non disdegnava più come per l'innanzi il frustagno del forese. Che se non mancarono i dispetti, i malumori, i bronci, i tempi a volere o non volere progredivano: la necessità non ha legge. Nè sul principio i concorrenti mancavano: poichè oltre all'allettamento della vanità eravi quel dell'utile. Infatti gli acquisitori di quelle terre avevano la bannalità dei forni, dei molini, dei pedaggi, ecc., e più non erano tenuti a soddisfare la contribuzione di esse. In una generale infeudazione indetta il quattordici ottobre del 1733, resa obbligatoria dal dover sopperire alle spese della guerra, Carlo Emanuele III disgregava dalle città e da parecchi comuni ben centonovantacinque borghi, di taluni de' quali per essere privi di denominazioni non abbastanza altisonanti, si proponeva di abbagliare l'acquisto con un poco di princisbecco, cioè col mezzo di un battesimo che potesse essere di maggiore aggradimento agli acquisitori, e che meglio corrispondesse alle esigenze della vanità loro.

Nè ciò bastava: tre anni dopo, cioè il 21 novembre 1736, e sempre a cagione delle spese di guerra e delle fortificazioni militari si ripeteva l'alienazione per ben centoquarantasette di quei luoghi, in parte rimasti invenduti nella precedente licitazione. E la cantilena veniva ripetuta negli anni 1743, 44, 45, 47, 49, 51, 52, 54, 55, 57, 58, 63, 67, 69, 71 e 73.

Ed anche sotto il successore Vittorio Amedeo III nel 1775, e sotto il suo figlio ancora, Carlo Emanuele IV, sebben più rade, codeste infeudazioni apparivano ancora, sinchè col regio editto 23 luglio 1797 veniva avocata al sovrano la nomina dei giusdicenti, conceduta ai comuni la facoltà di promulgare i bandi campestri, abolite l'odiosa privativa della caccia, la bannalità dei forni e dei molini, e l' istituzione non meno ingiusta della primogenitura, e ciò tutto quale benefica influenza dei rivolgimenti succeduti oltr'alpi.

Ma indietreggiando di nuovo, rimangono ancora a notarsi alcuni provvedimenti avvenuti regnando Carlo Emanuele III sovracitato e che stanno in fermezza all'argomento.

Nello stabilimento di quella famosa associazione commerciale, la quale innalzava per impresa il gelso in campo d'oro (1),

(1) Nella preziosa raccolta degli editti, manifesti, patenti, ecc. ecc. della Casa di Savoia, dal secolo XVI al XIX esistente presso di me, e che

e che fu onorata della denominazione di *compagnia reale,* la quale aveva per mira di favorire e di propagare l'industria serica (1), veniva dichiarato che persone nobili avrebbero avuto facoltà di far acquisto di quelle azioni senza pregiudizio dei loro natali.

L'orizzonte cominciava a rischiararsi un poco in mezzo al fitto buio, ond'era stato offuscato per l'addietro. Nè devono qui essere a cagion d'onore dimenticati alcuni pochi patrizi che staccandosi dal cammino degli altri avviavansi per le vie del progresso. Sin dal 1740 il conte Favetti di Bosses facevasi promotore di quella tipografia, denominata poi reale. E dopo la morte di lui, il figlio suo, conte Francesco, unitamente al conte Casimiro Gabaleone di Salmour, al marchese Carlo Eugenio d'Angennes ed al cavaliere Giuseppe Grosso di Brusolo, scaduto essendo il termine della prima concessione, ne ottenevano la rinnovazione la quale fu insignita di parecchi privilegi, conceduti con lettere patenti del 21 luglio 1763. Così il conte Gian Filippo Nicolis di Robilant capitano del reggimento di Pinerolo

---

comprende 40 grossi volumi in foglio, nel volume che contiene l'accennata istituzione leggesi a margine del comma N. 15, che accenna a quell'insegna, questa osservazione autografa del marchese Massimino consigliere di stato, al quale un dì apparteneva tale raccolta: " L'esito ha provato che non poteva scegliersi cosa più allusiva ". E lo stesso principe nell'intento di favorire quell'industria nel 1766 stabiliva alla Venaria una fabbrica di stoffe seriche, anco per impiegarvi giovani dell'Albergo di Virtù.

(1) Quest'industria, ricorderò qui cadendone l'opportunità, fu sempre accarezzata fra noi. — Emanuele Filiberto concorse altresì a promuoverla mercè estese piantagioni di gelsi. — Il fossanese Alessandro Tesauro pubblicava nel 1585 un poemetto didascalico sul baco da seta, col titolo *La Sereide alle nobili e virtuose donne,* che dedicò a Catterina d'Austria nel momento del suo arrivo tra noi, sposa di Carlo Emanuele I. — D'allora in poi la coltivazione del gelso fu una delle ricchezze del nostro paese, ed a cui si applicavano, non solamente agricoltori, ma persone di condizione elevata. Così p. e. sfogliando le mie collettanee manoscritte ritrovo che il 23 giugno 1670 Niccolò Gazelli, figlio del dottor fisico Gio. Maria d'Oneglia, avvocato patrimoniale dei principi Ludovico Maria ed Emanuele Filiberto Amedeo di Savoia, e decurione torinese, vi si applicava con un capitale rilevante. avendo egli contratto società l'anno prima con Gio. Batt. Curlo figlio del capitano Lorenzo da Prelà suo compaesano per lo smercio di seta, per la somma di trecento doppie di Spagna, e ciò per la buona occasione presentatasi d'impiegar danaro in quel negozio, trattandosi dell'acquisto di sete nuove.

stabiliva una manifattura e fabbrica di lana bianca e nera nel Piemonte, che il 21 dicembre del 1753 otteneva privilegi speciali da quel sovrano. I marchesi d'Ormea avevano fondato in quel loro feudo un lanificio, decorato di speciali privilegi, confermati nel 1754 allorquando il marchese Alessandro Marcello Vincenzo, primo scudiere e gentiluomo di camera e colonnello del reggimento Saluzzo lo affittava ai fratelli Borbonese. Del pari il marchese Lorenzo Birago conte di Vische, aveva tentato un esperimento di fabbricar in quel suo feudo porcellana, che ebbe privilegi, ottenuti con regie patenti dell'anno 1765, associandosi anche, fra altri della professione, un tal Vittorio Brodel di Torino. Ma tutti codesti erano lampi di folgore che rischiara un momento un ciel buio e tempestoso assai: bastando a provare che così fosse, la descrizione fattane dallo stesso insigne filosofo Giuseppe De Maistre che ci compendia lo stato politico del nostro paese in questo profilo: *Qu'est-ce qu'une nation? C'est le souverain et l'aristocratie;* e lo stato amministrativo, riferendo le voci che divulgavansi in una provincia dello Stato, e fedelmente raccolte da lui: *Donnez-nous à qui vous voudrez, même au sophi de Perse, mais délivrez-nous des majors de place piémontaise!*

Ma le esagerazioni di un governo eccessivamente soldatesco, frutto d'irreflessiva meditazione del reggimento prussiano, non dovevano cessare che all'accadere di fatti straordinarî, nella guisa che la falce nei vieti pregiudizî (1) soltanto doveva met-

(1) E fra questi quel che era stato fomento a continui malumori era la distinzione fra le classi, presso di noi più che in altre città italiane mantenuta dal Governo. E per rendere meno aride queste pagine mi permetto, poichè ebbi testè a sfogliare la citata collezione Massimino, dire ch'essa contiene pure all'anno 1779, e così alla distanza di soli dieci anni dal memorando 1789, la minuta de' diversi capitoli per lo stabilimento, buon ordine, uniformità della cotteria (!) progettata affine di mantenere nella nobiltà di Cuneo la società, l'unione ed un decente sollievo „. Era una di quelle solite congregazioni che germogliavano nelle principali città dello Stato, come Vercelli, Asti, Mondovì, Cuneo, Fossano, ecc. e che se miravano ad intrattenere con innocenti festini le persone che appartenevano alla classe degli ottimati, non lasciavano di proclamare la più rigorosa segregazione dagli altri ordini della cittadinanza. Il che, com'è supponibile, provocava continui dispetti, specie fra il sesso gentile, donde dissidii che rinfocolavano talora vecchi guai, e che per essere definiti richiedevano l'intervento degli stessi governatori e comandanti. Ora un pallido riflesso di questo stato di

terla il rivolgimento generale della fin di secolo, in cui *novus rerum renascitur ordo*. L'apparente colosso era da lungo tempo infermo, poichè soltanto tenuto in piedi da interessi varii che cozzavano e si urtavano con mal dissimulata violenza, come forze meccaniche più o meno uguali, ma contrarie. E qual novità maggiore di quella che ci viene palesata poco dopo come un sogno dal programma del nuovo Governo provvisorio colla data 20 frimaio [10 dicembre 1798], firmato dai nobili, o come allor si chiamarono, gli *ex* nobili S. Martino, Galli, Cavalli, e dai cittadini Bottone, Bono, Fava, Colla, Rocci, Fasella, Ber-

cose cel somministra il regolamento dell'or citata congregazione cuneese. La *coterie* erasi formata fra dieci dame di quella città, le quali si tenevano la mestola in mano per poter disporre a loro capriccio degli inviti, colla perfetta esclusione di quanti non appartenevano all'ordine patrizio. Il documento, che è manoscritto, è curioso per le particolarità alle quali scende ed anche per gli spropositi di lingua e di ortografia ond'è infarcito. E poichè siamo a Cuneo, aggiugnerò che ho pure sotto gli occhi il successivo *regolamento per la nobile società del Casino* pubblicato nel 1791, che doveva comprendere ... trenta individui ammessi al ceto nobile ... approvato da A. Busca governatore e dai deputati Carlo Caissotti di Chiusano, Ricci d'Andon e Canubio di Torretas. Abbiam detto che Cuneo agiva all'esempio delle altre città. E di Cuneo ancora aggiugneremo, che mentre si spalleggiava lo stabilimento di società dedite al solo svago, si cercasse di impedire quelle che con miglior ragione volevano dedicarsi alle lettere. Merita di esser riferito un biglietto diretto il 27 luglio del 1770 al senatore Mazzucchi prefetto di quella città, nel fine d'impedirvi la costituzione di un'assemblea per ragionare sovra materie scientifiche. " .....Qualora, scriveva il ministro, si fosse trattato dell'intervento delle sole persone sottoscritte alla detta supplica, per far conferenze sopra la fisica e la matematica, penso che non vi sarebbe cosa in contrario, ma attesi gli stabilimenti e le facoltà che si trovano espresse nella suddetta memoria, ho stimato di rimettere il tutto al magistrato della Riforma... " (*). Ed in quanto a Torino devesi aggiungere che erasi pur allora istituita quella, che chiamossi la patriotica nobile società del Casino, approvata e protetta dal Re Vittorio Amedeo III nel 1781 ancora, e della quale dovevano far parte dugento nobili (**). — Era

(*) Archivio di Stato. Lettere della Segreteria di Stato.

(**) Gli statuti furono pubblicati in una splendida edizione del Briolo tipografo dell'Accademia delle scienze e della Società agraria, con una bella incisione per antiporta e con intagli pregevolissimi dell'artista Teresa Ramis-Ronzini e del Cagnone. E cosa a notarsi per noi, la dicitura era assai corretta. Appartenevano al *Casino* i più bei nomi del patriziato subalpino. — Pubblicavansi pure nello stesso anno gli " ... articoli convenuti nella congrega generale della società dei signori cavalieri sottoscritti al progetto di una nobile pubblica adunanza ". Ma in quell'adunanza venivano ricevute " le sole dame ed i soli cavalieri ammessi agli appartamenti di Corte ".

tolotti, Braida e Sartoris, nel quale all'art. 4, com'è saputo, " si abolivano generalmente tutti li titoli, divise e distinzioni di nobiltà, e si userà il solo titolo di cittadino: e sarà pure proibito l'uso delle livree, trine, armi e stemmi gentilizi „! E quasi non bastasse questa manifestazione innocente in sè, si voleva ancora gettar nelle fauci della democrazia, fra noi abbastanza pacifica nè famelica delle scene cruenti onde macchiossi altrove, altra offa per satollarla. Ma duole proprio che quel conte Gaetano Galli della Loggia, già presidente della regia Camera dei Conti, l'autore insomma della nota, utilissima ed erudita opera delle *Cariche del Piemonte;* e per la cui compilazione aveva dovuto rovistare quantità di diplomi, pergamene, investiture, ecc. dal palazzo nazionale colla data del 26 frimaio successivo [16 di-

---

l'espressione del modo di sentire dell'aristocrazia, data agli svaghi ed ai beati ozî che vietavano persino di occuparsi degli interessi domestici e dell'educazione della prole. Ma la vita doveva essere breve: i tempi erano maturi. Uno de' pochissimi esemplari rimasti [se pur non è l'unico] di una lettera circolare data da Torino il 27 gennaio 1797, esistente nel volume 36 della citata raccolta Massimino, lettera firmata dal conte di Brandizzo, cominciava così: "... Con lettera della segreteria di stato degli undici scorso novembre diretta a S. E. il signor marchese di Ciriè S. M. (cioè Carlo Emanuele IV) ci notifica essere suo preciso volere che più non esista la nobile patriotica società del Casino e di lasciare perciò liberi gli appartamenti ad uso della medesima destinati affinchè il padrone di casa possa essere in grado di disporne a suo talento „. Curioso quest'interesse che il sovrano prendeva per il proprietario di casa privata! E così si scioglieva, forse col solo rimpianto degli aggregati a quella società, che facevansi denominare *patriotici*, quella congregazione che liquidava i suoi fondi con un capitale di L. 14.300; e sulle cui ruine dopo la ristorazione (1841) s'innalzava altro edifizio press'a poco consimile, e che con altra denominazione (Club du Whist) e con alcune modificazioni si sostiene ancor oggi. Ma ad onoranza del paese e del patriziato stesso non devesi dimenticare che altra parte di esso, cioè quella delle persone dotte, noverava due soli che bastavano ad immortalarne la gloria: Vittorio Alfieri e Valperga Caluso. Altri poco prima erano concorsi a fondare a Torino quell' Istituto che doveva servire assai validamente allo sviluppo del progresso intellettuale, dilatando le verità dell'ordine sociale ed agendo sullo spirito pubblico col mezzo della parola e degli scritti. Il suo incunabulo fu nelle sale di antico patrizio vercellese; e fra i suoi fondatori e primi patroni si notano i Saluzzo e i Balbo. Nel 1785 veniva fondata la Società agraria che seppe anche conseguire lodevole fama, e della quale sin dai primordî si rese benemerito il marchese Alberto Pallavicini delle Frabose che le assegnava acconcia sede nel suo palazzo.

cembre] qual presidente del governo provvisorio pubblicasse quest'altro noto decreto: " ... Inerendo al § 4 del suo proclama al popolo piemontese delli 20 frimaio si fa noto che si abbrucieranno quanto prima solennemente i diplomi, gli stemmi, le investiture ed altre carte di aristocrazia, ai piedi dell'albero della libertà ". E subito dopo, vale a dire il 12 ventoso [2 marzo] lo stesso governatore ingiungeva ai nobili ed agli altri possessori di quei diplomi e di quelle così dette *carte d'aristocrazia,* di consegnarle per quell'*auto da fè,* sotto pena ai renitenti di una multa di L. 1500 e di tre mesi di carcere! E qual danno provenisse agli studii storici ed alle arti da siffatta ordinanza non è il caso di qui deplorarlo, trattandosi di fatti a sufficienza conosciuti.

Non basterà mai abbastanza però di ripetere qui la nota di censura che ben si merita il citato conte Galli, di essere concorso e di non aver saputo astenersi dal promuovere determinazioni così contrarie al suo antecedente agire. A temperare peraltro questo giudizio, per quanto severo, non ingiusto, si potrebbe avvertire, che altri suoi coevi, ed in condizione ben più avvincolata di quel che non la sua, dimostrarono pure una debolezza inqualificabile. Il suo nome peraltro rimane con qualche elogio legato ad altro decreto del 17 dicembre del governo provvisorio, con cui egli come presidente di esso proclamava l'abolizioni dei vincoli fidecommissari e primogeniali, e l'altra più patriottica ancora cioè della tortura.

Senonchè, agli avvenimenti straordinarî suole succedere la reazione, e questa, in quanto a materia nobilizia, cominciava all'apparire dell' astro Napoleonico che risuscitava la nobiltà, sostituendo una nuova forma di diritto nobiliare, diritto *civile soggettivo,* per risorgere poi tra noi alla ristorazione con privilegi, abusi e pregiudizî, qui più che altrove rinnovatisi, per quanto in cose di fumo, come negli onori del così detto corteggio palatino, che comprendeva molte eccezioni, in riguardo specie delle gentildonne, e che conservossi sin oltre la metà di questo secolo.

Se queste considerazioni ci hanno distolto un momento dal tema speciale a cui accenna questa nota, non ne sembra ch'esse debbano reputarsi cotanto estranee nè disacconce. Intanto facendovi ritorno, conviene avvertire, che se il sistema di tenere il patriziato lontano dall'esercizio del commercio e dell'industria

che il Piemonte ebbe comune con altri Stati, fu cagione di non pochi inconvenienti e di danni agli stessi esclusi, non lasciò d'altro canto di apportare anco qualche avvantaggio. Fu danno, le cui conseguenze si fecero sentire sin'oggi, il non avere i nostri ottimati potuto emulare veneziani, genovesi, pisani, toscani ed anche cittadini delle microscopiche repubbliche d'Asti e di Chieri, che col mezzo del traffico riuscirono ad armar navigli, assoldar genti, elevar palagi, sede di monumenti artistici, e fondare istituzioni umanitarie e didattiche di primo ordine. Ma per contro l'astensione deplorata concorse ad imprimere uno stampo particolare al nostro patriziato, che lo rese capace e meglio atto ad azioni magnanime e patriottiche.

Infatti, data l'ipotesi contraria, cioè o di non comune larghezza di censo o del benefizio di cospicue investiture di grandi feudi o di lucrose speculazioni commerciali, difficilmente avrebbe potuto radicarsi quella nobiltà agguerrita, educata alla durezza della vita militare, indispensabile alla condizione del piccol paese posto a' piè dell'Alpi, e sempre guardato con occhio cupido dagli stranieri ai quali di continuo fece gola. E gli allori raccolti coll'effusione di tanto sangue ne' dirupi dell'Assietta, nelle molli pianure di Staffarda e di Orbassano, al fiero assedio di Torino del 1706, ed ancora nei primi combattimenti a pro dell' indipendenza italica nella prima metà di questo secolo, forse non si sarebbero conseguiti sotto l'impero di diverso ordine d'idee. E dicasi lo stesso, per limitarci svolazzando *sicut apis in saltibus,* a ragionare di coloro, che non distolti da altre cure, si dedicarono, od alla diplomazia od alla magistratura, o spiegarono l'ingegno nella coltura delle discipline scientifiche. Quindi, sempre dato il caso contrario, difficilmente avremmo avuto i Provana, i Dalpozzo, i Saluzzi, i Morozzi, i Chiesa, i Tesauri, gli Ormea, i Napioni, i Vasco ed altri non pochi che conseguirono nome nelle scienze e nelle lettere, senz'essere costretti ad ammettere il pregio di quelle poetiche famiglie, di cui alcuni degli or citati patrizi furono caldi promotori, e che pur troppo anco fra noi pullularono, come le rane nella palude, e divagarono nelle metafore, nelle stramberie, nelle ampolle e nei falsi concetti, e che sol più tardi dovevano essere flagellati dalla frusta inesorabile del bizzarro nostro Aristarco Scannabue.

Ma comunque ne sia; e tuttochè nel Piemonte, suolo fertile

di guerrieri, non abbia spirato al pari di altre regioni quella beata aura italiana che cangia in imagini le sentenze, in estri i pensieri, pur avrà sempre la gloria di aver generato quell'

> " Allobrogo feroce a cui dal polo
> Maschia virtù, non già da questa mia
> Stanca ed arida terra
> Venne nel petto „

come lamentava ai suoi dì il Leopardi. Così del paro, se men a noi larga fu la fortuna di genii creatori, si segnalarono per compenso i nostri progenitori per maggior temperanza e moderazione di costumi. Il perchè non si ha qui a provare il rammarico di quegli atti di violenza e di crudezza che altrove macularono, come le domestiche pareti, così le città e i paesi e i feudali ostelli.

Riunendoci ora dopo queste poche pagine d'introduzione, al punto donde avemmo a disgiungerci un momento, conviene avvertire che, fermo il divieto di massima ai nobili di consacrarsi al commercio ed al traffico, era peraltro aperta una via di mezzo, cioè di potervi partecipare copertamente col mezzo di terzi e con quel contratto, dai legali denominato di accomandita. Ma qui ancora non è inopportuna altra digressione: imperocchè, come la prima ci diede ragione delle leggi, od almeno delle consuetudini che regolavano la classe patrizia, così questa seconda ci farà conoscere in qual condizione essa versasse, e qual fosse lo stato del nostro paese a quei giorni.

Ed ancor qui, come in recente nostro lavoro, letto pure a questo Consesso, non sarà opera gettata ricorrere al giudizio circospetto dei noti ambasciatori veneti. Francesco Molin reduce dalla sua ambasceria di Torino nel 1574, nella ordinaria relazione al suo Senato notava che i nostri " ... nobili frequentano con poco amore la Corte, e il più del tempo s'intrattengono ne' loro Castelli ... ; sono per lo più poveri e superbi ed inimicissimi de' forestieri. Non attendono molto alla virtù e poco si esercitano nelle armi, tanto che neppure di questa nobiltà si può dire che vi sia un uomo da comandar eserciti ... „.

E perchè non paia che questo giudizio sul valor militare poco benigno abbia a distruggere quello dato superiormente sulle prodezze marziali del patriziato subalpino, fa d'uopo di

non dimenticare, che Emanuele Filiberto appunto fu quegli che cominciò a militarizzare il Piemonte ed a trasformare a poco a poco il feudalesimo, che allora, giusta i calcoli di quell'ambasciatore, noverava più di ottocento castella su di una popolazione di circa cencinquanta mila abitanti. Cifra sconfortante, ma pur vera, poichè altro ambasciatore, cioè il Morosini soggiunge: "... me lo disse di propria bocca il signor duca, credendo anco dir assai quando io domandava per ordine della Serenità Vostra tratta di grani per la città di Bergamo ... ".

Ora siffatto scoraggiamento negli ottimati, tale scarsità di abitanti ben denotano lo stato del nostro paese, diviso fra le fazioni, incolto e privo di guadagni, di quanto era per contro soggetto a gravezze sproporzionate.

Non distacchiamoci dagli ambasciatori veneti, e ne udiremo altre notizie, per quanto poco lusinghiere.

L'or citato Gian Francesco Morosini ci dipinge i Piemontesi " per la maggior parte inclinati alla crapola ed all'ozio, nemici di ogni sorta di fatica, salvo quella che fanno ballando (1), in

(1) Di tale inclinazione rimasero ne' varii tempi tracce significanti fra noi più che altrove, senz'essere obbligati a ricorrere a quelli di S. Massimo, che nelle sue omelie rampognava i Torinesi dell'eccessiva loro passione al ballo e dell'intemperanza degli ultimi giorni carnascialeschi. Come parte integrante dell'educazione cavalleresca, già nella ricostituzione dell'Accademia reale cioè militare di Torino del 1730, il ballo era obbligatorio nelle classi di quell' Istituto, cioè in quei certi appartamenti, famigliari a quanti lessero l' autobiografia di Vittorio Alfieri. Ivi adunque notavasi come essenziale per imparare a dovere l'arte cavalleresca fra la scherma, la cavallerizza, il volteggiare, il ballo. Questo fu adunque sempre con molta grazia mantenuto nell'educazione de' gentiluomini, che fatti adulti intervenivano alle frequenti feste di Corte di questo genere. E poichè il vocabolo ballo mi sgocciolò dalla penna, aggiungerò che di questi giorni ebbi agio di consultare in una miscellanea di cose patrie un opuscoletto piuttosto raro col titolo: *Programme historique de la mascarade exécutée à Turin par une société de chevaliers et dames à l'occasion que S. E. monsieur le duc de Villahermosa ambassadeur de S. M. Catholique donna un bal à toute la noblesse le 12 février 1783, publié par Henri Derossi libraire de la Société royale du théâtre.* L' idea di quell'elegantissimo festino dell'*high-life* subalpina era sorta in una riunione di 23 dame e di 24 cavalieri ragunatisi prima nel palazzo del marchese Solaro del Borgo, ora sede dell'Accademia filarmonica sulla piazza S. Carlo; e l'esecuzione dovette essere splendidissima, a giudicare dalla descrizione, che ci lasciò il nome delle dame, dei cavalieri e di tutte le quadriglie che vi presero parte. E questo

che non si stancano mai: non hanno alcuna industria, contentandosi quasi ognuno di quello che ha, se ben poco più tosto che con fatica d'animo e di corpo procurarsi maggior avere o facoltà . . . „.

Non si può affermar certo che gli ambasciatori veneti fossero propensi a dondolare l' incensiere dell'adulatore: ma non si potrà anco negare che le relazioni loro non fossero figlie di profonde meditazioni e di sentenze con cui chiamavansi a specie di sindacato principi e popoli.

Abbiam testè di passaggio accennato alla gravezza delle tasse: e lo stesso ambasciatore ci fa al proposito una buona rivelazione. Accennando egli alla intolleranza dei carichi pubblici, che salivano a cent'ottantaquattro mila scudi all' anno, peso insopportabile al popolo, povero e senza industrie, già si soffermava a quella piaga dell'emigrazione, che pur troppo scorgiamo prendere a' giorni nostri proporzioni sconfortanti, tanto più tenendo conto dei tempi e della condizione ben diversa del paese. Egli pertanto avvertiva, che i percettori dei tributi erano obbligati persino " . . . . . a levar a molti il letto ove dormono, non avendo altro in casa da questo in fuori, e ben spesso anzi quel letto in cambio di penne o di lana è pieno di foglie d'alberi per la molta povertà del paese, non tanto causata in effetto dalle lunghe e continue guerre che ha avuto, quanto da una naturale viltà e dapocaggine di quei popoli . . . „. Quindi

---

succedeva soli sei anni prima del 1789. Se poi per caso qualcuno dei lettori fosse per meravigliarsi che in queste pagine, che si pubblicano in una raccolta scientifica della gravità a tutti nota, siasi parlato di balli, io potrei rispondergli che all'adunanza del 7 aprile 1810 l'accademico conte Emanuele Bava di S. Paolo aveva intrattenuto i colleghi con una dissertazione, in cui l'articolo terzo del capo vigesimo trattava *dei progressi e vicende dell'arte della danza o ballo,* e che vide la luce nel volume XVIII delle nostre Memorie. Ma lasciando la parte meno grave, il ballo non mancò di dar materia a fatti abbastanza serii: accennerò, come venutomi a mano per caso in questi giorni, un certo monito dato nel 1770 dal Re Carlo Emanuele III al cav. Saluzzo di Valgrana governatore d'Acqui, che cominciava così: " Prendiamo noi stessi a spiegarvi le reali nostre intenzioni intorno a ciò che avete esposto alla Segreteria nostra di Stato sopra la materia dei balli in dipendenza della lettera di codesto vescovo . . . ecc. . . . „. Ma di ciò verrà discorso, se, a Dio piacendo, avrò ancor agio di ragunare i molti materiali raccolti, ed atti a far conoscere a suo tempo i prodromi della rivoluzione francese fra noi.

non mai sarebbero i nostri duchi stati in grado di poter, come fecero i loro emuli i Medici granduchi di Toscana, disporre a guisa di Cosimo II di 20 mila uomini mandati nel 1617 in soccorso al duca di Mantova, appunto contro il nostro Carlo Emanuele I, e senza imporre alcuna tassa sul suo Stato.

Potrebbe qualcuno obbiettare che questo quadro lasciatoci dai veneti legati avesse a ritenersi delineato col mezzo di tinte caricate di troppo, ed effetto di emulazione di Stato rivale. Ma cadrà l'appunto considerando le cause che poterono influire su quegli effetti, e prestando ascolto un momento al suono che ci può dare altro tasto toccato dalla mano di persona di convinzioni e di interessi opposti, voglio dire dal francese Martin de Bellay sire di Langey. Egli pertanto c'informa che nel 1527 nella discesa di Francesco I in Piemonte si trasse questi dietro dalla Francia tutti gli animali da soma di parecchie provincе, senza poter fornir l'esercito delle necessarie vettovaglie.

Il popolo si trovava ridotto alla disperazione, le campagne non avevan nemmen più ricevuto il seme dei cereali. Congedati poi gli Svizzeri, ripassati in Francia con quel Re i lanzichenecchi, e rimaste solo tra noi le milizie francesi, la fame era divenuta così notevole, che nel successivo 1528 il sacco di frumento, solito a vendersi in Torino uno scudo, era salito sino a dodici, e faceva d'uopo far invigilarne lo spaccio col mezzo di soldati acciò non seguissero omicidî fra il popolo che tumultuante accorreva a procacciarsene (1).

Al cronista francese faceva coro il nostro erudito monsignor Francesco Agostino Della Chiesa, il quale ci racconta che appunto in quel torno non essendosi potuto coltivare i terreni, nel mese di maggio e di giugno dell'anno 1527 s'elevò a Saluzzo il grano a tal prezzo, che il fromento si vendeva sul pubblico mercato ad otto scudi d'oro il sacco “ . . . oltre che spesso non se ne trovava, e ciò per la peste e per le guerre . . . „ (2).

Ora con questo bel quadro innanzi ben si può argomentare quali fossero le condizioni finanziarie dei privati, e fra essi di

---

(1) *Les memoires de messire Martin de Bellay seig: de Langey contenants le discours de plusieurs choses advenues au Royaume de France depuis l'an MDXIII jusqu'au temps du Roy François I etc.* Paris, 1582.

(2) *Vita di monsignor Giovenale Ancina.* Torino, 1629, p. 63.

coloro che avendo forse più degli altri i mezzi godevano della proibizione di consecrarsi al traffico, all' industria ed al commercio, per quanto questo fosse stagnante, ed infruttifero, partendo dal principio sostenuto dal Venosino, che

" Aurum irrepertum et sic melius situm,
Quum terra celat, spernere fortior,
Quam cogere, humanos in usus . . . „ (1).

Ma gloria, grandezza, potere erano le aspirazioni di tal potenza, da far disprezzare questi altri tre opposti desiderii: libertà, agiatezza, felicità. Si temeva troppo, che lo scopo del commercio essendo l'interesse, il suo spirito, il calcolo, le mani avvezze a maneggiare bilance, stadere, balle e va dicendo non fossero poi atte a far uso dell'armi, distolti anche dal continuo pensiero dei cambi, del prezzo delle derrate, delle perdite, ecc. *Ce tablier d'apprentissage, cette balance à peser, cette aune à mesurer, cette poussière d'un magasin, cet assujettissement aux volontés d'un roturier, ces caprices, ces propos de l'acheteur,* come si esprimeva l'autore che ebbe a trattare *ex professo* quest'argomento, formavano altrettante barriere che non doveano superare coloro che erano così delicati in fatto d'onore (2).

Ove i nobili si fossero dati al commercio, ragionavano i fautori del sistema astensionista, avrebbero potuto tanto più, ove non agiati, contrar parentado con famiglie di plebei ricchi, e ciò avrebbe nociuto al prestigio ed al decoro dell'ordine patrizio. Avrebbero tutti costoro potuto consecrarsi all'agricoltura e farla fiorire nelle abbastanza late loro possessioni. Ma anco astrazione fatta dalle considerazioni or accennate, essa si trovava inceppata da varii ostacoli, per quanto non si debba negare che le sollecitudini del duca Emanuele Filiberto a propagarla sieno state non poche, nella guisa che non poco egli erasi pure adoperato per l'industria e pel commercio. Ma le congiunture, i tempi e la condizione del paese fornivano ostacolo ed impedivano che i miglioramenti avessero subito a manifestarsi.

La maggior parte della proprietà territoriale era divisa fra

---

(1) *Od. 3,* Lib. III.

(2) Coyer, *Développement et défence du système de la noblesse commerçante.* Amsterdam, 1757.

i comuni e gli enti morali. I primi pel loro organamento non erano i più capaci a farla fiorire, e i secondi per la stessa ragione e per la mancanza di capitali sarebbero stati del paro poco atti a quel fine. Si aggiungano ancora altri impedimenti che provenivano dai tributi esorbitanti, dalle devastazioni prodotte dalla soldatesca, dai privilegi, dai pedaggi fra terra e terra, dalla mancanza di ponti, che fornivano barriere insormontabili alla introduzione e alla esportazione delle merci e dei prodotti, alla poca sicurezza delle strade, pessimamente tenute e percorse dai malandrini, ai quali non era in grado di porre un freno la polizia di quei giorni. E quasi tutta questa sequela di guai non fosse ancor sufficiente, si doveva lottare persino coi lupi che affamati nel verno percorrevano le nostre pianure disabitate, avanzandosi sin presso i villaggi e distruggendo gli armenti (1).

Al cospetto di siffatte contrarietà pochi proprietari si rischiavano a dedicarsi sul serio all'agricoltura. Anche l'abitudine e la tradizione vi si opponevano: infatti difficilmente il magistrato, sebben tutto pacifico e che pare dovesse dilettarsi di quelle due ferie annuali, dette delle messi e delle vendemmie, che trovo già sin d'allora stabilite, difficilmente avrebbe lasciato la toga senatoria pel vincastro dei pastori, e ben pochi di quei nobili, già adusati alle lautezze della vita cittadina, si sarebbero determinati, quai novelli Dionisii, ad abbandonar questa, per aggirarsi fra i drappelli dei vendemmiatori e per insegnar loro le norme di migliorare il prodotto delle feconde loro pergole.

Ora, in faccia a resultanze così negative, e scorgendo in qual letto di Procuste giacesse l'itala Pale, i privilegiati così inceppati di qua e di là, altro mezzo non avevano che di mettere a frutto i loro capitali sul traffico e sul commercio esercitato da terze persone. Ed a codesto ripiego appunto veniva un patrizio piemontese dell'anno di grazia 1573, il quale ci viene fatto conoscere dal documento fortuitamente rinvenuto nell'archivio notarile di Susa, e che vedrà la prima volta la luce.

Apparteneva egli alla ragguardevole famiglia dei Parpaglia

(1) Per estirparli, oltre i noti premii e le somministranze di uomini per cacciarli ingiunte ai comuni, si provava più tardi lo spediente di attossicare mugge di poco valore o *sian giorre* affinchè servissero di pasto a quegli animali, obbligando i comuni a provvederle.

degli antichi signori di Revigliasco (1), di Montosolo, di S. Giorio e di Celle, ecc., che fiorì anche più tardi a Mondovì, illustratasi col merito che le procacciò elevati uffizi, tenuti da Tomaso, giureconsulto assai celebre ai suoi giorni, e che divenne presidente del Senato, uffizio che tenne pure il Bernardino.

Il Luigi al quale si riferisce il documento che prendiamo ad illustrare, era figlio di Gian Francesco, e padre di quel Bernardino che doveva poi divenir ambasciatore in Alemagna, Spagna e Venezia, cavaliere dell'Annunziata, e primo conte della Bastia di Mondovì.

Or bene: avendo egli potuto in quei tempi poco propizî far alquanto di civanzo nel suo patrimonio, anzichè impiegare quel suo capitale in fondi incerti, volle nel 1573 consegnarlo a due mercatanti che esercitavano commercio in Torino.

Un di essi denominavasi Gian Giacomo Nigri o Negro, omonimo di famiglia che due secoli dopo fondava casa bancaria reputatissima e stimata assai nelle principali piazze d'Europa.

L'altro poi era Giambattista Benso, socio di commercio del Nigri.

Il minutaro del notaio che ci conservò questo documento, come che tarlato in varii punti, ragion per cui ci obbligò a molte lacune, non ci ha consentito a scifrare a qual famiglia appartenesse il Benso or citato, nè di qual paese egli si fosse. Per buona sorte un susseguente atto dello stesso protocollo, rogato il giorno medesimo viene ad appalesarci che il Benso erasi valso del ministero di Giovanni Viarizio notaio di Chieri. Questo sarebbe un argomento indiretto ed alquanto debole, trattandosi d'invocarlo in una genealogia, a sostegno dell'origine della persona interessata; ma qual notizia disgiunta può avere il suo peso a notare una relazione del Benso con pubblici uffiziali di Chieri. Tutti sanno che i Benso appartenevano ad una delle

(1) Le loro memorie salgono al secolo XII: Guglielmo di Revigliasco con Pietro Porcellino nel 1170 cedeva al vescovo di Torino ogni sua pretesa sul castello di Montosolo; e nel 1173 donavanlo al vescovo Milone, che ne diè poi loro investitura. Nel 1222 i signori di Revigliasco, in un con quelli di Trufarello, acquistarono da Bertoldo di Non legato imperiale il luogo di Celle: ma nate opposizioni con quegli uomini, che furono poi rimesse ad un arbitrato del vescovo di Torino, essi n'ebbero più tardi investitura dall'imperatore Federico in premio di servigi da loro ricevuti.

antiche famiglie d'ospizio di quella piccola repubblica, accennate in quel noto distico che comprendeva nei cinque *b* le principali famiglie di ottimati di quella città, ma che con tutto questo esercitavano traffico ed industrie in Piemonte ed oltre Alpi. Quindi nulla d' inverosimile che un dei rami di quell'albero così frondoso possa essersi per qualche tempo trapiantato in Torino, ed aver prodotto il Giambattista, del quale si tratta.

Ma comunque ne sia, appartenga o no egli ai Bensi di Chieri, esso ci fornì argomento a compilare questa breve nota la quale ci ha messo in grado di ragunare parecchie notizie, che, per quanto possano essere ritenute un' intarsiatura di mosaico, ci attestano qual fosse la condizione del nostro paese che cominciava a dirozzarsi, grazie alla sagacia ed alla ferma volontà del vincitore di S. Quintino.

Non credo sia il caso d'intertenerci sul contratto conchiuso dal signor di Revigliasco con quei due mercatanti, che ciascun potrà leggere a sua posta, e che consigliato ed istrutto da buoni legali, di cui già sin d'allora non faceva difetto la nostra città, nulla lasciava a desiderare per la tutela degli interessi dei contraenti, non privi di quell'oculatezza e di quella previdenza, da non far troppo contrasto anche coi tempi odierni.

*Credito con patti fatti per l'illustre sig. Luigio Parpaglia per una parte et li nobili messer Gio. Giacomo Nigri, messer Battista Benzo cittadini et mercadanti di Turino per l'altra.*

*Torino, 28 gennaio 1573.*

Archivio notarile della città di Susa. Minutari del notaio Sebastiano Baronis di Trana, vol. II.

Al nome del nostro signor Jesù Xrispo l'anno doppo la natività di esso Signor nostro 1573 la prima inditione et alli 28 del mese di genaro fatto questo in la Città di Turino et nella salletta della casa (1) qual tiene l'infrascritto magnifico signor Luigi Parpaglia alla presenza del magnifico et reverendo signor Cesare Bava cittadino di Fossano cavalier gierosolimitano, signor Orelio Bobba delli signori di Lu in Mon-

(1) In altro atto la casa veniva indicata esser posta fra Santa Chiara e S. Andrea.

ferrato et di messer Petrino Nazerio cittadino di Turino testimonii a ciò demandati astanti et richiesti Ad ogniuno sii manifesto come ivi personalmente (costituito) messer Gio Giacomo Nigri et messer Gio-Battista Benzo (1) compagni et mercadanti in Turino spontaneamente per loro et loro heredi hanno confessato et riconosciuto et per tenor del presente publico instromento confessano et riconoscono hauer hauuto et riceuuto dal magnifico signor Luigi Parpaglia delli signori di Revigliasco et signor in solidum della Bastia del Monteregalle (2) ivi pre-

---

(1) Che questo Benzo fosse di Chieri si potrebbe provare, come ho osservato nel testo, dal susseguente atto stesso giorno in cui si accenna ad uno stromento risguardante il Benzo, ed al rogito di *Joanino Viaricio nodaro di Chieri*, ib.

(2) Affinchè possa essere meglio intesa da buona parte dei leggitori questa locuzione, non è fuori di proposito d'intrattenerli con questa piuttosto lunga annotazione, la quale ci fornirà un poco di storia di quel feudo, tanto più che imperfette ne sono le notizie date dal Casalis nel suo *Dizionario storico ecc.*

La città di Mondovì sotto i Provenzali ottenne dominio e giurisdizione sulla Bastia coi soliti diritti inerenti di sudditanza. Nel 1347 Mondovì davasi spontaneamente ad Amedeo VI, il quale con giuramento dichiarava che, ned egli ned i suoi discendenti giammai n'avrebbero trasferto il dominio ad altri, nè dimezzatolo; e che i cittadini avrebbero avuto a godere in perpetuo delle franchigie e delle libertà, esenzioni, ecc. ottenute ai tempi delle passate dominazioni, e dell'intera giurisdizione senza diminuzione. Ciò non basta: nel 1356 si conveniva tra Amedeo VII, il principe Ludovico d'Acaia e la città ch'essi non avrebbero alienato, ned in tutto ned in parte, sotto qualsivoglia pretesto, ned altrimenti trasferito in altri il dominio, tanto di essa città quanto delle sue ville, dimodochè Mondovì con questo dovesse integralmente rimanere sotto il dominio sabaudo. Nel 1418 il duca Ludovico dichiarava più esplicitamente e tassativamente, che l'esercizio di ogni giurisdizione e quella dei campari della Bastia dovesse spettare a Mondovì. Questa poi nel 1419 non potendo tenere tutti quei castelli, rimettevali in quanto alla proprietà del possesso al duca, ma col patto che gli uomini di essi sarebbero sempre rimasti sudditi di Mondovì e sotto la giurisdizione de' suoi magistrati. I patti sovrascritti venivano confermati nel 1472 dalla duchessa Jolanda a nome di suo figlio; nel 1488 dal duca Carlo I, nel 1490 dalla duchessa Bianca, ma mediante *satis egregia pecuniarum summa*. Ma nel 1449 il duca Ludovico aveva già conceduto la Bastia al gran cancelliere Jacopo della Torre che avevagli sborsati ben mille fiorini, ottenendo anco la facoltà di punire i delinquenti, e civilmente conoscere sino alla somma di cinque soldi. La liberalità ducale veniva approvata dal magistrato della Camera dei conti, ma non messa in esercizio. Venuta meno la linea di quell'investito, Emanuele Filiberto, nel 1562, sotto pretesto di benemerenze, ma

sente stipulante et accettante per lui et eredi suoi cioè la somma di scudi doi milia ragionati a fiorini nove per caduno scudo in oro et bone monete cioè scudi cinque cento in soldi ducali cinque cento in testoni regii et scudi cinquecento in scudi d'oro in oro tanti d'Italia del sole et altri scudi cinquecento in lire ducali renontiando con il

---

non in ragione di parentado coi Della Torre, che non esisteva (*), infeudava Bastià a Gian Francesco Parpaglia, padre del Luigi al quale si riferisce il nostro documento. L'atto veniva pure approvato dalla Camera, ma colla clausola *reservatione iurium cuiuslibet tertii.* E morto nel 1563 il Gian Francesco, suo figlio veniva investito, e riconosciuto da quel magistrato coll'or accennata clausola. Notisi ancora che Emanuele Filiberto nel 1565, mentre gravava Mondovì del tributo del tasso, confermavale gli antichi privilegî, e il 17 gennaio dello stesso anno dichiarava espressamente che colla concessione a pro dei Parpaglia non intendeva recar pregiudizio alla città. E così veniva di nuovo dichiarato negli anni 1575, 1580 e 1581. Ma la città di Mondovì trovandosi lesa, coll'esercizio che i Parpaglia facevano della giurisdizione di quel feudo, stimò di far valere giuridicamente i suoi diritti. E certo che si ebbe a scombiccherare molta carta; e fu d'uopo di ricorrere al consumato giudizio dei più valenti giureconsulti d'allora, Giovanni Menochio di Pavia, Aimone Cravetta di Savigliano, Francesco Odetti da Crescentino e Ludovico Morozzo monregalese. E il frutto dei lor responsi si legge ancora con qualche utilità nei poderosi loro volumi che occupano gli scaffali delle pubbliche librerie.

La disputa del Menochio, che è la migliore, ed in cui s'inviscerò, per dir così, nei più intimi particolari, è al N. 264 della Parte III dei suoi *Consiliorum,* editi a Francoforte sul Meno nel 1625. L'Odetti senza reticenze sostenne che il principe non può distruggere quel che fu conceduto dai suoi antecessori. Avendo, egli nota, il principe dopo i patti e le deroghe investito della Bastia il Parpaglia, si può supporre che *fuerit circumventus et obreptus dolo partis. Vt enim princeps hodie concedit unum, et cras derogat seu revocat a se gesta, quid potest praesumere lex nisi quod sit circonventus?*

Il presidente Morozzo nel suo consulto (**), posteriore già a sentenza

---

(*) Notinsi peraltro queste espressioni della patente: " ... Ricordandoci inoltre delli molti danni ruine et sacchi patiti per servizio nostro dal detto messer Gio. Francesco massime in queste ultime guerre dell'occupatione de' nostri Stati, al quale tra le altre ruine fu demolito da' nemici nostri d'allora il detto suo castello della Bastia da fondamenti „ (Archivio di Stato, Sezione II, Patenti).

(**) pubblicato nell'opera sua *Responsorum D. Ludovici Morocii Monregalensis p. p. in Senatu Pedemontano. Taurini, fratr: De Cavalleriis, 1600.* Il volume di mia spettanza appartenne pure alla famiglia Massimino sovra memorata, anzi all'avvocato Gio. Pietro che ci lasciò questo suo ricordo genealogico: " ... dell'avv. Gio. Pietro Massimino da Centallo fu avv. Domenico, fu molto illustre sig. capitano delle truppe d'ordinanza et reggimento d'Aosta Gio. Pietro „.

giuramento infrascritto ad ogni eccetione qual potessero addurre con dir et allegare di non hauerli hauuti et ricevuti et de hauer speranza d'hauerli et ricevergli per l'avenire et questo a causa et effetto d' implicargli come hanno promesso et convenuto cioè in tante mercantie et traffighi di guadagno in vna bothega con li patti et conventioni infrascritti Et primo che siano tenuti essi nobili messer Gio Giacomo Nigri et Gio Batta Benzo confitenti di compagnia di essi scudi duoi millia hauuti dal detto sig Luigio metterli come dicono che già gli hanno messi delli luoro proprii altri scudi duoi millia simili cioè scudi mille per caduno di essi, cioè detto messer Gio Batt Benzo in dinari contanti et detto messer Gio Giacomo Nigri in mercantie crediti et dinari et far loro medemi tal traffigo et mercantia per sei anni prossimi comenzati de gia alle feste di pascha della santa resurretione . . . . . . . giorno essi anni sei prima ..... legal conto d'esso traffigho et mercantia ..... inventario d'ogni cosa che sea et spettarà ..... compagnia tanto principale che guadagno ..... alle feste di pascha et darne il doppio d'esso ..... al detto sig Ludovico dil qual guadagno ..... la spesa della bothega et cibarie de' luoro du... Nigri et Benzo ne spettara et haveranno essi messer Nigri et messer Benzo come cosi hanno promesso, da darni al detto signor Luiggio cioè duranti li tre primi anni il terzo restando gli altri duoi terzi ad essi nobili Nigris et Benzo et passati li tre prossimi anni saranno tenuti essi duoi come cosi anco hanno promesso dargliene a detto signor Luigio a ragione di cinque duoi et cosi parimente passati li sei anni se seguitara tal compagnia et si ritienghi ancora il principale anco di cinque duoi con questa perho conditione che volendo esso signor Luigio toglier d'anno in anno la

---

emanata a favore dei Parpaglia, si limitava a contestare la giurisdizione esercitata dai signori della Bastia. Non ammetteva pure il titolo comitale su quel feudo, notando che il vocabolo conte supponeva l'esistenza e l'esercizio di un diritto, come ad esempio quel di prelato indicava esservi una carica in colui che n'era insignito. Quindi conchiudeva denominarsi abusivamente conti coloro che non percepivano i frutti del contado. Come Mondovita, il Morozzo sapeva di combattere *pro aris et focis*, epperciò ancor egli conchiudeva che *adhuc restituenda esset civitas Montisregalis tamquam laesa. . . . ac proinde infeudationem Parpaleorum funditus delendam esse.*

Ma i voti, tanto del Morozzo quanto dei suoi colleghi, non doveano essere esauditi: e i duchi di Savoia vi rispondevano colle susseguenti investiture, fra le quali quella del 1622 di Carlo Emanuele I al conte Bernardino cavaliere dell'Annunziata, dichiarava che, informato delle opposizioni di Mondovì, egli d'autorità assoluta, vuoi propria che imperiale, concedeva liberamente quel feudo al medesimo, con facoltà di alienarlo, erigere primogenitura, ecc. E così fu sino all'estinzione di quella famiglia.

suoa parte del guadagno passati li tre primi anni siano tenuti essi messer Nigris et Benzo di darglielo et possino anco luoro togliere luoro parte d'esso guadagno et non togliendosi ma restando esso guadagno nella bothegha venghi et resti a profitto comune tanto d'esso sig Luigio che d'essi nobili Bensio et Nigris alla rata suddetta cioè che ne spetti ad esso sig. Luigio de' cinque duoi et ad essi benzo et Nigris de' cinque tre, il qual guadagno s'intendera come sovra dedutta la spesa dalla bothega cioè per conto del fitto et reparatione che gli sarà necessaria et delle spese cibarie di essi luoro duoi Nigris et Benzo, quali spese cibarie hanno accordato a scudi sessanta per ogni anno . . . . . e per caduno di essi. più hanno convenuto . . . . . Luigio non vorra che seguiti la . . . . . . . . pagnia più di detti sei anni ma retirar il suo principale et guadagno sara tenuto darni avviso ad essi nobili Nigris et Benzo darli solo scudi mille d'esso principale con sua parte dil guadagno al fine del sesto anno cioè dil guadagno quale non hauera ancora tuotto et si dedura che esso signor Luigio non hauera guadagno presso sesto anno per rispetto di detti mille scudi che vorra li siino dati al fine d'esso sesto anno et li altri scudi mille saranno tenuti essi Nigris et Benzo pagarli al detto sig Luigio cioè uno anno apresso passati detti sei anni con l'utile d'essi mille scudi et ciò in dinari contanti in oro e grossa moneta et non in crediti ne robe per essersi cosi convenuto che restano li crediti et robe de' quali conditione si siano a conto et parte d'essi Benzo et Nigris. Più hanno convenuto et accordato che durante il tempo della suddetta compagnia non possino essi Nigris et Benzo far alcuna altra mercantia o traffigho salvo li suddetti et altri, in quali esso signor Luigio sia partecipe come sopra et al modo suddetto. Più hanno convenuto che se occorresse qualche caso fortuito che fosse per colpa d'essi Nigris et Benzo che non facessero . . . . . . . . . . . . . . . . . . luoro solamente ma bene . . . . . . . . . . . . . . . . . . . che non sia per colpa d'essi Nigris et . . . . . diligentia ma pur solo per voler . . . . . ogniuno di loro tanto signor Luigio che esso signor Benzo ne patisca et resti al bene et male . . . . . . . ratta suddetta. Più hanno convenuto tra essi messer Gio Giacomo Nigris et messer Gio Batt Benzo debbano sì l'uno come l'altro attendere al trafico et mercantia sudetti comunemente. più hanno convenuto che al fine della compagnia pagato che haveranno detto sig Luigio tanto del principale che vtile a lui spettante esso messer Gio Batt Benzo prima pigli trouandosi dinari in bothegha et il restante insino al compimento delli mille scudi per lui posti come sopra in denari contanti in tante bone mercantie a soa elettione et esso messer Gio Giacomo togli poi l'altro terzo delli detti danari che si trovaranno, et il restante sino al compimento delli suddetti mille scudi come sopra per lui posti in tante mercantie o sia debitori

a soa elettione Et tutto il resto che vi sara si partirà et ne spetti a caduno di essi la mità et più hanno convenuto et promesso caduno di essi Nigris et Benzo che venendo a morte l'uno di essi l'altro debba seguitar il trafficho et mercantia sino al termine sudetto a guadagno come sopra tanto delli eredi di quello sarà venuto a morte e del detto sig Luigio . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
vivera in modo sudetto perchè ....... in tutto per essi contraente e stato ... dato et convenuto per patto espresso et per solenne stipulatione firmato Il che tutto quanto sovra essi contrahenti hanno detto et dicono esser vero et più hanno promesso et promettono caduno nel caso suo di havere et tenere sempre rato grato valido et fermo attendere et inviolabilmente osservare ogni cosa sopra scritta et nel presente pubblico istromento contenuta et di non contrauenirli in modo alcuno in tutto o in parte per se o altri di ragione o di fatto ancor che di ragione potessero o alcuno di loro contrahenti potesse sotto l'obligo et special yppotheca di tutti loro beni et di caduno di essi ragioni et actioni quali hanno al presente et poteano havere per l'avvenire reffection di ogni danno spese et interesse tanto in lite come altrimenti, quali beni ragioni et actioni respetivamente si suono constituiti et constituiscono di tenerli e possederli per ragion di pegno et special hyppotheca l'vno a nome de l'altro respectivamente per l'osservanza di quanto sovra nel presente publico instromento è contenuto renontiando ad ogni eccetione quale potessero addur con dir et allegar tutto il contenuto sopra nel presente publico instromento non esser detto o fatto cosi come sopra e scritto o altrimenti o che vi sia intervenuto dolo malo forza pagura causa actione nel patto o conditione di cosa indebita senza causa o per ingiusta causa et finalmente ad ogni beneficio et legge . . . . . .
potessero alcuno di essi ...., contrauenir a quanto sopra per ..... nel presente publico instromento et ciò con luoro ..... per caduno di loro corporalmente le scritture ..... mani di me nodaro sottoscritto richiesto a ric..... tutti tre publici istromenti cioè per caduno ..... contrahenti vno d'uno perho medemo tenore ... spedirli in publica forma al dittame anco di ..... perito se fia bisogno.

---

*L'Accademico Segretario*

CESARE NANI.

Torino — VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

# CLASSE

DI

## SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

### Adunanza del 30 Gennaio 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Cossa, Vice-presidente dell'Accademia, D'Ovidio, Direttore della Classe, Berruti, Bizzozero, Mosso, Spezia, Camerano, Segre, Peano, Volterra, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi e Naccari Segretario.

Viene letto ed approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Socio Peano presenta una memoria stampata del professore Amodeo, intitolata: *Curve* κ-*gonali di* $s^{esima}$ *specie.*

Il Socio Camerano, per incarico avuto dal dott. Federico Sacco, fa omaggio all'Accademia di parecchie memorie su argomenti di Geologia.

Il Segretario presenta una memoria inviata in omaggio all'Accademia dal Socio corrispondente Luigi Bianchi, intitolata: *Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti.*

Il Segretario legge una lettera del dott. Giuseppe Pitrè, nella quale questi ringrazia l'Accademia per il premio Bressa conferitogli.

Il Socio Peano presenta per l'inserzione negli *Atti* una nota del Prof. Rodolfo Bettazzi, intitolata: *Sulle serie a termini positivi, le cui parti rappresentano un continuo.*

In seduta privata la Classe procede alla votazione per l'elezione del suo Segretario, e riesce eletto, per un nuovo triennio, il Socio Naccari, salvo l'approvazione Sovrana.

In seguito ad altra votazione viene riconfermato per un altro triennio a delegato della Classe al Consiglio di Amministrazione il Socio Berruti.

# LETTURE

## *Sulle serie a termini positivi le cui parti rappresentano un continuo;*

Nota di RODOLFO BETTAZZI (1).

Esistono successioni di termini, tali che prendendo tutte le possibili somme o serie formate con termini di esse, si ottengono tutti i valori di un continuo (eccetto un estremo). Così, p. es. la serie

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\ldots$$

dà tutti i numeri di $\overrightarrow{0\,1}$ (2).

Nella presente Nota si cerca quali sono tutte le serie di numeri positivi che godono una consimile proprietà.

1. — Sia $u$ la serie data a termini positivi. Il gruppo da considerarsi è quello composto dei termini di $u$, delle loro somme due a due, tre a tre, $n$ ad $n$, qualunque sia l'intero $n$, e delle somme di tutte le possibili serie formate con termini di $u$.

(1) Questa Nota risponde alla questione N. 1136 posta dal sig. Rosace nel N. 9, t. IV (Settembre 1897) del periodico *L'Intermédiaire des mathématiciens*, e così concepita: “ Quelles sont les conditions strictement nécessaires que doit remplir une série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$ pour que les nombres “ représentés par toutes les sommes ou séries partielles $u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots$ “ détachées de la série considérée, constituent un ensemble continu? „

(2) Cfr. più avanti, al § 4.

Si indica con $\overleftrightarrow{\alpha\beta}$ il continuo lineare avente per estremi $\alpha, \beta$: con $\overrightarrow{\alpha\beta}$, $\overleftarrow{\alpha\beta}$, $\overline{\alpha\beta}$ lo stesso continuo a cui siano tolti risp. uno o due estremi (*Formulaire de Mathématiques*, publié par la “ Rivista di Matematica „. Turin, 1895, tome I, § 4, P41-44).

Diremo che le varie parti di $u$ *rappresentano* i numeri, o l'infinito ($\infty$), che sono la loro somma.

Per questo gruppo vale il

Teorema. — *Se il gruppo ora definito per una serie* u *deve essere un continuo, lo zero dev'essere il limite inferiore degli elementi di* u.

Infatti, altrimenti esisterebbe un numero positivo $a$ del quale ogni $u_n$ sarebbe maggiore, e quindi ogni *serie* formata con elementi $u_n$ sarebbe divergente, e da $u$ non potremmo ricavare se non somme di gruppi *finiti* di termini capaci di rappresentare numeri. Ma i numeri così ottenuti costituiscono (com'è noto ([1]) ) un gruppo di prima potenza, e quindi non possono costituire un continuo, il quale, come si sa, è di potenza superiore alla prima ([2]).

*Osservazione.* — Nella serie $u$ la somma della serie sarà il massimo del gruppo in questione, mentre lo zero ne è solo limite inferiore e non un minimo. Il gruppo in questione non può dunque esser continuo, se ad esso non aggiungiamo il numero zero. Converremo di aggiungervi anche lo zero, numero che può ritenersi rappresentato dal non considerare nessun termine della serie, o dal considerarli tutti ridotti a zero. Il gruppo così modificato si indicherà con $Su$.

Evidentemente se $Su$ è continuo esso non può essere che dei tipi $\overline{0\,a}$, $\overline{0\,\infty}$, risp. quando la serie è convergente o divergente, essendo $a$ la somma della serie.

È chiaro che $Su$ è indipendente dall'ordine dei termini della serie.

---

([1]) Tal teorema, che in simboli di logica può esprimersi così: $\mathrm{Num}\, Z_N = \mathrm{Num}\, N$, è corollario di quello di Cantor che i numeri algebrici costituiscono un gruppo numerabile (V[i] *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre,* " Journ. für Math. ", Bd. 84 — *Formulaire,* t. 1, VI, § 1, P9). — Cfr. anche: Bettazzi, *Sui sistemi di numerazione per i numeri reali,* § 3, " Periodico di Matematica ", t. V. — Id., *Fondamenti per una teoria generale dei gruppi,* § 95, ivi, T. XI.

([2]) Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algeb. Zahlen,* " Journ. für Math. ", Bd. 22 — *Formulaire,* T. 1, VI, § 1, P12.

In simboli di logica le proposizioni finora enunciate si possono scrivere così:

$$u \epsilon \mathrm{QfN} . \supset . \mathrm{S}u = \overline{x \epsilon} \left[ \exists \, \overline{v \epsilon} \left\{ v \epsilon (\iota 0 \cup \iota 1) \mathrm{fN} . x = \sum_{1}^{\infty} vu \right\} \right]. \quad \text{(Def)}$$

$$u \epsilon \mathrm{QfN} . v \epsilon (\mathrm{NfN}) \mathrm{rcp} : \supset . \mathrm{S}u_v = \mathrm{S}u.$$

$$u \epsilon \mathrm{QfN} . \mathrm{S}u \epsilon \mathrm{Cont} : \supset . \mathrm{l}_1 (u_{\mathrm{N}}) = 0.$$

$$u \epsilon \mathrm{QfN} . \mathrm{S}u \epsilon \mathrm{Cont} : \supset . \mathrm{S}u = \overline{0 \sum_{1}^{\infty} u}.$$

2. — Se una serie $u$ rappresenta un continuo *finito* $\overline{0a}$, si *aggiunga* ad essa un elemento $b$, cioè si consideri la nuova serie $v$ i cui elementi sian $v_1 = b$, e, in generale, $v_n = u_{n-1} (n > 1)$. Essa rappresenterà tutti i numeri già rappresentati da $u$, oltre a quelli che si hanno sommando con essi il numero $b$, ossia i continui $\overline{0a}$, $\overline{b, a+b}$.

In simboli potremo scrivere:

$$u \epsilon \mathrm{QfN} . \supset . \mathrm{S}u = \mathrm{S}(u_{1+n} \bar{n}) \cup [u_1 + \mathrm{S}(u_{1+n} \bar{n})].$$

Se sarà $b \leqq a$, i due continui si fonderanno in un solo $\overline{0 \, (a+b)}$.

Se alla nuova serie si aggiunge un altro elemento $c$, avremo rappresentati i continui $\overline{0a}$, $\overline{c \, (a+c)}$, $\overline{b \, (a+b)}$, $\overline{(b+c) \, (a+b+c)}$, che possono talora fondersi in uno solo $\overline{0 \, (a+b+c)}$.

3. — Possiamo rilevare i casi più importanti che si hanno *aggiungendo* una serie $v$ ad una serie $u$, cioè formando una serie $w$ i cui termini siano tutti e soli quelli di $u$ e di $v$, disposti prendendo alternativamente ed in ordine gruppi finiti di termini consecutivi di $u$ e di termini consecutivi di $v$. Diremo $\mathrm{S}(u, v)$ il gruppo dei numeri rappresentati da questa serie $w$, il quale è indipendente (§ 1) dal modo di aggruppamento dei termini di $u$ e di $v$.

In simboli di logica avremo:

$$u, v \epsilon \mathrm{QfN} . \supset . \mathrm{S}(u, v) = \overline{\iota x \epsilon} [w \epsilon \mathrm{QfN} . a, b \epsilon (\mathrm{NfN}) \mathrm{Sim} . a_{\mathrm{N}} \frown b_{\mathrm{N}} = \Lambda .$$

$$. a_{\mathrm{N}} \smile b_{\mathrm{N}} = \mathrm{N} : n \epsilon \mathrm{N} . \supset_n . w_{a_n} = u_n . w_{b_n} = v_n \therefore \supset_{w,a,b} . x = \mathrm{S}w]. \quad \text{(Def)}$$

È evidente che se aggiungiamo due serie rappresentanti continui finiti $\overline{0\,a}$, $\overline{0\,b}$, la serie risultante rappresenta il continuo $\overline{0\,(a+b)}$: e rappresenterà il continuo $\overline{0\,\infty}$ ogni serie ottenuta aggiungendo gruppi finiti di elementi o serie qualunque ad una serie che già rappresenti il continuo infinito $\overline{0\,\infty}$.

$$u, v \epsilon \mathrm{QfN} . a, b \epsilon \mathrm{Q} . \mathrm{S}u = \overline{0\ a} . \mathrm{S}v = \overline{0\ b} : \supset \mathrm{S}(u, v) = \overline{0\ (a+b)}.$$

$$u, v \epsilon \mathrm{QfN} . \mathrm{S}u = \mathrm{Q}_0 \smile \iota\,\infty : f \epsilon (\mathrm{NfN}) \mathrm{Sim} . n \epsilon \mathrm{N} . \supset_n . v_{fn} = u_n . \therefore \supset_f . \mathrm{S}v = \mathrm{Q}_0 \smile \iota\,\infty.$$

Se ad $u$ che rappresenta $\overline{0\,a}$ si aggiunge una serie di cui infiniti termini siano uguali ad un numero $a'$ di $\overline{0\,a}$, la nuova serie, per quello che si è detto, rappresenterà anche i continui $\overline{0\,a'}$, $\overline{a'\ (a'+a')} = 2a'$, $\overline{2a'\ 3a'}$ ecc., e quindi il continuo $\overline{0\,\infty}$.

$$u, v \epsilon \mathrm{QfN} . a \epsilon \mathrm{Q} . \mathrm{S}u = \overline{0a} . a' \epsilon \overline{0a} : f \epsilon (\mathrm{NfN}) \mathrm{Sim} . n \epsilon \mathrm{N} . \supset_n . v_{fn} = a' \therefore \supset .$$

$$. \mathrm{S}(u, v) = \mathrm{Q}_0 \smile \iota\,\infty.$$

Si aggiunga ad $u$ una serie di numeri fra i quali ve ne siano infiniti tutti $> a'$ ($a'$ numero di $\overline{0\,a}$) ma aventi $a'$ per limite inferiore. In tal caso sia $b$ un numero qualunque $> a'$, compreso fra $na'$ ed $(n+1)a'$, e sia precisamente

$$b = na' + a'_0 , \qquad \text{con } a'_0 \leqq a' \qquad \text{ed} \qquad n \geqq 1.$$

Fra i numeri $> a'$ aggiunti se ne scelgano $n$ compresi fra $a'$ ed $a' + \dfrac{a'_0}{n}$, e siano, p. es.

$$a' + a'_1 , \ a' + a'_2 , \ \ldots\ldots , \ a' + a'_n.$$

Aggiungendoli successivamente alla serie $u$, potremo fra gli altri, rappresentare i numeri dei continui:

$$\overline{(a' + a'_1) \quad (2a' + a'_1)}$$

$$\overline{(a' + a'_1) + (a' + a'_2) \quad (2a' + a'_1) + (a' + a'_2)}$$

cioè

$$\overline{(2a' + a'_1 + a'_2) \quad (3a' + a'_1 + a'_2)}$$

e così

$$\overline{(3a' + a'_1 + a'_2 + a'_3) \quad (4a' + a'_1 + a'_2 + a'_3)}$$

ecc.

$$\overline{(na' + a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n) \quad ((n+1)a' + a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n)}$$

nell'ultimo dei quali è compreso $b = na' + a'_0$, essendo $a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n < n \frac{a'_0}{n} = a'_0$ e $b \leqq (n+1)a'$. Dunque il numero $b$ è rappresentato mediante elementi della serie nuova, la quale quindi rappresenta il continuo infinito $\overline{0 \infty}$.

In simboli:

$$u,v \epsilon \mathrm{QfN} . a \epsilon \mathrm{Q} . \mathrm{S}u = \overline{0a} . a' \epsilon \overline{0a} . f \epsilon (\mathrm{NfN})\mathrm{Sim} : n \epsilon \mathrm{N} . \supset_n . v_{fn} > a' : \mathrm{l}_1 v_{f\mathrm{N}} = a' .\because \supset$$
$$. \mathrm{S}(u,v) = \mathrm{Q}_0 \cup \iota \infty .$$

4. Teorema. — *Se la serie* u *rappresenta un continuo, la somma dei termini di essa che sono minori di un numero qualunque* b *del continuo rappresentato dev'essere* $\geqq$ b.

In generale, indichiamo col simbolo $n\text{‘}(u,k)$ l'$n^{\text{esimo}}$ di quelli fra i termini di $u$, presi nell'ordine della serie, che appartengono anche ad una certa classe $k$ di enti $u$ e diamo un'analoga definizione dello stesso simbolo anche per il caso di una serie illimitata nei due sensi, quando fra i suoi termini considerati nell'ordine della serie ve ne sia uno che è il primo fra quelli della classe $k$, cioè uno tale che prima di esso non ve ne siano altri della classe $k$. In simboli, poniamo

$$\left.\begin{array}{r} u \epsilon \mathrm{QfN} . k \epsilon \mathrm{K}\text{‘}u : \\ u \epsilon \mathrm{QfN}(\mathrm{N} \cup -\mathrm{N}) . k \epsilon \mathrm{K}\text{‘}u . \exists \overline{p \epsilon} [p \epsilon \mathrm{N} . u_{p-\mathrm{N}} \cap k = \Lambda] : \end{array}\right\} \supset$$
$$. n\text{‘}(u,k) = \bar{\iota}\, x \epsilon [m, n \epsilon \mathrm{N} . u_m \epsilon k . n = \mathrm{Num}(u_{m-\mathrm{N}_0} \cap k) : \supset_m . x = u_m] . \quad \text{(Def)}$$

L'enunciato del teorema ora detto sarà:

$$u \epsilon \mathrm{QfN} . \mathrm{S}u \epsilon \mathrm{Cont}. b \epsilon \mathrm{S}u . \supset . \sum_{n=1}^{\infty} n'(u, b - \mathrm{Q}) \geqq b.$$

Invero, se ciò non fosse, un numero $c$ compreso fra $b$ e la somma dei termini $<b$, non si potrebbe rappresentare, giacchè la somma di alcuni o di tutti i termini $<b$ sarebbe, per ipotesi, $<c$, ed uno qualunque dei restanti, che sono $\geqq b$, non può concorrere che a rappresentare numeri $>c$.

5. Teorema. — *Ogni serie a termini positivi in cui il limite inferiore dei termini è lo zero, se è tale che per ogni numero positivo* b *non maggiore della somma della serie, la somma dei termini di essa che sono* $<$b *è* $\geqq$b, *rappresenta il continuo che ha per estremi lo zero e la somma della serie.*

In simboli:

$$u \epsilon \mathrm{QfN} . l_1 u_N = 0 : b \epsilon 0 \overset{\vdash\!\!-\!\!\dashv}{\sum_1^{\infty}} u . \supset_b . \sum_{n=1}^{\infty} n'(u, b - \mathrm{Q}) \geqq b . \because \supset . \mathrm{S}u = 0 \overset{\vdash\!\!-\!\!\dashv}{\sum_1^{\infty}} u.$$

I. Sia dapprima la serie convergente, e ne sia $a$ la somma. In essa dovranno comparire in numero finito i termini maggiori di un qualunque numero: talchè, mettendo di seguito i termini uguali, se ve ne sono, possiamo immaginare tutti i termini d'essa serie disposti in ordine non crescente.

Il numero $a$ è intanto rappresentato dalla serie completa. Se $b$ è un numero di $0a$, allora o è $b$ stesso un termine della serie, ed è così rappresentato, oppure potremo prendere il primo termine $u_s$ della serie che sia $<b$ (e che dev'esserci perchè $l_1 u_N = 0$) e fare la somma di esso con tanti degli immediatamente seguenti (siano pur tutti, se è necessario) quanti occorrono perchè la somma venga $=b$ (nel qual caso il numero è così rappresentato) o venga $<b$ ma si cambi in $>b$ aggiungendo il seguente, come deve necessariamente accadere essendo la somma dei termini da $u_s$ in poi (termini $<b$) uguale o maggiore di $b$ per ipotesi, ed avendo già considerato il caso in cui se ne potessero sommar tanti (siano pur tutti) da formare $b$. Avremo dunque:

$$\sum_{n=s}^{n=s+r} u_n < b < \sum_{n=s}^{n=s+r+1} u_n.$$

La differenza

$$b_1 = b - \sum_{n=s}^{n=s+r} u_n$$

per la relazione precedente è $< u_{s+r+1}$. Si operi con $b_1$ come si è fatto con $b$: il primo termine della serie che è $< b_1$ (e che deve esistere) sarà seguente ad $u_{s+r+1}$. Se troveremo una somma di termini che sia $= b_1$, uniremo questi termini a quelli da $u_s$ ad $u_{s+r}$ ed avremo rappresentato $b$; altrimenti avremo, analogamente, una relazione

$$\sum_{n=s_1}^{n=s_1+r_1} u_n < b_1 < \sum_{n=s_1}^{n=s_1+r_1+1} u_n,$$

con $s_1 > s + r + 1$: talchè posto

$$b_2 = b_1 - \sum_{n=s_1}^{n=s_1+r_1} u_n = b - \sum_{n=s}^{n=s+r} u_n - \sum_{n=s_1}^{n=s_1+r_1} u_n,$$

sarà $b_2 < u_{s_1+r_1+1}$. Ripetendo lo stesso procedimento per $b_2$ e così via, o accadrà che giunti a $b_p$ si trovi una somma di termini (in numero finito od infinito) che uguagli $b_p$, ed allora o

$$b = \sum_{n=s}^{n=s+r} u_n + \sum_{n=s_1}^{n=s_1+r_1} u_n + \ldots\ldots + \sum_{n=s_p}^{n=s_p+r_p} u_n,$$

oppure

$$b = \sum_{n=s}^{n=s+r} u_n + \sum_{n=s_1}^{n=s_1+r_1} u_n + \ldots\ldots + \sum_{n=s_{p-1}}^{n=s_{p-1}+r_{p-1}} u_n + \sum_{n=s_p}^{n=\infty} u_n;$$

ovvero ciò non accadrà, e si troverà una serie

$$\sum_{n=s}^{n=s+r} u_n + \sum_{n=s_1}^{n=s_1+r_1} u_n + \ldots\ldots + \sum_{n=s_p}^{n=s_p+r_p} u_n + \ldots\ldots$$

la cui somma è $b$, giacchè la somma dei suoi primi $p$ termini differisce da $b$ meno del primo termine seguente nella serie $u$, che ha per limite zero. Il numero $b$ è così rappresentato ed il teorema è provato.

II. La serie sia divergente.

α) Si supponga dapprima che per ogni numero positivo $b$ la somma dei termini della serie data $u$ che sono $< b$ sia infinita. Allora sia $a$ un numero positivo qualunque. Se esso è uno dei termini di $u$, è senz'altro rappresentato da esso.

Se $a$ non è uno dei termini della serie, si consideri, nell'ordinamento in cui essa è proposta, il primo dei termini $< a$ (ne esistono infiniti, essendo $\mathrm{l}_1\, u_N = 0$), poi il 2°, il 3°, ecc. e sommiamone in quest'ordine tanti quanti ne occorrono perchè la loro somma sia $= a$, nel qual caso $a$ è rappresentato, oppure sia $< a$ mentre la somma di essi col seguente fra i minori di $a$ sia $> a$, come deve accadere a causa dell'ipotesi che la somma dei termini $< a$ sia infinita. Avendosi così, in questo secondo caso, per es.

$$u_s + u_t + u_r + \ldots + u_p < a\,, \qquad u_s + u_t + u_r + \ldots + u_p + u_q > a\,,$$

o sarà $u_q > \frac{a}{2}$, oppure sarà $u_q \leqq \frac{a}{2}$, e allora la somma $u_s + u_t + u_r + \ldots\ldots + u_p$ che differisce da $a$ meno di $u_q$ ne differirà meno di $\frac{a}{2}$, e sarà quindi essa $> \frac{a}{2}$. Considerando $u_q$ od $u_s + u_t + u_r + \ldots + u_p$ secondochè siano nel primo o nel secondo caso, si ha un numero che differisce da $a$ per una differenza $a_1 < \frac{a}{2}$. Si indichi con $G_1$ il gruppo del solo $u_q$ o di $u_s, u_t, u_r, \ldots, u_p$ risp. nel primo e nel secondo caso. La serie ottenuta da $u$ sopprimendo in essa i termini di $G_1$ è ancora nelle condizioni supposte verificate per $u$, essendosi in essa soppresso soltanto un gruppo finito di termini: dunque potremo per $a_1$ e per tal serie ripetere analoghi ragionamenti e trovare un gruppo $G_2$ costituito da uno o più elementi (in numero finito) tutti $< a_1$, la cui somma $\leqq a_1$ sia $> \frac{a_1}{2}$: talchè la somma dei termini di $G_1$ e di $G_2$ differisca da $a$ di un numero $a_2 < \frac{a_1}{2}$, cioè $< \frac{a}{4}$. Se questa somma non è già $= a$, sopprimendo in $G$ i termini di $G_1$ e di $G_2$ e colla serie restante operando rispetto ad $a_2$ nel medesimo modo, la somma dei termini di $G_1$, di $G_2$ e del gruppo $G_3$ che così si ottiene sarà o $a$, o un numero differente da $a$ meno di $\frac{a_2}{2}$, cioè

di $\frac{a}{8}$, e così via dicendo. Si ottiene così che o dopo un numero finito di operazioni si giunge ad avere un gruppo finito di termini di $u$ la cui somma sia $a$, oppure ciò non accade, e si ottiene una serie di gruppi $G_1$, $G_2$, $G_3$, ... tali che la somma dei termini di $G_1$ differisce da $a$ meno di $\frac{a}{2}$, la somma di quelli di $G_1$ e $G_2$ meno di $\frac{a}{4}$, la somma di quelli di $G_1$, $G_2$ e $G_3$ meno di $\frac{a}{8}$ ecc., talchè la somma di tutti è precisamente $a$.

È dunque provato che qualunque numero $a$ è rappresentato da una somma o da una serie di termini di $u$, c. d. d.

β) Si abbia invece per qualche numero $a$ (e così accadrà allora per ogni numero di $\overline{0a}$) che la somma dei termini di $u$ che sono $< a$ non sia infinita: e si indichi con $a_0$ il limite superiore del gruppo Γ dei numeri $a$ tali che la somma dei termini di $u$ che sono $< a$ sia finita. Per ipotesi sarà $a_0 > 0$.

Può darsi che $a_0$ appartenga al gruppo Γ, oppure no. Distinguiamo i due casi.

Sia $a_0$ esso stesso tale che la somma dei termini di $u$ che sono $< a_0$ sia finita, e precisamente uguale ad A, essendo, per le ipotesi del teorema, $A \geqq a_0$. Non dovrà essere $a_0$ infinito, giacchè allora sarebbe A la somma di *tutti* i termini di $u$, la quale serie si è invece supposta divergente. Per le ipotesi del teorema, e per la prima parte dell'attuale teorema già provato per le serie convergenti, i termini $< a_0$ costituiscono una serie che rappresenta il continuo $\overline{0A}$. Dovendo invece la somma dei termini di $u$ che sono $< a_0 + h$ ($h$ qualunque positivo) essere infinita (per il significato dato ad $a_0$) dovrà essere infinita la somma dei termini che non sono $< a_0$ ma che sono $< a_0 + h$. I termini $= a_0$ devono dunque essere in numero infinito, oppure devono essere in numero infinito i termini $> a_0$, ed avere $a_0$ per limite inferiore. Secondo il § 3, aggiungendo alla serie che rappresenta il continuo $\overline{0A}$ di cui (essendo $A \geqq a_0$) fa parte $a_0$, gli infiniti altri termini di $G_1$, la serie così ottenuta, che sarà la primitiva $u$, rappresenta il continuo $\overline{0\infty}$.

Sia invece $a_0$ tale che la somma dei termini di $u$ che sono $< a_0$ sia infinita, mentre, secondo la data definizione di $a_0$, la

somma di tutti i termini di $u$ che sono inferiori ad un numero qualunque positivo $< a_0$, p. es. $a_0 - \epsilon$, è finita. Allora la somma dei termini di $u$ che sono $< a_0 - \epsilon$ è una funzione di $\epsilon$ sempre non decrescente al decrescere di $\epsilon$, e che quindi ha un limite per $\epsilon$ tendente a zero. Tale limite dev'essere $+\infty$: perchè se fosse L, numero finito, la somma dei termini di $u$ minori di un numero qualunque $< a_0$ sarebbe $\leqq$ L, il che equivarrebbe a dire che sarebbe $\leqq$ L la somma dei termini $< a_0$, contro l'ipotesi. Allora, preso $b$ qualunque si può trovare $\epsilon$ tale che la somma dei termini di $u$ che sono $< a_0 - \epsilon$ sia $> b$, e, p. es., $=$ B: e tali termini per le ipotesi del teorema e per la parte I già dimostrata costituiscono una serie che rappresenta il continuo $\overline{0\,\mathrm{B}}$, del quale fa parte $b$: dunque $b$ è rappresentabile con alcuni dei termini di $u$. Così colla serie $u$ si rappresenta qualunque numero positivo, c. d. d.

6. — Il teorema precedente con quelli dei §§ 1 e 4, provano che

*La condizione necessaria e sufficiente acciocchè una serie di termini positivi rappresenti un continuo, è che il limite inferiore dei suoi termini sia lo zero, e che per qualunque numero* b *non maggiore della somma di essa, la somma dei termini della serie che sono* $<$ b *sia* $\geqq$ b.

In simboli:

$$u \epsilon \mathrm{QfN} . \supset \therefore \mathrm{S}u \epsilon \mathrm{Cont} . = : \mathrm{l}_1 u_{\mathrm{N}} = 0 . \left[ b \epsilon \overline{0 \sum_1^\infty u} . \supset_b . \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{\backprime}(u, b - \mathrm{Q}) \geqq b \right].$$

7. — Dai teoremi precedenti discendono i seguenti corollari:

Corollario 1°. — *Se una serie a termini positivi rappresenta un continuo, lo stesso accade della serie ottenuta da esso prendendone i termini minori di un numero dato qualunque.*

In simboli:

$$u \epsilon \mathrm{QfN} . \mathrm{S}u \epsilon \mathrm{Cont} . b \epsilon \mathrm{Q} . v \epsilon \mathrm{QfN} : n \epsilon \mathrm{N} . \supset_n . v_n = n^{\backprime}(u, b - \mathrm{Q}) . \therefore \supset_b . \mathrm{S}v \epsilon \mathrm{Cont}.$$

Corollario 2°. — *Una serie divergente di cui i termini si possano ordinare in modo non crescente e, così ordinati, tendano a zero, rappresenta il continuo* $\overline{0\,\infty}$: giacchè la somma dei ter-

mini minori di un numero dato consta di tutti quelli della serie da uno determinato in poi, ed è quindi infinita per la divergenza della serie.

In simboli:

$$u \epsilon (\mathrm{Q f N}) \mathrm{dec}_0 \,.\, \mathrm{l}_1 u_{\mathrm{N}} = 0 \,.\, \sum_1^{\infty} u = \infty : \supset . \, \mathrm{S} u = \mathrm{Q}_0 \cup \iota \infty .$$

Corollario 3°. — *Se i numeri razionali compresi fra lo zero ed un numero arbitrario* (i quali, com' è noto, costituiscono un gruppo numerabile) *si ordinano in una serie, questa serie rappresenta il continuo* $\overline{0\,\infty}$ : giacchè la somma di tutti i numeri razionali minori di un numero qualunque è chiaramente infinita.

In simboli:

$$a \epsilon \mathrm{Q} \,.\, u \epsilon [\,\}\mathrm{R} \cap (a - \mathrm{Q}_0)\{\mathrm{fN}]\mathrm{rcp} : \supset . \, \mathrm{S} u = \mathrm{Q}_0 \cup \iota \infty .$$

8. — Dal teorema del § 4 si deduce il

Corollario. — *Se una serie* u, *in cui* $\mathrm{l}_1\, \mathrm{u}_{\mathrm{N}} = 0$, *rappresenta un continuo, per ogni suo termine* $\mathrm{u}_p$ *dev'essere* $\geqq \mathrm{u}_p$ *la somma dei termini di essa che sono* $< \mathrm{u}_p$.

Tale condizione peraltro, non è sufficiente, come lo prova l'esempio della serie costituita da tutti e soli i termini delle due serie

$$\alpha) \qquad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \ldots\ldots \quad \frac{1}{2^n}, \ldots\ldots$$

$$\beta) \qquad 2\frac{1}{2}, \quad 2\frac{1}{4}, \quad 2\frac{1}{8}, \ldots\ldots \quad 2\frac{1}{2^n}, \ldots\ldots$$

giacchè la somma dei termini minori di uno di quelli di α) è il termine stesso, e la somma di quelli minori di un termine di β) (che sono tutti $>2$) è infinita e quindi maggiore di esso, mentre la serie non può rappresentare un continuo perchè, essendo la somma di tutti gli α) uguale ad 1, e i β) tutti $>2$, non sono rappresentabili i numeri compresi fra 1 e 2.

Quella condizione è sufficiente per le serie per le quali $\mathrm{l}_1\, u_{\mathrm{N}} = 0$, e che si possono disporre in forma di serie illimitate

in uno o in due sensi, i cui termini vadano non crescendo. Infatti la condizione è allora verificata per un numero qualunque $b$ non maggiore della somma della serie, quando lo è pei soli termini di essa; giacchè il numero $b$, se non è esso stesso un termine della serie, o è maggiore di tutti, ed allora la somma dei termini minori di esso è la somma della serie, non minore di esso per ipotesi: o non è maggiore di tutti, ed allora è compreso fra due termini consecutivi $u_p$ ed $u_{p+1}$ disuguali, e i termini minori di esso sono quelli minori di $u_p$, la cui somma, per ipotesi $\geqq u_p$, è anche perciò $>b$. Si conclude il

TEOREMA. — *La condizione necessaria e sufficiente acciocchè una serie i cui termini si possono disporre in forma di serie illimitata in un sol senso o in due sensi e non crescente, rappresenti un continuo, è che il limite inferiore dei suoi termini sia lo zero, e che per ogni suo termine* $\mathrm{u}_p$ *la somma dei termini* $<\mathrm{u}_p$ *sia* $\geqq \mathrm{u}_p$.

In simboli:

$$\left.\begin{array}{l} u\,\epsilon(\mathrm{QfN})\,\mathrm{dec}_0\,. \\ u\,\epsilon[\mathrm{Qf}(\mathrm{N}\cup-\mathrm{N})]\,.\,\mathrm{dec}_0\,. \end{array}\right\} \supset .\!\cdot.\; \mathrm{S}u\,\epsilon\,\mathrm{Cont}\,. =$$

$$= :\mathrm{l}_1\, u_{\mathrm{N}} = 0\,.\left[\begin{array}{l} p\,\epsilon\,\mathrm{N} \\ p\,\epsilon(\mathrm{N}\cup-\mathrm{N})\,. \end{array}\right\} \supset_p .\sum_{n=1}^{\infty} n'(u, u_p - \mathrm{Q}) \geqq u_p\Big]\,.$$

COROLLARIO. — *Se una serie è convergente, è condizione necessaria e sufficiente affinchè essa rappresenti un continuo, che per ogni suo termine* $\mathrm{u}_p$ *la somma dei termini* $<\mathrm{u}_p$ *sia* $\geqq \mathrm{u}_p$: giacchè per la convergenza dev'essere $\mathrm{l}_1\, u_{\mathrm{N}} = 0$, e, essendo in numero finito i suoi termini maggiori di un qualunque numero, i termini possono tutti disporsi in modo non crescente.

In simboli:

$$u\,\epsilon\,\mathrm{QfN}\,.\sum_1^{\infty} u\,\epsilon\,\mathrm{Q} : \supset .\ \mathrm{S}u\,\epsilon\,\mathrm{Cont}\,. = .\left[p\,\epsilon\,\mathrm{N}\,.\supset_p .\sum_{n=1}^{\infty} n'(u, u_p - \mathrm{Q}) \geqq u_p\right].$$

9. TEOREMA. — *Se in una serie* u *si ha che* $\mathrm{l}_1 \mathrm{u}_{\mathrm{N}} = 0$ *e che per ogni suo termine* $\mathrm{u}_p$ *la somma dei termini* $<\mathrm{u}_p$ *è uguale ad* $\mathrm{u}_p$, *la serie rappresenta un continuo.*

In simboli:

$$u \epsilon \mathrm{QfN} \,.\, l_1 u_{\mathrm{N}} = 0 \,.\, \left[ p \epsilon \mathrm{N} \,.\, \mathfrak{I}_p \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} n`(u, u_p - \mathrm{Q}) = u_p \right] : \mathfrak{I} \,.\, \mathrm{S} u \epsilon \mathrm{Cont}.$$

Ed invero è facile vedere che per ogni numero $b$ non maggiore della somma della serie è soddisfatta la condizione richiesta dal teorema del § 5. Ciò è chiaro se $b$ uguaglia qualche termine della serie od è maggiore di tutti. Se $b$ non è in queste condizioni, sia L il limite inferiore dei termini di $u$ che sono $>b$: se L non è termine di $u$, vi sono infiniti termini di $u$ compresi fra L ed $L+h$ ($h$ positivo qualunque), e se $u_p$ è uno di essi, vi sono infiniti termini compresi fra $u_p$ ed L, e quindi la somma dei termini di $u$ che sono $<u_p$ è infinita, contro l'ipotesi che sia $=u_p$. Dovrà quindi essere L un termine $u_q$ di $u$, e sarà quello immediatamente precedente a $b$, talchè i termini di $u$ che sono $<b$ sono quelli $<u_q$, e quindi la loro somma, che per ipotesi è $=u_q$, è $>b$, come si voleva.

---

**10.** — È interessante studiare la costituzione delle serie $u$ nelle condizioni accennate nel teorema del § 9: esse si diranno per brevità *serie minime*.

In simboli:

$$u \epsilon \mathrm{QfN} \,.\, \mathfrak{I} \therefore u \epsilon \text{ Serie minima} \,.\, = : l_1 u_{\mathrm{N}} = 0 \,.$$
$$.\left[ p \epsilon \mathrm{N} \,.\, \mathfrak{I}_p \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} n`(u, u_n - \mathrm{Q}) = u_p \right]. \qquad \text{(Def)}$$

Se $u_p$, $u_q$ sono due termini disuguali di esse, e p. es. $u_p>u_q$, essendo uguali ad $u_p$ ed $u_q$ risp. le somme dei termini $<u_p$ e di quelli $<u_q$, sarà uguale ad $u_p-u_q$ le somme di quelli $<u_p$ e $\geqq u_q$, i quali dunque dovranno essere in numero finito o mancare. Si ha intanto che dovranno essere in numero finito i termini uguali ad un medesimo, eccezione fatta per quelli uguali al termine massimo, se c'è, i quali potranno anche essere infiniti. Si conclude anche che tutti i termini di una serie minima, minori di uno fra essi, si potranno disporre in una serie ordinata in modo non crescente: e quindi se vi è un numero finito

di termini massimi (serie necessariamente convergente, essendo per ipotesi la somma dei restanti uguale ad uno di essi) l'intera serie si potrà disporre ordinata in modo non crescente: se vi è un numero infinito di termini massimi, la serie (divergente) consterà di essi e di una serie ordinabile in modo non crescente; e se non esistono termini massimi (serie necessariamente divergente) i termini si potranno disporre in una serie illimitata nei due sensi,

$$\ldots\ldots u_{-n},\ u_{-n+1},\ \ldots\ldots,\ u_{-3},\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_1,\ u_2 \ldots\ldots u_n, \ldots\ldots$$

ordinata in modo non crescente.

Se $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots\ldots u_{p+s}$ sono termini uguali (quindi consecutivi) di una di tali serie così ordinata in modo non crescente, ma non sono massimi, talchè sia

$$u_p > u_{p+1} = u_{p+2} = \ldots = u_{p+s} > u_{p+s+1}\,,$$

sarà, secondo le ipotesi,

$$\sum_{n=p+1}^{n=\infty} u_n = u_p\,, \qquad \sum_{n=p+s+1}^{n=\infty} u_n = u_{p+s} = \ldots\ldots = u_{p+1}\,;$$

donde, sottraendo,

$$u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots\ldots + u_{p+s} = u_p - u_{p+1}$$

cioè

$$s\,u_{p+1} = u_p - u_{p+1} \quad \text{ed} \quad u_{p+1} = \frac{u_p}{s+1}\,;$$

ossia ciascun termine sarà sottomultiplo del più prossimo precedente diverso da esso, con una sottomultiplicità data dal successivo del numero dei termini uguali ad esso. La serie $u$, dunque, quando sia convergente ed abbia quindi un numero finito di termini massimi, ordinata che sia prenderà l'aspetto

$$\overbrace{\frac{a}{s_1},\ \frac{a}{s_1},\ \ldots,\ \frac{a}{s_1}}^{s_1-1},\ \overbrace{\frac{a}{s_1 s_2},\ \frac{a}{s_1 s_2},\ \ldots,\ \frac{a}{s_1 s_2}}^{s_2-1},$$

$$\overbrace{\frac{a}{s_1 s_2 s_3},\ \frac{a}{s_1 s_2 s_3},\ \ldots,\ \frac{a}{s_1 s_2 s_3}}^{s_3-1},\ \ldots,\ \overbrace{\frac{a}{s_1 s_2 \ldots s_n},\ \frac{a}{s_1 s_2 \ldots s_n},\ \ldots,\ \frac{a}{s_1 s_2 \ldots s_n}}^{s_n-1},\ \ldots,$$

dove, in generale $s_n \geqq 2$. Essa ha per somma $a$: giacchè, raggruppandone i termini, si cambia nell'altra:

$$\frac{s_1-1}{s_1}a, \quad \frac{s_2-1}{s_1 s_2}a, \quad \frac{s_3-1}{s_1 s_2 s_3}a, \ldots, \quad \frac{s_n-1}{s_1 s_2\ldots s_n}a, \ldots$$

cioè:

$$a\left(1-\frac{1}{s_1}\right), \quad a\left(\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_1 s_2}\right), \quad a\left(\frac{1}{s_1 s_2}-\frac{1}{s_1 s_2 s_3}\right), \ldots..$$

la cui somma è $a$. Reciprocamente ogni serie di tal forma rappresenta sempre un continuo, giacchè essa ha per somma $a$, e la somma dei termini minori di un suo termine è uguale a questo termine. E ogni continuo finito $\overset{\vdash\!\dashv}{0a}$ è rappresentabile da infinite serie distinte, tutte del tipo precedente.

Se la serie è divergente ed ammette infiniti termini massimi, essa consta di una serie del tipo della precedente, oltre una infinita serie di termini uguali ad $a$: se invece è divergente e non ammette termine massimo, siccome la parte di essa composta dei termini minori di un suo termine qualunque avrà la forma precedente, i termini potranno disporsi in una serie illimitata nei due sensi, della forma

$$\ldots, \overbrace{r_n r_{n-1}\ldots r_2 r_1 a, \ldots, r_n r_{n-1}\ldots r_2 r_1 a}^{r_{n+1}-1}, \quad \overbrace{r_{n-1}\ldots r_2 r_1 a, \ldots, r_{n-1}\ldots r_2 r_1 a}^{r_n-1},$$

$$\ldots, \overbrace{r_2 r_1 a, \ldots r_2 r_1 a}^{r_3-1}, \quad \overbrace{r_1 a, \ldots r_1 a}^{r_2-1}, \quad \overbrace{a, \ldots a}^{r_1-1},$$

$$\overbrace{\frac{a}{s_1}, \ldots \frac{a}{s_1}}^{s_1-1}, \quad \overbrace{\frac{a}{s_1 s_2}, \ldots \frac{a}{s_1 s_2}}^{s_2-1}, \ldots, \quad \overbrace{\frac{a}{s_1 s_2\ldots s_n}, \ldots \frac{a}{s_1 s_2\ldots s_n}}^{s_n-1}, \ldots$$

dove gli $r$ e gli $s$ sono numeri interi $>1$, ed $a$ è un numero positivo. Ed una serie doppiamente illimitata della forma precedente, qualunque siano $a$, gli $r$ e gli $s$, rappresenterà sempre il continuo $\overset{\vdash\!\dashv}{0\infty}$.

11. — Nel caso delle serie minime si supponga che tutti i termini uguali debbano essere in ugual numero, cioè, p. es.

$p-1\,(p>1)$: le serie che rappresentano $\overline{0a}$ diverranno, con $p$ intero qualunque $>1$.

$$\overbrace{\frac{a}{p},\dots,\frac{a}{p}}^{p-1},\ \overbrace{\frac{a}{p^2},\dots\frac{a}{p^2}}^{p-1},\dots,\ \overbrace{\frac{a}{p^n},\dots\frac{a}{p^n}}^{p-1},\dots$$

e quelle che rappresentano $\overline{0\infty}$ possono disporsi così

$$\dots a,\dots a, a, a,\ \overbrace{\frac{a}{p},\dots\frac{a}{p}}^{p-1},\ \overbrace{\frac{a}{p^2},\dots\frac{a}{p^2}}^{p-1},\dots,\ \overbrace{\frac{a}{p^n},\dots\frac{a}{p^n}}^{p-1},\dots$$

oppure

$$\dots,\overbrace{p^n a,\dots,p^n a}^{p-1},\dots,\ \overbrace{pa,\dots pa}^{p-1},\ \overbrace{a,\dots a}^{p-1},$$

$$\overbrace{\frac{a}{p},\dots\frac{a}{p}}^{p-1},\ \overbrace{\frac{a}{p^2},\dots\frac{a}{p^2}}^{p-1},\dots,\ \overbrace{\frac{a}{p^n},\dots\frac{a}{p^n}}^{p-1},\dots$$

con $a$ numero positivo qualunque, e $p$ numero intero qualunque $>1$.

Se in particolare non vi devono essere termini uguali, dovrà essere $p=2$, e le serie si avranno da progressioni semplicemente o doppiamente illimitate

$$\frac{a}{2},\ \frac{a}{4},\ \frac{a}{8},\dots\dots,\frac{a}{2^n},\dots$$

$$\dots 2^n a,\ 2^{n-1}a,\dots,4a,\ 2a,\ a,\ \frac{a}{2},\ \frac{a}{4},\dots,\frac{a}{2^n},\dots$$

oppure dalla serie doppiamente illimitata

$$\dots a, a,\dots a,\ \frac{a}{2},\ \frac{a}{4},\ \frac{a}{8},\dots\frac{a}{2^n},\dots$$

delle quali la prima rappresenta $\overline{0a}$, le ultime due il continuo $\overline{0\infty}$, qualunque sia $a$.

---

**12.** Teorema. — *Se una serie rappresenta un continuo, i numeri di questo continuo rappresentati da un gruppo finito di termini della serie si possono rappresentare anche con serie di infiniti fra i termini della serie stessa.*

In simboli:

$$u \epsilon \mathrm{QfN} . \mathrm{S}u \epsilon \mathrm{Cont} : \supset .\!\cdot\!. n \epsilon \mathrm{N} . f \epsilon (\mathrm{NfZ}_n) \mathrm{Sim} : \supset_{n,f}$$

$$. \exists \overline{f_1, \epsilon} \left[ f_1 \epsilon (\mathrm{NfN}) \mathrm{Sim} . \sum_1^\infty u_{f_1} = \sum_1^n u_f \right].$$

Ed infatti sia $a$ un numero uguale alla somma di un gruppo finito G di termini di $u$: e sia $u_s$ uno (o quello) di essi che non sia maggiore di nessuno degli altri. I termini di $u$ che sono $< u_s$ non compariscono fra quelli di G, e costituiscono una serie $u'$ rappresentante un continuo (§ 7, Cor1°), la cui somma dev'essere (§ 4) maggiore od uguale ad $u_s$, talchè $u_s$ fa parte del continuo da essa rappresentato. Potremo quindi in G sostituire ad $u_s$ la parte di $u'$ che lo rappresenta. Se questa è una serie, il teorema è provato: altrimenti si ripeterà il procedimento per $u_s$ e così via o indefinitamente, o fino a che si abbia una parte rappresentativa che sia una serie. In ogni caso si ottiene la rappresentazione voluta.

Corollario. — *Se una serie rappresenta un continuo, lo rappresenta anche prendendo in essa le sole serie infinite di termini.*

In simboli:

$$u \epsilon \mathrm{QfN} . \mathrm{S}u \epsilon \mathrm{Cont} . x \epsilon \mathrm{S}u : \supset . \exists f \epsilon \left[ f \epsilon (\mathrm{NfN}) \mathrm{Sim} . x = \sum_1^\infty u_f \right].$$

**13.** Teorema. — *Fra le serie rappresentative di continui le serie minime sono tutte e sole quelle nelle quali ogni numero può esser rappresentato in un modo solo, fatta eccezione pei numeri uguali alla somma di un numero finito di termini che possono essere anche rappresentati in altro modo* (§ 12), *ma in un altro solo, con un numero infinito di termini, sostituendo ad uno dei termini che non sono maggiori degli altri, tutti i minori di esso nella serie data.*

In simboli:

$$\begin{array}{l} u \,\epsilon\, (\mathrm{Q\,f\,N})\,\mathrm{dec}_0 \\ u \,\epsilon\, [\mathrm{Q\,f}(\mathrm{N} \cup \mathrm{N})]\,\mathrm{dec}_0 \,. \end{array} \; . \; u \,\epsilon\, \text{Serie minima} : \supset . \Big[ f, f' \epsilon (\mathrm{N\,f\,N})\,\mathrm{cresc} . \supset_{f,f'} \therefore$$

$$\therefore \sum_1^\infty u_f = \sum_1^\infty u_{f'} . = : n \,\epsilon\, \mathrm{N} . \supset_n . u_{fn} = u_{f'n} \Big] . \qquad \text{(P1)}$$

$$\mathrm{Hp\,P1} . \supset . \Big[ n, n' \epsilon\, \mathrm{N} . f \epsilon (\mathrm{N\,f\,Z}_n)\,\mathrm{cresc} . f' \epsilon (\mathrm{N\,f\,Z}_{n'})\,\mathrm{cresc} : \supset_{f,f'} ::$$

$$:: \sum_1^n u_f = \sum_1^n u_{f'} . = \therefore n = n' : p \,\epsilon\, \mathrm{Z}_n . \supset_p . u_{fp} = u_{f'p} \Big] . \qquad \text{(P2)}$$

$$\mathrm{Hp\,P1} . \supset . \Big[ n \,\epsilon\, \mathrm{N} . f \epsilon (\mathrm{N\,f\,Z}_n)\,\mathrm{cresc} . f' \epsilon (\mathrm{N\,f\,N})\,\mathrm{cresc} . \supset_{f,f'} :: \sum_1^n u_f =$$

$$= \sum_1^\infty u_{f'} . = \therefore p \,\epsilon\, (\mathrm{N} \cap n - \mathrm{N}) . \supset_p . u_{fp} = u_{f'p} : s \,\epsilon\, \mathrm{N}_0 . \supset_s . u_{f'_{(n+s)}} = u_{f_n+s+1} \Big] . \qquad \text{(P3)}$$

$$\mathrm{Ths\,P1}\ \mathrm{Ths\,P2}\ \mathrm{Ths\,P3} . \supset . u \,\epsilon\, \text{Serie minima}. \qquad \text{(P4)}$$

I. Invero se $u$ è una serie minima, siano $b$ e $c$ due numeri del continuo che essa rappresenta, corrispondenti risp. ai gruppi, finiti od infiniti, di termini di $u$. che supporremo ordinati in modo non crescente (il che è possibile, essendo finita la loro somma),

$$u_{b_1},\ u_{b_2}, \ldots\ldots u_{b_n}, \ldots\ldots, \qquad u_{c_1},\ u_{c_2}, \ldots\ldots u_{c_n}, \ldots\ldots$$

tali che *non* per ogni $n$ sia $u_{b_n} = u_{c_n}$. Se soltanto fino ad un certo valore $p$ di $n$ sia $u_{b_n} = u_{c_n}$, sarà $u_{b_{p+1}} \neq u_{c_{p+1}}$: sia p. es. $u_{b_{p+1}} > u_{c_{p+1}}$. Allora essendo la somma di tutti i termini di $u$ che sono $< u_{b_{p+1}}$ uguale, per ipotesi, ad $u_{b_{p+1}}$, la somma di tutti i termini di $c$ da $u_{c_{p+1}}$ in poi, parte propria o no di detti termini, sarà $\leqq u_{b_{p+1}}$, ed *uguale* soltanto se i termini di $c$ da $u_{c_{p+1}}$ in poi siano *tutti* i termini di $u$ minori di $u_{b_{p+1}}$. Se quindi o il gruppo che rappresenta $b$ contiene altri termini dopo $u_{b_{p+1}}$ o quello che rappresenta $c$ non contiene tutti i termini di $u$ minori di $u_{b_{p+1}}$, sarà $b > c$.

L'unico caso in cui sia $b=c$ è quello in cui in $b$ dopo $u_{b_{p+1}}$ non vi siano altri termini, e in $c$ a cominciare da $u_{c_{p+1}}$ vi siano tutti i termini di $u$ che sono $< u_{b_{p+1}}$.

In ogni altro caso dunque due numeri $b$ e $c$, rappresentati da termini non tutti identici sono disuguali: cioè ogni numero può essere rappresentato scomposto in un modo solo, eccetto quelli (che formano soltanto un gruppo numerabile) equivalenti alla somma di un numero finito di termini, pei quali vi sono due modi diversi.

II. Nelle serie capaci di rappresentare un continuo, ma che non sono serie minime, la precedente proprietà più non sussiste.

Se, p. es., $u_p$ è un termine di $u$ tale che la somma dei termini minori di esso è $>u_p$ e precisamente è $u_p+b$ $(b>0)$ o è $\infty$, siccome i termini di $u$ che sono $<u_p$ costituiscono essi stessi una serie $u'$ che rappresenta un continuo (§ 7, Cor 1°) il quale è risp. $\overline{0\; u_p}+b$ o $\overline{0\,\infty}$, da $u'$ si potranno estrarre termini (non certamente *tutti*) la cui somma sia $u_p$: e quindi il numero $u_p$ è rappresentato e dal termine $u_p$ di $u$, e da una somma o serie estratta dai termini $<u_p$, e che *non* è la serie di *tutti* i numeri $<u_p$.

E parimente se $b_1 \leqq b$, allora $b_1$, che è del continuo $\overline{0\; u_p+b}$ o risp. $\overline{0\,\infty}$, si esprimerà mediante *alcuni* termini (non tutti) di quelli $<u_p$: i quali uniti ad $u_p$ daranno una rappresentazione del numero $u_p+b_1$. Un'altra di esso si ha dai soli termini $<u_p$, coi quali si rappresenta ogni numero del continuo $\overline{0\; u_p+b}$, e le due rappresentazioni sono diverse, giacchè questa seconda non contiene $u_p$, e la prima lo contiene.

Tutti i numeri, dunque, del continuo $\overline{u_p\; u_p+b}$, o risp. $\overline{u_p\,\infty}$, hanno per lo meno due modi di rappresentazione, e non tutti nel modo indicato nel teorema. Tali numeri inoltre, costituiscono un gruppo continuo, che è dunque di potenza superiore alla prima, mentre è di potenza prima quello dei numeri con doppia rappresentazione nelle serie minime.

**14.** — Le serie divergenti che si possono ordinare in modo non crescente e i cui termini così ordinati tendono a zero, rap-

presentano (§ 7, Cor2°) il continuo $\overline{0\,\infty}$, ma non sono minime: in esse, anzi, ogni numero ha infiniti modi di rappresentazione. Ed invero si può dapprima osservare che la serie ottenuta da una di esse trascurando i primi $p$ termini (con $p$ qualunque) gode le stesse proprietà, e quindi rappresenta $\overline{0\,\infty}$. Allora se un numero è la somma di termini dei quali, disponendoli cogli indici crescenti, il primo sia $u_p$, sopprimendo nella serie i primi termini fino a tutti quelli che sono $= u_p$, dalla serie restante possiamo ottenere un'altra rappresentazione del numero diversa dalla prima, e da quella, operando analogamente, una terza e così via.

Per es. la serie armonica

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots \frac{1}{n}, \ldots\ldots$$

la quale rappresenta $\overline{0\,\infty}$, dà infinite rappresentazioni per ogni numero.

---

*L'Accademico Segretario*

ANDREA NACCARI.

# CLASSE

DI

# SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

## Adunanza del 6 Febbraio 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO BARONE GAUDENZIO CLARETTA

DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Socii: Peyron, Bollati di Saint-Pierre, Pezzi, Ferrero, Cognetti de Martiis, Cipolla, Brusa e Nani Segretario.

Il Socio Segretario dà lettura dell'atto verbale della precedente seduta, del 23 gennaio 1898, che viene approvato.

Per incarico del Presidente il Socio Segretario C. Nani presenta un opuscolo intitolato: *La storia interna ed il problema presente della filosofia del diritto* (Modena 1898), che l'autore, prof. I. Petrone dell'Università di Modena, offre in omaggio all'Accademia e brevemente ne indica il contenuto.

Il Socio E. Ferrero legge una sua nota da inserirsi negli *Atti* accademici: *Mogli e figli di Constantino.*

Il Socio C. Cipolla legge pure una commemorazione del defunto Socio L. Schiaparelli. Detta commemorazione verrà pubblicata negli *Atti.*

# LETTURE

## *Mogli e figli di Costantino;*

Nota del Socio ERMANNO FERRERO.

È cosa detta e ripetuta che Costantino da una concubina, di nome Minervina, ebbe un figlio, Crispo, e da Fausta, figliuola di Massimiano Erculio, i tre figli, Costantino giuniore, Costanzo e Costante, che gli succedettero nell'impero, e due figlie, Costantina ed Elena. Alcuni aggiungono una terza figliuola, Costanza: altri ne negano l'esistenza.

Niun dubbio circa la nascita di Crispo da Minervina, attestata da uno scrittore, quasi contemporaneo di Costantino, Aurelio Vittore (1), e da un altro, Zosimo, posteriore di appena un secolo (2). L'anno, in cui Crispo vide la luce, è ignoto. Egli, fatto Cesare dal padre e da Licinio, collega di questo, il 1° di marzo 317, insieme con Licinio figlio e col giovane Costantino (3), combattè felicemente coi Franchi nel 320 (4). Per quanto Co-

(1) " filium ...suum (*di Costantino*), Crispum nomine, ex Minervina concubina susceptum ". *Epit.*, XLI, 4. Anche coloro, che negano ad Aurelio Vittore quest'operetta, la tengono composta prima della fine del secolo IV (cf. Peter, *Die geschichtliche Literatur über die römische Kaiserzeit*, Leipzig, 1897, vol. II, p. 152).

(2) Κωνσταντῖνος μὲν καθίστησι Καίσαρα Κρίσπον, ἐκ παλλακῆς αὐτῷ γεγονότα Μινερβίνης ὄνομα. *Hist.*, II, 20.

(3) Per la data *Chron. pasch.*, ad a.; *Consul. Constantinop.*, ad a., in *Chron. min.*, ed. Mommsen, vol. I, p. 322.

(4) Nazario, *Pan. Constantino*, 17, 36, 37 (del 321), parla di questa guerra come avvenuta l'anno prima.

stantino amasse porre presto in vista i suoi figliuoli, anche nelle guerre, cosicchè il giovane Costantino, quindicenne, ha già vinto gli Alamanni (1), non si può tuttavia ritardare tanto la nascita di Crispo da crederla posteriore al matrimonio di suo padre con la figlia di Massimiano avvenuto nel 307 (2); poichè allora converrebbe ammettere che il Cesare non avesse avuto più di tredici anni al tempo della detta vittoria sui Franchi. Vero è che Nazario, nel panegirico recitato il 1° di marzo 321, al cominciare del quinto anno dopo l'assunzione dei tre Cesari, celebrando questa vittoria, la dice riportata da Crispo ne' suoi anni puerili (3); ma queste parole del panegirista debbono essere intese alla lettera? (4). Più esatto ci sembra lo storico Zosimo, che narra Costantino aver fatto Cesare Crispo, essendo questi ancor giovane, ἤδη νεανίαν ὄντα (5): ora νεανίας non è parola propria per un fanciullo di dieci anni; tanti ne avrebbe avuto allora Crispo se fosse nato nel 307 poco dopo il matrimonio del genitore con Fausta.

I due autori citati, che riferiscono la nascita di Crispo da Minervina, dicono costei concubina di Costantino; ed anche, assai più tardi, Zonara, senza fare il nome della madre di Crispo, la chiama concubina (6). Ciò dispiacque a scrittori moderni, compresi di soverchia ammirazione per Costantino, i quali credettero contrario alla sua castità lodata da Eusebio e dai pa-

---

(1) V. la mia nota *I titoli di vittoria dei figli di Costantino*, negli *Atti della R. Acc. delle scienze di Torino*, vol. XXXIII, p. 59 e segg.

(2) Più probabilmente in primavera. Per la fine dell'anno sta lo Schiller, *Gesch. der röm. Kaiserzeit*, t. II, p. 179.

(3) " ... facta Crispi ... in quo velox virtus aetatis mora non retardata " pueriles annos gloriis triumphalibus occupavit „. *Pan.*, 36.

(4) Come ha fatto il Seeck (*Gesch. des Untergangs der antiken Welt*, vol. I, p. 442), che crede Crispo nato poco prima o forse anche dopo il matrimonio di Costantino con Fausta, che egli pure continua ad assegnare al principio del 307. Nell'ottobre del 322 Crispo è padre, come si apprende dall'indulto concesso il 30 di quel mese da Costantino " propter Crispi " adque Helenae partum „ (c. 1 Cod. Th., *De indulgentiis criminum* (IX, 38)); quindi, secondo il Seeck, conviene crederlo ammogliato giovanissimo, a quattordici o a quindici anni.

(5) *Loc. cit.*

(6) Εἶχε δὲ καὶ ἐκ παλλακῆς υἱὸν ἕτερον, Κρίσπον καλούμενον, τῶν ἄλλων αὐτοῦ υἱέων πρεσβύτερον. *Ann.*, XIII, 2.

negiristi (testimonianze tutt'altro che di valore!) l'aver avuto una concubina e contrario alla condizione di figlio illegittimo l'inalzamento di Crispo alla dignità di Cesare (1). Ma costoro non badarono che il concubinato per i Romani non aveva nulla di riprovevole. Come, con tutta probabilità, Costantino nacque da un'unione di tal genere contratta fra suo padre, uomo di nobile famiglia ed investito di alti ufficii, ed Elena, donna di origine oscura, così Costantino, ancor pagano, figlio di un Cesare e futuro Augusto, con la speranza di esser egli pure assunto un giorno a questi massimi onori, ha potuto benissimo vivere in concubinato, noi ora diremmo in matrimonio morganatico, con questa Minervina, senza offendere perciò la morale, nè la pubblica opinione (2).

Minervina era morta oppure fu ripudiata da Costantino quando questi celebrò le sue nozze con Fausta, già stabilite mentre era ancor vivo Costanzo? (3). Ebbe quindi Minervina

---

(1) Du Cange, *Famil. Aug. Byzant.*, p. 26; Tillemont, *Hist. des empereurs*, t. IV, p. 617.

(2) Quando nacque Costantino (tra il 272 e il 275 secondo gli autori antichi, che discordano sugli anni, che aveva al tempo della morte: il Seeck, *op. cit.*, vol. I, p. 407, lo crede nato circa il 280), il padre percorreva gli alti ufficii civili e militari dell'impero: l'unione di Costantino e di Minervina e, probabilmente, anche la nascita di Crispo spettano al tempo, in cui Costanzo era Cesare (293—305). Il nome dato a Crispo era un nome di famiglia, quello cioè del bisavo di Costantino, Crispo, fratello dell'imperatore Claudio Gotico e padre di Claudia, che fu la madre di Costanzo (Trebellio Pollione, *Claud.*, 13). Anche questi a Costantino, figlio di una concubina, aveva dato un nome di famiglia: una sorella di Claudio Gotico e di Crispo si chiamava Costantina (Trebellio Pollione, *loc. cit.*).

(3) Ciò risulta da Giuliano (*Or.* I, p. 6) e dal panegirico recitato nell'occasione dell'inalzamento di Costantino ad Augusto, al tempo del suo matrimonio con Fausta. Massimiano, dice l'oratore, rivolgendosi a Costantino " te iam olim sibi generum, etiam ante quam petere posses, " sponte delegerat „ e prosegue descrivendo un quadro del palazzo di Aquileia, rappresentante la sposa, la quale " puella iam divino decore " venerabilis, sed adhuc impar oneri, sustinet atque offert tibi etiam tum " puero, Constantine, galeam auro gemmisque radiantem et pinnis pul- " crae alitis eminentem „ (*Pan. Maxim. et Constant.* (VI), 6). Poco prima lo stesso panegirista dice: " Quomodo enim magis continentiam patris " aequare potuisti quam quod te ab ipso fine pueritiae illico matrimonii " legibus tradidisti? Ut primo ingressu adulescentiae formares animum

sorte uguale a quella di Elena, abbandonata da Costanzo, allorchè, fatto Cesare, condusse in moglie Teodora, figliastra di Massimiano? I matrimonii della figliastra e della figlia di questo imperatore produssero adunque la stessa conseguenza, di rompere le unioni contratte dai personaggi, a cui esse andarono spose? Ciò resta assolutamente ignoto. Certo è che, durante il matrimonio di Costantino con Fausta, sciolto tragicamente dopo diciannove anni nel 326 (1), nacquero Costantino giuniore, Costanzo

---

" maritalem, nihil de vagis cupiditatibus, nihil de concessis aetati voluptatibus in hoc sacrum pectus admitteres, novum iam tum miraculum, " iuvenis uxorius: sed, ut res est, mente praesaga omnibus te verecundiae " observationibus imbuebas, talem postea ducturus uxorem „ (*ibid.*, 4). In queste parole il Seeck (*op. cit.*, p. 442) volle trovare la notizia di un matrimonio contratto da Costantino, all'uscire dalla puerizia (quindi circa a quattordici anni), il quale non potrebbe essere l'unione con Minervina, che l'oratore non avrebbe certamente menzionato. Ma ci sembra che in queste parole non vi sia che un'allusione al fidanzamento di Costantino con Fausta, fatto, com'è detto dopo, nel passo già riferito, mentr'erano ancor fanciulli o quasi. Non sappiamo l'età di Fausta; ma se Costantino nacque, come pare, verso il 280, egli stava appunto per uscire dalla puerizia, allorchè suo padre divenne il Cesare di Massimiano (293). Ora è probabilissimo che i legami di famiglia fra l'Augusto ed il Cesare, stabiliti subito col matrimonio di questo con Teodora, figliastra del primo, si volessero, poco dopo, rinserrare ancora con gli sponsali fra la vera figlia di Massimiano e il figlio di Costanzo. Perchè il matrimonio non fu celebrato che nel 307 per saldare l'alleanza fra Costantino e Massimiano? A tale domanda non si può dare risposta.

(1) La morte di Crispo avvenne nel 326, secondo i *consul. Const.*, e, pare, verso il luglio (Tillemont, t. IV, p. 650). Il *Chron. pasch.* (le cui date sono meno sicure) la pone nel 325. Non sembra sia stato un lungo intervallo fra l'uccisione di Crispo e quella di Fausta; onde, probabilmente, quest'ultima perì nello stesso anno 326. San Girolamo (*Chron.*, ad a.) assegna la data del 329.

Il Ranke (*Weltgeschichte*, t. III, p. 521, nota 1), lo Schultze (*Zeitschr. für Kirchengesch.*, VIII, 1886, p. 541), il Görres (*Zeitschr. für wissenschaftl. Theologie*, XXX, 1886, p. 373) negarono la morte violenta di Fausta, credendola menzionata come viva nel 340 in un'orazione funebre greca recitata, dicesi, in quell'anno, per la morte di Costantino II. Ma questa μονῳδία si riferisce ad altro principe di gran lunga posteriore. Vedi Hettner, nella *Westdeutsche Zeitschrift für Geschichte und Kunst*, VII, 1888, p. 131, nota 30.

e Costante, il primo nel 316 (1), il secondo nel 317 (2), il terzo nel 320 o nel 323 (3).

Nulla di più naturale che credere questi tre figli nati da Fausta: plausibile altresì la supposizione che la causa dell'aver questa istigato il marito contro Crispo non sia stata quella leggendaria, che di lei fa una nuova Fedra (4), ma la predilezione per i proprii figliuoli e quindi la gelosia verso il figlio di Minervina, nel fiore della gioventù e, come sembra, intelligente e valoroso (5).

Della madre di Costantino il giovane, di Costanzo e di Costante parlano due soli scrittori antichi (lasciamo per il mo-

---

(1) Aurelio Vittore (*Epit.*, XLI, 4) e Zosimo (II, 20) dicono che quando fu fatto Cesare, il 1° di marzo 317, era nato da pochissimo tempo (" iisdem diebus natum „ οὐ πρὸ πολλῶν ἡμερῶν ... τεχθέντα). Siccome nei fasti di Polemio Silvio al 7 di agosto è segnato il *natalis Constantini minoris* (*C. I. L.*, I, 2ª ed., p. 269), così si è creduto che avesse visto la luce in quel giorno del 316. Ma il 7 di agosto è il natalizio di Costanzo, che si sa, con certezza, esser venuto al mondo nel 317. Dunque siamo liberi di ritardare ancora un poco nel 316 la nascita di Costantino giovane; così rimangono meno lontane dal vero, quantunque non interamente esatte, le espressioni di Aurelio Vittore e di Zosimo. Nel panegirico di Nazario (37) è detto di Costantino Cesare, allora sui quattro anni e mezzo: " iam maturato studio litteris habilis, iam felix dextera fructuosa subscriptione laetatur „. Sotto la forma adulatoria non v'è altro da vedere salvo che il fanciullo già aveva appreso i rudimenti del leggere e dello scrivere; cosa per nulla straordinaria, e quindi restano eliminate le difficoltà trovatevi dal Tillemont (t. IV, p. 638), che però non v' insiste.

(2) Aurelio Vittore (*Epit.*, XLII, 17) lo dice di quarantaquattro anni alla morte verso la fine del 361. Ancor più preciso, Ammiano Marcellino (XXI, 15) aggiunge " et mensibus paucis „. Il giorno della nascita si desume dai fasti di Filocalo: *VII id(us) Aug(ustas) n(atalis) Constantii* (*C. I. L.*, I, 2ª ed., p. 268, cf. p. 255, 302), coi quali perciò si possono correggere quelli di Polemio Silvio (v. la nota precedente) e si può aggiungere la cifra alla c. 10 Cod. Th., *De praet. et quaest.* (VI, 4): " die natali meo Constantii Augusti id. Aug. „.

(3) Eutropio (X, 9) gli dà trent' anni alla morte nel 350: Aurelio Vittore (*Epit.*, XLI, 23) solo ventisette.

(4) Zosimo, II, 29; Zonara, XIII, 2.

(5) Ciò fu già supposto dal nostro Muratori (*Ann. d'Italia*, a. 326). Di tale avviso sono parecchi storici moderni, come il Broglie (*L'Église et l'Empire romain au IVe siècle*, 1ère partie, t. II, p. 99) e il Duruy (*Hist. des Romains*, t. VII, p. 130).

mento i bizantini posteriori): Giuliano e Zosimo. Nei due panegirici in onore di Costanzo II, Giuliano più volte, senza farne il nome, indica chiaramente Fausta, e la dice madre dell' imperatore, di cui tesse l'elogio. Massimiano e Costanzo Cloro sono gli avoli di Costanzo II; essi hanno formato l'imene, da cui egli è nato (1). Sua madre vide la luce a Roma, e vi fu allevata in maniera regale e degna de' suoi discendenti (2). Essa è stata figlia di un imperatore, moglie di un altro, sorella di un terzo, madre non di un solo, ma di parecchi (3). Fino a questo punto le parole di Giuliano, nato da un fratellastro di Costantino e marito di una figliuola di questo, sembrano una testimonianza irrefutabile da far respingere come una strana invenzione quanto riferisce Zosimo, che cioè Costantino II, Costanzo II e Costante non siano figli di Fausta, ma di un'altra donna, fatta perire da Costantino per adulterio (4). Ma Giuliano indebolisce assai il valore delle parole precedenti. Uno dei figli della madre di Costanzo aiutò il genitore combattente contro i tiranni. Un altro sottomise i Goti con la forza delle armi, e procacciò una pace stabile. L'ultimo, alla testa degli eserciti, difese i confini da più di un'invasione nemica sino a che fu vittima di ribelli poco appresso puniti del loro delitto (5). Ecco così accennato incontestabilmente a Crispo, a

---

(1) αὐτοὶ (cioè alcuni popoli orientali) ... φάσι τὴν τήθην ἐπὶ τὸν τοῦ μητροπάτορος τοῦ σοῦ προπέμψαι γάμον, alludendo ad Eutropia, nativa della Siria, che fu sposata da Massimiano, a cui generò Fausta (cf. Aurelio Vittore, *Epit.*, XL, 12). *Or.* I, p. 6 — τὰ δὲ ὑπὲρ τῶν πάππων τῶν σῶν ἐστι μὲν τούτων (le imprese di Claudio Gotico) νεώτερα, λαμπρὰ δὲ οὐ μεῖον ἐκείνων. ἔτυχον μέν γὰρ ἄμφω τῆς ἀρχῆς δι' ἀρετὴν ἀξίω κριθέντε, κ. τ. λ., κοινωνίαν ... τὴν καλλίστην τοῖς αὐτῶν παισὶν ἐπινοήσαντες τῶν σῶν πατέρων τοὺς γάμους ἥρμοσαν. *Ibid.*, p. 7 — ὁ ... τῆς μητρὸς πατὴρ τὴν Ῥώμην διῴκει καὶ τὴν Ἰταλίαν, καὶ τὴν Λιβύην τε ἐπ' αὐτῇ, καὶ Σαρδὼ καὶ Σικελίαν. *Or.* II, p. 51.

(2) ἡ μὲν βασιλεύοσα τῶν ἁπάντων πόλις ... τεκοῦσα τὴν σὴν μητέρα καὶ θρεψαμένη βασιλικῶς καὶ τῶν ἐσομένων ἐγγόνων ἀξίως. *Ibid.*, p. 5.

(3) *** τοῦ ... παῖδα, γαμετὴν δὲ ἑτέρου, καὶ ἀδελφὴν ἄλλου (cioè di Massenzio), καὶ πολλῶν αὐτοκρατόρων οὐχὶ δὲ ἑνὸς μητέρα. *Or.* I, p. 9.

(4) ἐτέχθησαν δὲ οὗτοι οὐκ ἀπὸ Φαύστης τῆς τοῦ Ἑρκουλίου Μαξιμιανοῦ θυγατρὸς, ἀλλ' ἐξ' ἄλλης, ᾗ μοιχείας ἐπαγαγὼν μέμψιν ἀπέκτεινεν. *Hist.*, II, 39.

(5) ὧν ὁ μέν τις τῷ πατρὶ συγκατειργάσατο τὸν πρὸς τοὺς τυράννους πόλεμον, ὁ δὲ τὴν πρὸς τοὺς Γέτας ἡμῖν εἰρήνην τοῖς ὅπλοις κρατήσας ἀσφαλῆ παρεσκεύασεν, ὁ δὲ ἐτήρησεν ἄβατον τοῖς πολεμίοις τὴν χώραν, αὐτὸς ἐπιστρατεύων ἐκείνοις πολλάκις, ἕως ἐπέτρεπον οἱ μικρὸν ὕστερον τῶν εἰς ἐκεῖνον ἀδικημάτων δίκην ὑποσχόντες. *Or.* I, p. 9.

Costantino giuniore, a Costante. La madre di Crispo è stata Minervina. Perchè Giuliano lo enumera coi figliuoli di Fausta? È possibile in lui una tale ignoranza della storia della propria famiglia? (1).

A favore di Zosimo vi è un' iscrizione dedicata dagli abitanti di Sorrento a Fausta, il cui nome è stato martellato, ma tuttavia se ne discernono ancora le traccie, come si discernono quelle della parola *uxori,* che precede il nome di Costantino, e, dopo gli attenti esami del Mommsen e del von Duhn, anche quelle della parola *novercae,* innanzi ad un nome, pure eraso (e questa volta compiutamente), ed ai nomi di Costantino giovane e di Costanzo. Il nome eraso in tal luogo non può essere che quello di Crispo, il quale, allorchè è insieme col nome degli altri Cesari, sempre li precede (2). Ecco questa iscrizione:

*piissimae ac venerari* | *li d*(*ominae*) *n*(*ostrae*) *Faustae Aug*(*ustae*) *uxori d*(*omini*) *n*(*ostri*) *maximi* | *victoris Aug*(*usti*) | *Constantini, no*[*v*]*uer*[*cae*] (sic) (*dominorum nostrorum*) (3) [*Crispi*] *Constantini, Constanti*(*i*) *baea* | *tissimorum* (sic) [*Caesarum*] | [*re*]*s p*(*ublica*) *S*[*urrentin*]*or*(*um*) (4).

Il Mommsen, annotando questo titolo importantissimo per la nostra questione, ricordò quanto Zosimo afferma della madre dei tre ultimi figli di Costantino, e ricordò pure che Valeria,

(1) Il Tillemont (t. IV, p. 624), che nega l'affermazione di Zosimo, notando come la fine della presunta madre dei tre figli di Costantino è la stessa di Fausta, citando Osio (in Sant'Atanasio, *Hist. Arian. ad mon.*, 44) e Sant'Atanasio (op. cit., 64), che dicono Costanzo nipote di Massimiano, persecutore dei cristiani, e finalmente traendo in campo Giuliano, aggiunge però questa prudente osservazione: " son témoignage seroit plus fort s'il " n'y joignoit pas Crispe, soit qu'il confonde la belle mère avec la mère, " soit qu'il ne sceust pas assez l'histoire de sa famille, ce qui seroit bien " étrange ".

(2) De Ruggiero, *Diz. epigr.,* vol. II, p. 654.

(3) Nella lapide *ddd. nnn.*; quindi tre debbono essere i nomi che seguono.

(4) *C. I. L.*, X, n. 678 e p. 1006. Ivi sono riferite le lezioni antecedenti ed i tentativi di restituzione. Vedi anche Dessau, *Inscr. sel.,* n. 710.

figliuola di Diocleziano e moglie di Galerio, essendo sterile, adottò Candidiano procreato, dopo le sue nozze, da altra donna al marito (1). Egli quindi ammise come possibile che altrettanto sia stato fatto da Fausta; crede non faccia ostacolo l'aver Giuliano dato Massimiano per avo materno a Costanzo; imperocchè, secondo lui, con non miglior diritto lo stesso Giuliano colloca Costanzo fra i discendenti di Claudio Gotico (2).

Che Fausta sia stata matrigna, non madre, dei figli di Costantino è detto chiaramente dall'epigrafe sorrentina. Essa o sterile affatto come Valeria, o priva soltanto di prole maschile (nulla sappiamo intorno alla madre delle figlie di Costantino), ha dovuto adottare i figli procreati al marito da altre donne, e non solo Crispo, nato prima delle sue nozze, ma anche quelli, che videro la luce dopo di queste.

La facoltà dell' adozione dei figliastri, concessa qualche anno prima alle donne per consolarsi della perdita dei proprii figliuoli (3), si estendeva, con tutta probabilità, anche alle donne sterili. A rigor di diritto, i figli adottati da Valeria e da Fausta erano *spurii,* epperò non potevano neppure essere tenuti come figli dei loro mariti, salvo Crispo, nato da un concubinato propriamente detto. Ma è possibile che, almeno abusivamente, la loro condizione fosse quella di *liberi naturales,* cioè dei generati nel concubinato. Una costituzione di Costantino, del 326, proibisce di tenere presso di sè una concubina durante il matrimonio (4): ora ci pare che questo divieto non si debba riferire soltanto a semplici *paeleces,* ma piuttosto a qualche abuso di attribuire a donne sì fatte la condizione di concubina nel senso legale della parola. Come concubina fu forse tenuta da Galerio la madre di Candidiano, con tal nome chiamata da Lattanzio o da chi è stato l'autore del libro *de mortibus persecutorum;* ugual trattamento ha potuto avere la madre di Costantino gio-

---

(1) “ Candidianum quem Valeria ex concubina genitum ex sterilitate “ adoptaverat „. *De mort. pers.,* 50. Egli aveva nove anni nel 305 (*ibid.*, 20): era nato quindi dopo il matrimonio del padre con Valeria celebrato nel 293.

(2) τά γε μὴν τῆς ἡμέτερας ξυγγενείας ἤρξατο μὲν ἀπὸ Κλαυδίου. *Or.* II, p. 51. Cf. *Or.* I, p. 6; *Caes.,* p. 313.

(3) C. 5 (Diocleziano e Massimiano, del 291) C. I., *De adopt.* (VIII, 8).

(4) “ Nemini licentiam concedatur constante matrimonio concubinam “ penes se habere „, c. 1 C. I., *De concubinis* (V, 26).

vane, di Costanzo e di Costante, che seguiva l'imperatore ne' suoi viaggi, siccome si può argomentare dal tempo e dal luogo della nascita dei due primi (1).

Costantino più tardi ha proibito ciò che egli aveva fatto: anzi egli, frutto di un concubinato, egli che ad un vero concubinato doveva il suo figlio maggiore, si mostrò poi contrario a tale unione, e sancì disposizioni per restringerla (2). Fu cagione di ciò l'essere penetrati nel suo animo nuovi sentimenti dovuti al fortificarsi dell'influenza del cristianesimo? Quello che pare molto probabile si è ch'egli abbia riconosciuto e poi fatto adottare dalla moglie i suoi figli naturali per assicurare la successione al trono. Quattordici secoli dopo, in tempi ben diversi, Luigi XIV faceva dichiarare abili a succedere e riconoscere come principi del sangue i figli generatigli dalla marchesa di Montespan, doppiamente adulterini, perchè, alla loro nascita, tanto il padre quanto la madre erano vincolati da matrimonio con altre persone.

Zosimo adunque è nel vero nell'asseverare che i tre successori di Costantino non erano figli dell'imperatrice: si può dubitare soltanto se nella notizia della condanna della loro madre per adulterio sia da trovare un nuovo atto di crudeltà di Costantino, o piuttosto una confusione con la fine di Fausta. Ma se Zosimo è esatto, Giuliano neppure non commette uno sbaglio, davvero stranissimo per lui, nel dir Fausta madre di Costanzo e de' suoi fratelli. Legalmente, ufficialmente essa era la madre di tutti i figli di Costantino e quindi anche di Crispo. Ed ecco inteso altresì il perchè dell'apparente errore di Giuliano nel dare a questo la stessa madre di Costantino II, di Costanzo e di Costante. E sempre perchè parla il linguaggio ufficiale, e non per errore, Giuliano fa di Costanzo II un discendente di Claudio Gotico, benchè non questo imperatore, ma un suo fratello sia

---

(1) Costantino giovane nacque ad Arelate (Aurelio Vittore, *Epit.*, XLI, 4; Zosimo, II, 20), come si è detto, nella seconda metà del 316. In quel tempo Costantino era nella Gallia, alla metà di agosto ad Arelate (cf. la cronologia del Codice Teodosiano in principio del volume I dell'edizione del Gotofredo, p. XII). Costanzo vide la luce il 7 di agosto dell'anno seguente nell'Illirico (Giuliano, *Or.* I, p. 5): verso tal tempo Costantino era in quella regione (cronol. cit., p. XIII).

(2) Mayer, *Das römische Konkubinat*, Leipzig, 1895, p. 128 e segg.

stato l'avo materno di Costanzo Cloro (1). Un anonimo panegirista di Costantino parla della discendenza di questo principe da Claudio (2); le iscrizioni ufficiali chiamano lo stesso Costantino nepote del Divo Claudio (3) e pronepoti i suoi figliuoli (4).

Che Fausta poi ufficialmente fosse la madre dei tre principi, ed essi perciò nepoti di Massimiano, risulta ancora dalle medesime iscrizioni, in cui a loro è attribuita quest'ultima qualità insieme con quella di nepoti di Costanzo Cloro (5). Tale qualità poi di nepoti di Massimiano deriva dalla madre, non dall'essere stato Costanzo Cloro adottato da Massimiano al suo inalzamento all'ufficio di Cesare, poichè allora avrebbero dovuto dirsi non *nepoti*, ma *pronepoti* di quest'ultimo (6), ed una volta indicata la discendenza fittizia da Massimiano per parte del padre Costantino, non vi era più ragione per far entrare pure quella reale (o quasi) da Claudio Gotico. Costantino, in una serie di milliarii della Narbonese, in cui è detto nepote di Mas-

---

(1) Trebellio Pollione, *Claud.*, 13. Cf. Eutropio, IX, 22: " Constantius " per filiam nepos Claudii traditur „; Anonimo Valesiano, I, 1: " Constantius " Divi Claudii optimi principis nepos ex fratre „.

(2) *Pan. Constantino Augusto* (VII), 2. Cf. *Inc. grat. actio Constant. Aug.* (VIII), 2, 4.

(3) Iscr. dell'*aqua Virgo* (*Bull. della comm. arch. com. di Roma*, 1881, p. 197); iscr. onoraria di Ravenna (*C. I. L.*, XI, n. 9).

(4) Milliarii di Costanzo II (*C. I. L.*, II, n. 4844; III, n. 3705) e di Costante (*C. I. L.*, II, n. 4742=6209).

Propriamente, tenuto conto del grado nella linea, Costantino avrebbe dovuto dirsi *pronepos* di Claudio e i suoi figli *abnepotes*. Questo ultimo vocabolo è usato in un'iscrizione di Celeia dedicata ad un figlio di Costantino, ancor Cesare, il cui nome è stato eraso, e probabilmente è quello di Costantino II. Potrebbe anche essere quello di Costante, cancellato nei monumenti per ordine di Magnenzio (*C. I. L.*, III, n. 5207). Di essa si ha l'uguale in onore di Costanzo, mutilata però in fine (*ibid.*, n. 5208).

(5) Nella prima delle epigrafi citate di Celeia: *nepoti M. Aureli(i) Maximiani et Fl(avii) Constanti(i) Divorum* (*C. I. L.*, III, n. 5207). Le stesse parole si hanno in quella di Costanzo II (n. 5208). Nel milliario di Costanzo II, *C. I. L.*, III, n. 3705, cf. 10717: *Divorum Maximiani et Constantii nepos*; nel milliario dello stesso *C. I. L.*, II, n. 4844: *Flavii Co[n]s[tan]ti(i) et Valeri(i) Maxim[iani nep(oti)]*; con questo si può integrare la lezione dell'uguale epigrafe del milliario di Costante, *ibid.*, n. 4742.

(6) Si noti in *C. I. L.*, III, n. 5207: *nepoti M. Aurelii Maximiani et Fl. Constantii Divorum et Divi Claudii abnepoti*: i due primi sono adunque nel medesimo grado.

simiano (1) e che appartengono al tempo, nel quale fu amico di Massimiano, cioè nel 307 e per poco dopo (2), non accenna alla discendenza da Claudio, che, siccome già bene fu avvertito dal Dessau (3), non fu tratta innanzi se non dopo la caduta dell'Erculio.

Rimane una difficoltà. Perchè l'iscrizione, con cui i Sorrentini vollero onorare Fausta, chiama costei *noverca* e non *mater*, come avrebbe dovuto dirsi in un documento ufficiale? L'iscrizione, che ha i nomi dei tre Cesari Crispo, Costantino e Costanzo, è posteriore all'8 di novembre 324, in cui l'ultimo fu fatto Cesare, ed anteriore alla caduta di Crispo verso la metà del 326. Non è forse da supporre che l'adozione dei figli del marito sia stata fatta da Fausta dopo la dedicazione di questa lapide, e quindi di poco abbia preceduto la morte di Crispo, nelle cui iscrizioni finora non occorse il titolo di nepote di Massimiano? Questo titolo per i figli di Costantino, ancor Cesari, non si ha che in due sole iscrizioni uguali dedicate l'una a Costanzo, l'altra probabilmente a Costantino giovane (4); non lo abbiamo, con certezza, in quelle di Costante, fatto Cesare soltanto nel 333. Non è troppo ardire il supporre eziandio che tale titolo, adoperato dai due primi solo per breve tempo, fosse taciuto dopo la catastrofe di Fausta e ripreso soltanto dopo la morte del genitore, allorchè lo vediamo usato anche da Costante Augusto? (5).

La tradizione che Fausta sia la madre di tutti i figli di

---

(1) *M. Aur(elii) Val(erii) Maximiani Aug(usti) nepoti*. Queste parole si hanno, più o meno guaste, nei milliarii: *C. I. L.*, XII, n. 5425, 5443, 5465, 5470, 5490, 5540, 5555. Cf. 5508, 5512. A questa indicazione segue: *Divi Constantii Augusti pii filio*.

(2) In questi milliarii Costantino ha il titolo di Augusto, conferitogli da Massimiano, al tempo del matrimonio con Fausta (307). Il nome di Massimiano poi è stato martellato, dopo la morte di questo principe (310).

Può sorridere, a primo aspetto, l'idea che Costantino siasi detto nepote di Massimiano, riconoscendo per madre adottiva la figliastra di questo imperatore, Teodora, sposata da Costanzo Cloro. Se così fosse, si avrebbe una analogia coi titoli dei figliuoli; ma l'interpretazione più razionale della discendenza da Massimiano sta nell'adozione di Costanzo Cloro fatta da quest'ultimo.

(3) *Hermes*, XXIV, 1889, p. 349 e seg.

(4) *C. I. L.*, III, n. 5207, 5208.

(5) Vedi p. 385, nota 5.

Costantino dura presso gli storici bizantini. La troviamo in Teofane, nel secolo VIII (1), insieme con quella della discendenza in linea retta di Costantino da Claudio Gotico (2). Zonara, quattro secoli dopo, attingendo da fonte sconosciuta e perduta il libro XIII de' suoi *Annali* (3), distingue la madre di Crispo da quella degli altri figliuoli: la prima è una concubina, di cui tace il nome, la seconda è Fausta (4).

Le figlie di Costantino, conosciute dalla storia, sono due: Costantina (5), che fu moglie, in prime nozze, del cugino germano Annibaliano, in seconde di un altro cugino germano, Costanzo Gallo; Elena, che andò sposa a Giuliano, fratello di quest'ultimo. Teofane confonde le due sorelle in una sola, che chiama con l'uno e l'altro nome, e dice nate da Fausta (6). Zonara non parla che di Elena, collocandola parimente fra la prole dell'imperatrice (7).

Tali notizie per noi non possono avere valore assoluto: hanno quello tuttavia di mostrare queste principesse nate prima del 326 (8), il che per Costantina si sarebbe potuto anche ar-

---

(1) Ὁ δὲ μέγας Κωνσταντῖνος ἐκ Φαύστας θυγατρὸς Ἑρκουλίου γεννᾷ: Κρίσπον, Κωνσταντῖνον, καὶ Ἑλένην γαμετὴν Ἰουλιανοῦ τοῦ παραβάτου, Κωνστάντιον, Κώνσταντα. *Chronogr.*, p. 15.

(2) ὁ δὲ Κωνστάντιος ... θυγατρίδους ἦν Κλαυδίου τοῦ βασιλέως. Pag. 8.

(3) Krumbacher, *Gesch. der byzantinischen Literatur*, 2ª ed., München, 1897, p. 373.

(4) Υἱοὺς δ' ἐκ Φαύστας τῆς τοῦ Μαξιμιανοῦ θυγατρὸς... ἐγείνατο τρεῖς, Κωνσταντῖνον, Κωνστάντιον καὶ Κώνσταντα, καὶ θυγατέρα Ἑλένην, ἣ τῷ Ἰουλιανῷ συνῴκησεν ὕστερον. εἶχε δὲ καὶ ἐκ παλλακῆς υἱὸν ἕτερον, Κρίσπον καλούμενον, τῶν ἄλλων αὐτοῦ υἱέων πρεσβύτερον. *Ann.*, XIII. 2.

(5) Così la chiama Ammiano Marcellino (XIV, 7; XXI, 1). Zosimo (II, 45), Pietro Patricio (p. 130, ed. di Bonn), Filostorgio (III, 28; IV, 1), il *Chronicon paschale* (a. 350) hanno: Κωνσταντία; l'Anonimo Valesiano (VI, 35): *Constantiana*.

(6) Κωνσταντίνα, ἡ καὶ Ἑλένη, ἡ Κωνσταντίου ἀδελφή (p. 37). Costanzo dà in moglie a Giuliano τὴν ἰδίαν ἀδελφὴν Ἑλένην τὴν καὶ Κωνσταντίαν (p. 38). Anche erratamente sono enunciati i figliuoli di Costanzo Cloro (p. 15).

(7) Vedi nota 4.

(8) Nello stemma genealogico di Costantino, dato da Teofane e riferito nella nota 1, Elena è collocata fra Costantino II e Costanzo. L'uno venne al mondo nel 316, l'altro nel 317, e quindi o supporla nata ad un parto col primo o col secondo, o trasportarla di posto.

gomentare dall'anno del suo primo matrimonio, che è il 335 (1). Può darsi che anch'esse fossero state generate dalla donna, che diede la vita a Costantino II, a Costanzo ed a Costante, e quindi, coi fratelli, fossero pure state adottate da Fausta.

Di una terza figlia di Costantino, Costanza o Costantina, rimasta vergine, non è memoria che in racconti leggendarii, tardi e senza alcun valore (2).

---

(1) Il matrimonio e l'inalzamento di Annibaliano hanno dovuto avvenire nel medesimo tempo (" Annibalianum, data ei Constantiana filia sua, " regem regum et Ponticarum gentium constituit ". Anonimo Valesiano, VI, 35).

(2) Una lettera apocrifa di Sant'Ambrogio (Migne, *Patrol. Lat.*, t. XVII, p. 735 e segg.), gli atti di Sant'Agnese, dei Santi Giovanni e Paolo, ecc. raccolti negli *Acta Sanctorum*, februarii t. III, p. 67 e segg. (Cf. Tillemont, *Hist. des emp.*, t. IV, p. 624, che nega l'esistenza di questa Costanza). Essa, guarita miracolosamente da Sant'Agnese, si sarebbe consacrata a Dio ed avrebbe fondato la basilica in onore di questa Santa sulla via Nomentana, presso cui trovasi la chiesa detta di Santa Costanza, mausoleo dell'età costantiniana, guastato da restauri del secolo XVII e del nostro, da cui fu levata, nel 1788, la celebre arca di porfido portata nel museo Pio Clementino (Visconti, *Museo Pio Clem.*, t. VII, p. 57 e segg.: egli fa osservazioni per combattere il Tillemont. Cf. Bartolini, *Gli atti della nobilissima vergine romana S. Agnese*, Roma, 1858, p. 89 e segg.). Nella basilica di Sant'Agnese fu trascritta, prima del secolo VII e forse anche del VI, un'iscrizione metrica acrostica in elogio di una *Constantina Deum venerans Christoque dicata*, fondatrice della basilica (De Rossi, *Inscr. christ.*, vol. II, p. 44). Sappiamo che Costantina, moglie di Gallo, e la sorella Elena furono sepolte sulla via Nomentana (Ammiano Marcellino, XXI, 5). È probabile che la Costantina della iscrizione sia la nota figlia di Costantino, seppellita presso la basilica, la cui costruzione può essere opera sua od a lei attribuita. Vuolsi vedere nell'espressione *Christo dicata* un'allusione alla verginità di Costantina: anche ammettendo tale allusione, essa non è strana in un'epigrafe composta più tardi. La fantasia poi, lavorando intorno a questa figlia dell'imperatore Costantino, ne ha potuto fare la leggendaria Costanza degli agiografi.

# LUIGI SCHIAPARELLI

Commemorazione letta dal Socio CARLO CIPOLLA.

Dopo sessant'anni durati nell'insegnamento, dopo una vita più che ottantenne spesa nel lavoro non interrotto, serenamente morì il nostro Socio residente Prof. Luigi Schiaparelli, addì 19 febbraio 1897, in Torino. Ho parlato di lui all'Università dinanzi ai giovani, che gli furono discepoli affezionati (1); mi è cosa grata ricordarlo anche qui, dov'egli passò, studiando, molte fra le più belle e le più proficue ore della sua vita.

Egli nacque il 16 novembre 1815 in Occhieppo inferiore, da una famiglia di piccoli industriali. Frequentando l'Università di Torino, fu discepolo prediletto del Paravia, nome che io ripeto con qualche sentimento di predilezione, poichè fu una gloria che l'Ateneo Torinese ricevette dalla regione, che a me pure fu patria. Lo Schiaparelli spese tutta intera la vita nella educazione della gioventù, prima nelle scuole secondarie, quindi, dal 1852, nelle aule della nostra Università. Una sì lunga serie di anni impiegati nell'officio di maestro, forma già di per sè un motivo d'onore. Il lungo insegnamento, e la moltiplicità dei libri dedicati alla scuola, ci spiegano l'efficacia che egli ebbe nella educazione dei giovani professori piemontesi, nel periodo, arduo per molti rispetti, in cui la vita del *piccolo paese posto appiè delle Alpi* si fondeva nella vita della nazione italiana.

(1) L'ultimo attestato che gli scolari resero al loro maestro, è l'affettuosissima lettera di condoglianza, che tre giorni dopo della sua morte essi hanno indirizzato al prof. Ernesto Schiaparelli, suo figlio. Veggasi *La tribuna biellese* del 25 febb. 1897, dove l'indirizzo dei giovani fa seguito ad una lettera del Rettore dell' Università.

La maggior parte dei suoi libri scientifici si riferisce alla storia dell'Oriente.

Lo Schiaparelli, senza rifuggire dagli scritti di indole monografica, preferì tuttavia quelli d'indole sintetica. Ciò può dirsi di tutte le forme in cui si esplicò la sua attività come scrittore; ma vale particolarmente per la storia dell'Oriente. Su cotale campo mirò sopratutto a questo scopo, di far conoscere, in modo assommato e conciso, i migliori risultati della scienza straniera. Era uno scopo che richiedeva in colui, che se lo proponeva, la conoscenza delle lingue moderne, e il buon criterio nella scelta dei libri da consultarsi, e dei fatti da preferirsi, come meglio accertati.

A tutti è noto quanto, puranco ai giorni presenti, la storia orientale antica sia poco curata in Italia. Scarseggiamo di opere di carattere monografico, e manchiamo poi quasi del tutto di libri riassuntivi e sintetici. Fra le più recenti nostre pubblicazioni, quale è quella che possa convenientemente paragonarsi, per citare un esempio, ai compendî della storia orientale antica di Francesco Lenormant e di Maspero, di cui si vanta la Francia?

Anche oggidì noi siamo molto addietro su questo campo. Che dire poi della condizione in cui questi studî trovavansi fra noi 30 o 40 anni or sono! Ed è pure cosa chiara e sicura, che per intendere, secondo verità e giustizia, il valore delle pubblicazioni che in questo campo fece lo Schiaparelli, dobbiamo trasportarci in tempi da noi ormai molto lontani, allorchè gli studi di oltralpe passavano quasi inosservati dai nostri connazionali. E ciò può dirsi in modo particolare per alcune regioni d'Italia, tra le quali era compreso il Piemonte. Il Piemonte, conservando integro il sacro deposito delle sue antiche tradizioni, sentiva allora in misura molto moderata l'influenza della scienza tedesca ed inglese. Forse questa circostanza potè giovare a sostenere e nutrire il pensiero dell'indipendenza politica. Ma non certo riuscì profittevole al progresso degli studi. Lo Schiaparelli fu tra coloro che si resero benemeriti per avere aperto le fonti dell'erudizione straniera, a rinnovare la cultura nostrana. Vorrei quindi, sotto di questo rispetto, collocarlo accanto a Cesare Balbo. Fra i meriti del Balbo, considerato come storico, questo non è forse tanto apprezzato dalla comune degli studiosi, di avere cioè portato

nuovo alimento alle ricerche sulla storia del medioevo, diffondendo in Italia i risultati a cui erano giunti gli investigatori tedeschi.

Tiene il posto principale tra le pubblicazioni che lo Schiaparelli fece nel campo testè indicato, la *Storia orientale antica*, ristampata più volte. La 6ª edizione uscì a Torino nel 1874 ed è dedicata *alla memoria di Amedeo Peyron*, il quale, in una lettera fatta pubblica, aveva dimostrato di molto apprezzare quell'opera. In questo libro, nel quale lo Schiaparelli intese di armonizzare gli insegnamenti della Bibbia coi risultati della scienza moderna, egli parlò anzitutto delle origini dell'umanità, per venire poi a discorrere diffusamente dell' Egitto, e quindi degli imperi di Ninive e di Babilonia. Della storia dell' Egitto egli si dimostra sopratutto ammiratore, e diffonde nel suo libro l'ardente entusiasmo di cui in quegli anni erano pieni gli studiosi. Gli entusiasmi delle prime scoperte, oggi chi può sentirli più, mentre ormai la storia e la letteratura egiziana vengono trattate, fatte le debite proporzioni, alla stregua della storia e della letteratura di Grecia e di Roma?

Ma io sono vecchio abbastanza per aver potuto provare io pure qualche scintilla, che mi pervenìa di riflesso, del calore entusiastico, col quale un tempo accoglievansi i risultati delle scoperte egiziane. E per questo motivo sento il bisogno di lodare nello Schiaparelli la moderazione e la tranquillità d'animo, sicchè in questo suo volume indarno ritroveremo quelle esagerazioni, che sono, a dir così, inseparabili, nei primi periodi di una scienza fanciulla.

Il mio illustre e sempre compianto maestro, Prof. G. De Leva, nel suo apprezzabilissimo *Compendio della storia dei popoli antichi* fece assaporare agli Italiani alcun che dei risultati della scienza forestiera, e dare a questi la nostra cittadinanza. Ma il De Leva, in un libro il cui fine era strettamente scolastico, si mantenne entro confini rigorosamente segnati e molto ristretti. Lo Schiaparelli potè allargare il suo discorso dippiù, e pronunciare i nomi e citare ed esaminare le opere di Champollion, di Mariette, di Lepsius, di Rawlinson, di Duncker, di Hincks, di Oppert, di Brugsch, ecc., ponendo loro accanto il nome e le opere del nostro grande Rosellini.

Insieme colla *Storia orientale antica* va posta la *Storia degli*

*Ebrei,* che ne è quasi la premessa. La 2ª edizione della *Storia degli Ebrei* uscì a Torino nel 1870, ed è un libro, dice il suo autore, " essenzialmente morale, politico e religioso „. Per struttura, per forma, per sistema, quest'opera molto dappresso corrisponde alla precedente. In ambedue queste opere il rispetto per la Bibbia e l'ardore per la scienza si conciliano insieme.

Questi due volumi dedicati alla narrazione della storia dei principali popoli dell'Oriente, sono libri scientifici e scolastici nel tempo stesso. Così egli raggiungeva il doppio scopo di diffondere fra gli uomini colti le principali scoperte fatte sino al momento in cui egli scriveva, e le opinioni che meritamente allora giudicavansi come più probabili, e di preparare nel tempo stesso le menti dei giovani ad entrare, con passo franco, nel nuovo indirizzo degli studî orientali.

Nel 1876, inaugurando gli studi universitari, lo Schiaparelli parlò " degli ultimi progressi sulla storia dell'Oriente antica „, e in questo discorso rilevo le calde parole rivolte ai giovani, e la dichiarazione che i professori debbono aiutare, senza invidia, i giovani volonterosi (1).

Accennerò qui ancora all'articolo *Sulla circumnavigazione dell'Affrica compiuta dai Fenici nel sec. VII av. Cr.* (" Cosmos „, vol. VI, a. 1881), alle sue *Due lettere sulla grande confederazione dei Cheta* (" Atti Accad. Tor. „, 1885, XX; 1890, XXV), e alla

---

(1) Da una lettera privata del prof. Giovanni Schiaparelli, direttore dell'Osservatorio Astronomico di Milano, trascrivo queste righe, che contengono un invidiabile elogio del modo con cui Luigi Schiaparelli intendeva i suoi doveri quale maestro: " Impressione ... viva mi ha fatto sempre il rispetto affettuoso e la buona memoria, che di lui serbarono sempre i suoi scolari, anche dopo finiti gli studî. A quanti non ha egli steso una mano, quando poteva dar loro efficace aiuto? Io ne sono una prova evidente: se sono andato a concludere qualche cosa [*chi legge correggerà facilmente la modestia dell'insigne scienziato, che è vera gloria italiana*] lo devo a lui, che in anni per me (e anche per lui) durissimi, mi sorresse del suo consiglio, e anche del suo aiuto materiale e morale. Questo lato del carattere suo merita di essere specialmente ricordato, e credo che il vederlo ricordato farà piacere a tutti quelli che in un modo o in un altro furono legati con lui da un debito di riconoscenza „. Rimase nella tradizione universitaria bel ricordo dell'affetto operoso che L. Schiaparelli ebbe per i suoi scolari. Non solo ogni invidia era da lui lontana, ma egli mostravasi sempre volonteroso e presto a dar l'opera sua per il vantaggio dei giovani.

nota *Sull'etnografia della Persia antica anteriore alle invasioni Ariane* (" Atti ,, XXIII, a. 1888). Di questi tre lavori, il secondo è il più esteso, e si riferisce ad un popolo fuggevolmente ricordato dalla Bibbia, ma del quale fino al 1870 null'altro si era mai potuto sapere. Le scoperte moderne e le illustrazioni che esse ebbero fra noi, e assai più in Germania ed in Inghilterra, richiamarono l'attenzione dello Schiaparelli con tanto maggior forza, in quanto esse si connettevano anche alla storia egiziana.

Minor numero di lavori, egli dedicò alla storia d' Italia. Nella Nota accademica intitolata *Una lettura sulla geografia preistorica dell'Italia antica* (" Atti ,, XIX, 1884) egli cercò il vincolo che lega la nostra storia più antica alla geologia.

Nella dissertazione *Le stirpi ibero-liguri nell'Occidente e nell'Italia antica* (" Atti ,, XXXIII, 1880) egli aderì all'opinione che considera come un grandissimo popolo dell'antichità quello degli Iberi e dei Liguri. Ben fece combattendo gli entusiasmi di Atto Vannucci, e di altri, per i Pelasgi. Infatti nella Nota *I Pelasgi nell'Italia antica* (" Atti ,, XIV, 1879) egli fece vedere quanto esagerassero quei dotti, d'altronde assai benemeriti, che tutte le mura ciclopiche attribuivano ai Pelasgi.

Si appella agli studî anatomici, per trarne luce alla questione sulle origini italiche, nelle sue *Lezioni sull'etnografia dell'Italia antica* (" Riv. di filol. ,, VI, 1878). Mi piace fermare l'attenzione sulle sue *Tre letture sul grado di credibilità della storia di Roma nei primi secoli della città* (" Atti ,, XVI, 1881). Egli pensava che la storia primitiva di Roma, quale la tradizione ce la trasmise, non abbia valore per quanto riguarda i fatti storici, ma meriti invece non poca fiducia per rispetto alle istituzioni.

Il pensiero, che informa il citato opuscolo dello Schiaparelli, mi pare che abbia qualche analogia (fatta astrazione dall'uso del materiale archeologico) coi dottissimi tentativi pochi anni or sono fatti da Luigi Adriano Milani, quando chiese ai numerosi pezzi di *aes rude, signatum, grave,* scoperti assieme riuniti in terra umbra, un criterio cronografico e storico per indovinare le vicende naturali, le condizioni politiche e le istituzioni civili di Roma, nei più oscuri periodi della sua storia antichissima.

Il Milani (" Riv. Numism. ,, IV [1891], p. 28) scriveva: " Abbiamo nelle più antiche monete romane i documenti con-

temporanei della storia di Roma: le narrazioni de' più accreditati annalisti e dei nostri antichi poeti nazionali vengono, in massima, confermate, come in un Codice di Stato e in una Cronaca contemporanea: gli errori, che sono negli annalisti, vengono in parte corretti, e le lacune, in parte, perfettamente riempite „.

Lo Schiaparelli seguì una via di mezzo tra i conservatori e gli scettici. Rimase lontanissimo dalla via antica, battuta, con troppa tenacia, da Atto Vannucci. Neppure seguì l'indirizzo del Bonghi, il quale nella sua *Storia di Roma* fece parte troppo larga al coordinamento della così detta tradizione. A giudicarne specialmente dalle pagine uscite postume nel 1896, il Bonghi presta fede, se non ai particolari, almeno al nocciolo della leggenda sui re. Peraltro, meglio che ai fatti politici e militari, egli pure è inclinato a dar valore ai fatti giuridici.

D'altra parte lo Schiaparelli si mantenne lontano dal scetticismo assoluto, da taluni riguardato come eccessivo, che di questi giorni ci viene insegnato da un fortissimo ingegno, onore degli studi in Italia, Ettore Pais. Nel 1° volume, testè uscito (Torino, 1898), della sua *Storia di Roma* (p. 623), opera dotta e geniale, la prima che nel suo genere sia stata pensata fra noi, egli scrive: " Chi, allo stato attuale della critica, accettasse come vere tali narrazioni, non dovrebbe negar fede ai cronisti fiorentini allorchè favoleggiavano *dei Trojani di Fiesole e di Roma* „.

Opinioni consimili a quelle espresse nelle citate *Tre letture,* lo Schiaparelli sostenne pure nell'articolo *Sull'origine della storia romana nei primi secoli della città* (" Atti Accad. „, XVII, 1882). Qui nega a Niebuhr che la storia di Roma più antica abbia per fondamento una fioritura epica di carattere popolare; nega a Guglielmo Schlegel che l'incendio gallico abbia annientata la tradizione storica di Roma primitiva. Non si sarebbe quindi trovato d'accordo col Pais, che ammette invece e sostiene tale annientamento completo. Quanto a me, mi limito a dire, che citando l'opinione del Pais in contradditorio a quella dello Schiaparelli, non intendo asserire ch'essa sia, sotto tutti i rispetti, la vera.

Lo Schiaparelli non trascurò di coltivare in qualche modo anche la storia medioevale. Edrisi, nel libro geografico che compose per compiacere a re Ruggiero II, parlò dell'Italia, e

a tale descrizione si riferisce la Nota accademica che si intitola *L'Italia descritta nel libro del re Ruggero compilato da Edrisi* ("Atti Accad. „ XVIII, 1883).

Nel 1888 stampò negli " Atti dell'Accademia di Torino „ (vol. XXIV) una relazione sul materiale di storia Biellese raccolto da Q. Sella. La dissertazione dello Schiaparelli si intitola: *Sulle memorie storiche del comune e sugli statuti della repubblica di Biella raccolte e ordinate e in parte pubblicate da Quintino Sella.*

Di questo ricchissimo materiale storico, che si compone di documenti biellesi d'ogni fatta, dal sec. XI in poi, egli dà relazione abbastanza particolareggiata, fermandosi con speciale predilezione a parlare degli Statuti, che spettano al secolo XIII e al successivo.

Non avrei reso piena notizia dei meriti scientifici del nostro Socio perduto, se non ricordassi anche quello che egli fece per gli studi geografici. Già fra le pubblicazioni testè ricordate, alcune ne vedemmo, le quali hanno attinenza alla geografia storica. Esse bastano a farci comprendere come nel largo concetto, in cui intendeva la storia, avesse il suo posto anche la geografia. Ma è conveniente accennare anche ai libri di materia strettamente geografica, che egli compose, collo scopo speciale di venire in servizio delle scuole secondarie.

Nè minor valore e minor diffusione ebbero gli atlanti geografici e storico-geografici, alla cui compilazione attese insieme coi due Mayr, zio e nipote.

Così l'opera sua fu giovevole assai alla diffusione di uno studio, che troppo poco si cura oggidì, e meno si aveva in istima nel tempo al quale spetta la massima attività scientifica e didattica dello Schiaparelli.

Della nostra Accademia era Socio da quasi vent'anni. Entrando in queste sale, gloriose per antiche tradizioni letterarie e scientifiche, egli poteva dire a se stesso, che la sua nomina era stata il premio a buon diritto dovuto ad una vita onestamente impiegata in pro degli studi e degli studiosi.

*L'Accademico Segretario*

CESARE NANI.

Torino — VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

# CLASSE

DI

# SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

## Adunanza del 13 Febbraio 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ALFONSO COSSA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

---

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Direttore della Classe, Bizzozero, Spezia, Gibelli, Camerano, Segre, Peano, Volterra, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti e Naccari Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Segretario presenta l'opera del Socio Guareschi, intitolata: *Nozioni di Zoochimica,* di cui l'autore ha fatto omaggio all'Accademia.

Il Socio Gibelli legge la commemorazione di Giulio von Sachs, che fu Socio corrispondente dell'Accademia nella Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale. Questa commemorazione sarà stampata negli *Atti.*

Il Socio Bizzozero, a nome del Socio Mosso, presenta per l'inserzione negli *Atti* una nota del Dott. Zaccaria Treves, intitolata: *Sulle leggi del lavoro muscolare.*

Il Socio CAMERANO presenta una memoria del Dott. Ermanno GIGLIO-TOS, intitolata: *I Trombociti degli Ittiopsidi e dei Sauropsidi.* Verrà esaminata dai Soci CAMERANO e BIZZOZERO.

Il Socio SEGRE presenta una memoria del Dott. Beppo LEVI, intitolata: *Sulle varietà delle corde di una curva algebrica.* Sarà esaminata dai Soci SEGRE e D'OVIDIO.

---

La Classe si costituisce in seduta privata e procede alle seguenti nomine di Soci.

Riescono eletti a Soci nazionali non residenti i signori:

LUIGI BIANCHI, Professore nella R. Università di Pisa,

ULISSE DINI, Professore nella R. Università di Pisa,

CAMILLO GOLGI, Professore nella R. Università di Pavia;

a Soci stranieri i signori:

ROBERTO GUGLIELMO BUNSEN, Professore nella Università di Heidelberg,

ERNESTO HAECKEL, Professore nella Università di Jena,

MARCELLINO BERTHELOT, Professore nel Collegio di Francia e Membro dell'Istituto;

a Soci corrispondenti nella Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia i signori:

AGOSTINO ALESSIO DAMOUR, Professore nella Scuola Nazionale Superiore delle Miniere e Membro dell'Istituto di Francia,

GAETANO GIORGIO GEMMELLARO, Professore nella R. Università di Palermo,

PAOLO GROTH, Professore nell'Università di Monaco (Baviera).

Nella Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale vengono eletti i signori:

Carlo Goebel, Professore nell'Università di Monaco,

Ottone Penzig, Prof. nella Università di Genova,

Simone Schwendener, Professore nell'Università di Berlino,

Giovanni Arcangeli, Professore nella R. Università di Pisa;

nella Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata:

Guglielmo Roux, Professore nell'Università di Halle.

# LETTURE

## JULIUS SACHS

Cenni biografici letti dal Socio GIUSEPPE GIBELLI.

Nacque in Breslau il 2 ottobre 1832 di povera famiglia campagnola, da padre incisore, che per tempo gli insegnò il disegno. Così fu che da giovinetto s'addestrò a copiare oggetti naturali, e si piacque dello studio delle piante, che lo levò in alta fama.

A mala pena potè compiere gli studii classici. Fu ad un punto di entrare nella marina mercantile. Fortunatamente l'amicizia col figlio del celebre PURKINIE gli procacciò la protezione del padre, il quale lo chiamò a Praga come assistente privato e disegnatore. A stento e con fatiche straordinarie di lavori letterarii e disegni di fossili ecc. potè conseguire la laurea dottorale in filosofia. Nel 1857 ottenne la libera docenza in fisiologia vegetale.

Ma a Praga si trovava male. Il KOSTELETZKY, professore di botanica, come già il KÖRBER a Breslavia, lo aveva in uggia; ROCHLEDER, professore di chimica, non si peritava di dichiarargli, che l'argomento della fisiologia vegetale si esauriva in due ore. Gli Czechi fin d'allora avversavano i Tedeschi, e lo ammonivano che se ne andasse.

Ma già nei sei anni di dimora a Praga aveva a lungo meditato, e iniziato i suoi studii sopra diversi quesiti di fisiologia vegetale, costruendo da sè gli apparecchi dimostrativi.

Per buona ventura il zoologo STAHL e il chimico STÖCKHARDT seppero apprezzare la vigoria del suo ingegno e gli pro-

curarono il posto di assistente di fisiologia vegetale all'Accademia d'Agricoltura di Tharandt. Quivi ebbe fondamento la sua fama, riuscendo per il primo a dimostrare come si possano benissimo coltivare le piante in adatte soluzioni saline, e condurle a fioritura e fruttificazione.

Nel 1861 fu chiamato professore di botanica all'Accademia di agricoltura di Poppeldorf presso Bonn. Vi stette sei anni e vi compose il suo *Manuale di fisiologia vegetale,* che lo rese subito celebre, e dove espose con mirabile chiarezza una numerosa serie di esperienze ingegnosissime sopra argomenti affatto nuovi, o trascurati, o senza una positiva definizione.

Eppure in quel tempo doveva sopperire del suo alla mancanza di mezzi officiali.

Nel 1867 fu chiamato a Freyburg, dove stette soltanto tre semestri. Passò quindi a Würzburg, d'onde più non si mosse, malgrado gli inviti reiterati a Jena, a Heidelberg, a Vienna, a Berlino, a Bonn e a Monaco dopo Nægeli.

A Würzburg, dove, diceva lui, d'aver trovato una spelonca, lavorava 14 ore al giorno. Ma, com'è naturale, il troppo lavoro gli logorò la salute. *Ogni mio libro,* scriveva, *mi costa un lungo malessere,* sopratutto in grazia del temperamento nervoso ed irritabile.

Amava con trasporto l'insegnamento, e si dava la massima cura perchè le sue lezioni riuscissero dimostrative. Le quali erano smaglianti di chiarezza, e improntate di così persuasivo entusiasmo, da attirare non solo gli scolari d'obbligo ma moltissimi delle altre facoltà.

Frequentarono il suo laboratorio e furono suoi assistenti uomini già attualmente illustri nella scienza: Kraus, Millardet, Baranetzky, Prantl, Darwin figlio, Elfving, Gardiner, Godlewski, Göbel, Hansen, Hauptfleisch, Noll, Pfeffer, Reinke, Stahl, Vines, Devries, Marshall-Ward, Wortmann, Zimmermann, ecc.

Era una figura nobilmente caratteristica di pensatore e di artista. Prediligeva i concetti e le vedute generali: ma apportava la massima esattezza nella misurazione dei fatti e dei fenomeni. Nel che fu vero maestro, introducendo nelle sue ricerche dei processi e degli stromenti affatto nuovi, che ora sono il patrimonio fondamentale dei gabinetti di fisiologia vegetale. E

però considerava un lavoro scientifico malfatto come una azione immorale.

Trovava ingiusto, che mentre le osservazioni di fatti singoli meritassero una citazione come di una proprietà personale per parte dei colleghi, le idee generali fossero considerate come impersonali proprietà del pubblico. Pretendeva che un vero scienziato non solo imparasse quant'era già noto. ma ricercasse e mettesse in luce nuove verità.

Grandissima influenza ebbe sul pubblico botanico il suo *Manuale di Botanica,* che segna una vera epoca, non dirò di rivolgimento di questa scienza, ma di atteggiamento nel modo di considerarla e di studiarla. Sopra il suo tipo furono redatti gli infiniti manuali botanici scolastici, pubblicati di poi. In esso furono divulgate tutte le ricerche di Nægeli e di Hofmeister, e le sue originali, con figure quasi tutte disegnate da lui, e riprodotte in tutti i libri senza suo permesso e con suo dispetto.

Le sue lezioni di *Fisiologia sperimentale* ebbero quattro edizioni tedesche e parecchie in altre lingue, sempre aumentate di nuovi studii.

Intorno alla *Storia della Botanica* lavorò 5 anni. La quale non è un semplice elenco cronologico di Autori di opere: ma un'ordinata e filosofica esposizione dei principii e delle idee che man mano si svilupparono nel campo della Botanica; dimostrando come molte di esse, che parevano fondamentali, erano assurde, altre troppo decantate, altre troppo neglette.

Apprezzava molto gli studii di sistematica, ma era d'avviso che i problemi più elevati di questo campo dovessero essere risoluti dalla Biologia e dalla Fisiologia.

Sachs non può dirsi a rigore il fondatore della Fisiologia vegetale moderna; poichè Ingenhous, Th. Saussure, Liebig, Boussingault e altri ne avevano poste le prime pietre; ma è certamente il più valoroso e originale costruttore di questa scienza, intesa nel senso stretto. cioè non complessivamente coi fatti della Biologia, ma nei rapporti tra la struttura anatomica dei tessuti e i fenomeni di nutrizione.

Sarebbe troppo lungo riassumere soltanto le sue pubblicazioni parziali e originali. che sommano a un centinaio. Esse sono amalgamate nei suoi libri (Manuali, Lezioni, ecc.). Qui non

possiamo che accennare ai fatti nuovi da lui scoperti ed alle escogitazioni le più salienti.

Sachs dimostrò con geniali ed evidenti esperienze che la formazione dell'amido è il prodotto del lavoro d'assimilazione della clorofilla in presenza della luce, come esso passi circolando allo stato in glucosio per rifarsi amido nei tessuti di riserva; d'onde, di nuovo glucosificato, assurga nelle gemme e negli apici vegetativi.

Come dissimo, si deve a lui ed a Stockhardt il processo di coltivazione delle piante entro liquidi nutritizii; processo usufruito di poi per una infinità di ulteriori esperienze fisiologiche ed agricole;

A lui solo la dimostrazione dell'attività secretrice delle radici scorrenti sulla lastra di marmo polita;

Gli studii sullo sviluppo di calore; sui fenomeni dipendenti dalla congelazione nelle piante; sul rapporto tra le fasi di germinazione e la temperatura; sui limiti di rigidezza degli organi irritabili ottenuti con massimi e minimi di temperatura; sulla necessità contemporanea della luce e della temperatura per il rinverdimento, la formazione e lo sbocciamento dei diversi organi della pianta;

Gli studii dell'azione della luce colorata sulle curve eliotropiche; dei raggi ultra violetti sulla formazione dei fiori;

Gli studii delle proprietà fisiche e chimiche del suolo, delle soluzioni saline, della temperatura in rapporto alla traspirazione;

La teoria dell' imbibizione per spiegare il movimento e l'ascensione dell'acqua nelle piante; e il metodo dei sali di litio per misurarne la rapidità;

Lo studio originalissimo sui fenomeni dell' accrescimento terminale, la loro misurazione mediante l'*auxanometro* da lui inventato.

Sachs ammetteva una forza vitale, là dove non era più possibile spiegare i fatti colle leggi fisiche. Ma non ristava dalla ricerca di queste ultime, per trovare la spiegazione principalmente dei *tropismi.*

Malgrado lo spirito positivo ed analitico delle sue ricerche, Sachs si abbandonava volontieri alle costruzioni sintetiche, più o meno teoretiche. E però negli ultimi anni escogitava le ragioni causali tra l'accrescimento ortotropo e la struttura radiale

da una parte; l'accrescimento plagiotropo e la struttura dorsiventrale dall'altra;

I rapporti probabili tra i materiali componenti e le forme degli organi.

Delle teorie Darwiniane ammetteva l'incostanza della specie; la *teoria della discendenza*, come si accetta quella della gravitazione senza potersela spiegare.

L'ultimo suo lavoro manoscritto riguarda i fondamenti filosofici della Morfologia vegetale, che probabilmente sarà pubblicato dal professore Noll.

Sachs è un vero autodidattico. I suoi maestri nella materia lo respingevano anzichè favorirlo. Nel campo da lui prediletto lascia orme così importanti, da potersi dire veramente un capo scuola. Egli mostrò un vero talento completo per novità, esattezza di ricerche analitiche, ordine, chiarezza e vastità di concetti sintetici.

Egli sarebbe riuscito in qualunque ramo delle scienze naturali. — *Ho bisogno di imparar sempre* — egli scriveva. E però si occupava anche di zoologia e di paleontologia.

Era di quelle nature d'uomini che non possono far nulla di superficiale, lavorar di maniera; ma trovano il loro maggior piacere nel penetrare e sviscerare l'interno delle cose, e condurre l'opera loro al miglior possibile compimento.

Morì il 29 maggio 1897, affranto dal lavoro.

“ Vita fama gli diè, morte riposo „.

## *Sulle leggi del lavoro muscolare;*

Nota del Dott. ZACCARIA TREVES, Assistente.

---

Le esperienze che formano oggetto della presente memoria furono fatte tutte sul coniglio; il muscolo che fornì le curve ergografiche era il gastrocnemio.

Un anello di cuoio, come quello dell'ergografo di Mosso, assicurava alla zampa, a livello della radice delle dita, la cordicella destinata a far scorrere il carretto scrivente, al quale dall'altro lato erano attaccati i pesi.

L'eccitamento era fornito dalla corrente secondaria d'una slitta Du Bois-Reymond, nel cui circuito primario era intercalato un pendolo, che dava alla serie degli eccitamenti il ritmo di 1″ o 2″. Gli eccitatori vennero applicati in quasi tutte le esperienze sulla cute lungo il decorso del N. sciatico. L'eccitamento era di natura tetanica e di brevissima durata.

Prima di scrivere l'ergogramma determinavo l'eccitamento ed il peso col quale il muscolo mi dava un massimo di lavoro, in una contrazione isolata. È una determinazione che richiede parecchio tempo, perchè alle prime eccitazioni il coniglio si agita e soltanto dopo che vi si è assuefatto si possono ottenere dei dati attendibili; tra una prova e l'altra, poi, occorre lasciar sempre un intervallo un po' lungo, 2′ o 3′, per esser sicuri che l'esaurimento prodotto da una contrazione abbia avuto tempo di dileguarsi prima di procedere alla contrazione successiva. Tenendo conto di queste avvertenze, ecco come procedevo: determinavo dapprima con un peso mediocre, 300 o 400 gr., quale era l'eccitamento che mi dava il massimo di contrazione e quindi il massimo di lavoro; questo era naturalmente indicato dal prodotto del peso per l'altezza della contra-

zione. Poi attaccavo al carretto dell'ergografo pesi gradatamente maggiori, 500, 600, 700 ecc. grammi, e con ciascuno di questi pesi facevo contrarre il muscolo, tenendo costante l'eccitamento prima stabilito. Succedeva che col crescere dei pesi l'altezza della contrazione andava diminuendo, il che non toglieva che, fino ad un certo punto, il prodotto di essa per il valore del peso, cioè il lavoro esterno crescesse; il peso con cui ottenevo questo massimo di lavoro era quello da me adottato per fare l'ergogramma. Prima, però, di procedere a questo, controllavo se l'eccitamento adoperato era ancor sempre il massimale (1) e poi lasciavo riposare il coniglio per 4 o 5'. Sia queste determinazioni, come l'ergogramma successivo venivano fatti col muscolo in tutta tensione, cioè senza sostenere il carretto dell'ergografo prima dell'eccitamento.

In tutte queste esperienze il ritmo dell'eccitamento era di 1''; verrà espressamente indicato in quelle poche nelle quali adoperai un ritmo di 2''.

Esperienza 1ª. — Lavoro massimo gr. 1150 $\times$ mm. 17 = 0,0195 kgm.

Ottengo l'ergogramma fig. 1, dove osservo un primo gruppo di contrazioni di cui l'altezza va sollevandosi alquanto, un secondo gruppo di cui l'altezza rimane costante e un ultimo gruppo di contrazioni che vanno abbassandosi in modo regolare, ma in misura gradatamente meno rapida, sino a che si riducono ad un'altezza quasi trascurabile, che però non mostra più tendenza a diminuire ancora. In alcune esperienze l'altezza di queste contrazioni, che non diminuiscono più, fu maggiore che nel caso presente: in altre invece si giunge in realtà ad avere una linea retta, senza traccia di contrazione. La curva ci direbbe che a questo punto il muscolo si trova al sommo grado di fatica. Ma se l'ergogrammo ci deve rappresentare l'andamento di una serie di contrazioni ritmiche di un muscolo che compie un lavoro meccanico, non solo per rispetto all'altezza di esse, ma anche in rapporto col lavoro che il muscolo stesso ha compiuto ed è ancora in grado di compiere, la cosa cambia d'aspetto; ed il muscolo si potrà solo dire *esaurito*, quando non sarà più capace; in qualsiasi condizione

(1) Per brevità chiamerò *massimali* i pesi e gli eccitamenti che dànno ad ogni contrazione il massimo di lavoro. Per la chiarezza dell'esposizione, avverto che coll'espressione *muscolo col peso a tutto carico*, intendo significare la *Belastung*, secondo Helmholtz; e con quella di *peso in sopraccarico*, intendo significare l'*Ueberlastung*, cioè la condizione del *peso con appoggio*.

di lavoro lo si metta, di produrre una benchè minima quantità di lavoro meccanico esterno. (Dico " esterno „ perchè la capacità di un muscolo a produrre il lavoro necessario allo spostamento delle proprie molecole durante la contrazione, dev'essere unita in un solo concetto colla *contrattilità,* proprietà caratteristica del tessuto muscolare vivente).

In questo momento, quindi, dell'esperienza, per rispondere al problema se il muscolo sia veramente esaurito, dobbiamo cercare se, cambiando le condizioni meccaniche in cui il muscolo lavora e l'intensità dello stimolo, siamo in grado, o non più, di ottenere da esso ad ogni contrazione una quantità di lavoro maggiore di quella che se ne ottiene allo stato attuale; in altri termini se, provando diversi pesi o diversi stimoli o entrambi contemporaneamente, ci è dato di trovare tali pesi e ottenere tali contrazioni i cui valori moltiplicati tra loro ci diano ancora un massimo di lavoro. In caso affermativo, per ottenere ulteriormente dal muscolo tutto il lavoro di cui è capace, dovremo farlo ritmicamente contrarre in queste nuove condizioni.

Ci sarebbe da attendersi una nuova curva, di minor valore quanto al lavoro, ma d'aspetto analogo a quella che avemmo già; e, dopo questa, una terza ottenuta collo stesso metodo, poi una quarta e così via, finchè il muscolo non sarà più capace di contrarsi se non libero affatto da pesi, nel qual caso il lavoro meccanico esterno sarà zero.

Orbene, al fine della curva, fig. 1, il muscolo era ancor capace a produrre del lavoro; solo stava a noi a metterlo in condizioni tali che questo lavoro potesse venir effettuato. Come appare dal tracciato, fig. 2, per avere il massimo di lavoro bisogna diminuire il peso da gr. 1150 a gr. 300; le contrazioni allora raggiungono l'altezza di mm. 8, lavoro corrispondente 2400 gr. mm. L'intensità dell'eccitamento adottata al principio dell'esperienza è ancor adesso la massimale. Ma una differenza essenziale salta agli occhi di chi confronta la curva fig. 1 colla curva ottenuta in queste nuove circostanze. La prima decresce rapidamente, la seconda invece ha il carattere d'una costante, conservandosi ad ogni successiva contrazione uguale la quantità di lavoro prodotta; ha un carattere di costanza come lo avevano le ultime contrazioni della curva fig. 1 e come lo hanno tutte le curve ottenute successivamente con pesi maggiori o minori, adoperati durante la ricerca del peso massimale.

Per economia di spazio, nell'esperienza che ho qui riferita, essendo io già oramai famigliarizzato col fenomeno che sto descrivendo, ho limitato a pochi cm. la curva corrispondente ai diversi pesi; tuttavia già questi brevi tratti ne attestano in modo sufficiente la regolarità e la costanza.

Ma per dare un'idea del tempo per cui questa parte costante della curva del lavoro muscolare può conservare la sua regolarità, posso ci-

tare delle serie di 1000, 1500, sino a 2000 di simili sollevamenti, rappresentanti ciascuno un lavoro che oscillava secondo le diverse esperienze da 1800 a 2400 gr. mm., col ritmo ininterrotto di 1″.

Esperienza 2ª. — Lavoro massimo iniziale kg. 1 × mm. 17 = kgm. 0,017.

Ottengo una prima curva, analoga alla curva fig. 1, che giunge ad esaurimento apparentemente assoluto: ne emerge poi la porzione costante, il lavoro massimo delle cui contrazioni è gr. 400 × mm. 4 = 1600 gr. mm.

Dopo un riposo di mezz'ora (l'eccitamento massimale è sempre lo stesso), il lavoro massimo risale a gr. 800 × mm. 15 = kgm. 0.012.

Ottengo la curva fig. 3, e poi la porzione costante di cui ogni contrazione dà ancor sempre un lavoro massimo di gr. 400 × mm. 4 = 1600 gr. mm.

Dopo 20′ di riposo, il lavoro massimo è gr. 600 × mm. 11 = kgm. 0,006.

Ottengo la curva fig. 4, e poi la porzione costante che rappresenta la solita quantità di lavoro.

Esperienza 3ª. — Il gastrocnemio di un altro coniglio è capace di un lavoro massimo iniziale di gr. 800 × mm. 26 = kgm. 0,0208. Giunta al fine la sezione decrescente della curva, emerge la porzione costante di cui il lavoro massimo è gr. 400 × mm. 5 = gr. mm. 2000.

Dopo 43′ di riposo, lavoro massimo kg. 1 × mm. 15 = 0,015 kgm.

Faccio eseguire una curva cui segue la fase costante che rappresenta lo stesso lavoro di prima.

Riposo di 25′. Determino il lavoro massimo che è: gr. 600 × mm. 13 = 7800 gr. mm. Faccio lavorare il muscolo in condizione di lavoro *sottomassimale,* appendendo solo gr. 400. La curva ottenuta in queste condizioni si continua senz'altro colla fase di lavoro costante, che rappresenta inalterata la quantità di lavoro surriferita. Noto che 400 gr. è pure il peso con cui le singole contrazioni della fase costante eseguiscono il massimo di lavoro. Scrivo per mezz'ora di questa fase, indi interrompo la serie degli eccitamenti per 10′; riprendendo il lavoro nelle stesse condizioni di prima, noto che sulla porzione costante si manifesta in principio la sovrapposizione di una piccola quantità di lavoro, indicata da una curva decrescente.

Esperienza 4ª. — Lo stesso coniglio dell'Esp. 1ª, dopo avermi fornita la curva fig. 1 e la porzione costante a suo tempo descritta, riposa mezz'ora. Lavoro massimo: gr. 400 × mm. 26 = kgm. 0,0104.

Il peso massimale è ancor quello della fase di lavoro costante. Messo in condizioni di lavoro sottomassimale, cioè con soli gr. 200, il muscolo eseguisce la curva fig. 5 che si protrae in una porzione costante di cui ogni contrazione rappresenta il lavoro di gr. 200 × mm. 9 = 1800 gr. mm., inferiore al lavoro massimo che dicemmo essere gr. 400 × 6 = 2400 gr. mm. o 300 × 8 = 2400 gr. mm.

Dopo poco tempo lascio riposare il muscolo ancora per mezz'ora. Peso massimo gr. 300 × mm. 20 = 6000 gr. mm.

Mi dà una nuova curva decrescente fig. 6, che si continua senz'altro nella fase costante, di cui il valore massimo è: gr. 300 × mm. 8 = 2400 gr. mm.

(Ottengo lo stesso lavoro sia con gr. 300 che con gr. 400 di peso).

La curva fig. 7 rappresenta, dopo un riposo di 10′, lo stesso fenomeno che accennai all'ultimo periodo dell' Esp. 3ª. In fig. 8 il muscolo viene tetanizzato per lungo tempo. Il peso viene sollevato ad un'altezza notevolmente maggiore di quella corrispondente alle singole contrazioni e sostenuto a tale altezza per tutto il tempo per cui dura l'eccitamento, 2′ 24″. Cessato il tetano, la fase costante ricompare come prima.

Esperienza 5ª. — Lavoro massimo: gr. 1200 × mm. 10 = kgm. 0,012.

Il muscolo eseguisce una prima serie di contrazioni sino ad apparente esaurimento. Fase costante: gr. 500 × mm. 3,5 = 1750 gr. mm.

Mezz'ora di riposo; lavoro mass.: gr. 900 × mm. 12 = kgm. 0,0108.

Eseguisce una curva che non va ad esaurimento, ma si continua in una porzione costante, che rappresenta un lavoro sottomassimale.

Mezz'ora di riposo; lavoro massimo: gr. 600 × mm. 9 = kgm. 0,0054.

In queste condizioni ottengo una curva come la precedente.

Riporto il lavoro della fase costante al valore massimo, rimettendo il peso di 500 gr.; e 15′ dopo, faccio lavorare il muscolo con eccitamento massimale, ma col peso di soli gr. 200 per mezz'ora; riportando quindi il peso a gr. 500 appare sulla porzione costante una sovrapposizione di lavoro in curva decrescente (fig. 9).

Un quarto d'ora dopo faccio contrarre il muscolo a vuoto per 20′: riattaccando i 500 gr., osservo la ripetizione del fenomeno (fig. 10). In alcuni casi, se si tiene per un certo tempo il muscolo in contrazione tetanica, appare lo stesso fatto (fig. 11. Coniglio dell' Esp. 2ª).

Esperienza 6ª. — Nel corso di queste esperienze si osserva che il muscolo si fa teso, aumenta grandemente di volume ed alfine presenta una consistenza edematosa.

Oltre che il lavoro, poteva esser causa di tali alterazioni l'ostacolo alla circolazione arrecato dalla compressione necessaria per tenere in posto gli eccitatori. Per eliminare questa possibile causa di errore e ad un tempo scindere l'eventuale coefficiente della stanchezza nervosa dal fenomeno complesso della fatica muscolare, modificai l'esperienza nel seguente modo: — Recido attraverso una piccola apertura della pelle, in corrispondenza della regione media della parte posteriore della coscia, tutte le branche di suddivisione del N. ischiatico; per la stessa apertura recido sotto cute i fasci muscolari che delimitano lateralmente il cavo popliteo, di guisa che ogni movimento atto a far piegare la gamba sulla

coscia ed estendere la zampa sulla gamba, che non provenga da una contrazione del gastrocnemio, è reso impossibile. Si evita diligentemente di ledere i vasi che affluiscono a questo muscolo. che si ha cura eziandio di non scoprire della sua cute, per non esporlo all'aria ed all'essiccamento durante l'esperienza.

Uno dei fili eccitatori è applicato al capo superiore del muscolo gastrocnemio, in modo che ne attraversi dall'esterno all'interno i diversi fasci: l'altro avvolge ad anello il tendine d'Achille, attraverso ad una piccola incisione della cute. La corrente ha direzione discendente.

Salvo l'applicazione diretta dell'eccitazione al muscolo e l'abolita compressione della coscia, l'esperienza è analoga alle precedenti. Ritmo dell'eccitamento 2''.

Avverto ancora che questo stesso muscolo, nelle ore antimeridiane dello stesso giorno, coll'eccitamento recato sul nervo attraverso la cute, era stato capace d'un lavoro massimo di gr. 1200 × mm. 19 = kgm. 0.0228; aveva eseguito una curva decrescente e quindi circa un'ora di porzione costante gr. 800 × mm. 3 = 2400 gr. mm.

Ad ore 14,30' eccitamento diretto sul muscolo. Lavoro massimo: gr. 1300 × mm. 20 = kgm. 0,026.

Eseguisce in queste condizioni una curva sino ad apparente esaurimento, dopo di che compare la porzione costante, che interrompo io dopo 2 ore e 45' di contrazioni successive, col ritmo di 2'', rappresentanti ciascuna un lavoro di gr. 700 × mm. 3,5 = 2450 gr. mm.

Anche qui dopo un riposo di 10' appare una leggerissima sovrapposizione di lavoro sul livello superiore della porzione costante.

Esperienza 7ª. — Il lavoro massimo che il muscolo è capace di eseguire ad ogni singola contrazione nella fase del lavoro costante può, col procedere di essa, andare lentamente e limitatamente crescendo.

All'inizio dell'esperienza. Lavoro massimo: gr. 700 × mm. 17,5 = kgm. 0,01225.

Eseguita la curva sino ad apparente esaurimento, il muscolo è capace ancora di un lavoro ritmico del valore, in principio, di gr. 500 × mm. 3,5 = 1750 gr. mm., che sale, nello spazio di due ore circa, a

gr. 600 × mm. 3 = 1800 gr. mm., poi a
gr. 650 × mm. 3,5 = 2275 gr. mm., poi a
gr. 700 × mm. 3,5 = 2450 gr. mm., ed infine a
gr. 750 × mm. 3,5 = 2625 gr. mm.

Esperienza 8ª. — La fase di lavoro costante della curva del lavoro muscolare, che è stata senza eccezioni riscontrata nelle esperienze surriferite, ha la proprietà di protrarsi inalterata per parecchie ore, come risulta dalle esperienze stesse. Non ho ancora ultimate le ricerche per stabilire se e come si modifica la curva delle singole contrazioni in pe-

riodi della fase di lavoro costante, man mano più avanzati. Ma a giudicare dall'altezza, dal regolare ritorno all'ascissa, e dall' intervallo non meno regolare che separa nel tracciato un sollevamento dall'altro, si può conchiudere che per lungo tempo non compaiono le caratteristiche attribuite in genere alla presenza della fatica nel decorso d'una contrazione muscolare. — Un'alterazione di simil genere si accenna assai tardi e va accentuandosi molto lentamente, come le esperienze seguenti dimostrano:

*a*) Lo stesso muscolo dell' Esp. 2ª. Dopo fatto il lavoro che venne ivi riferito, gli faccio eseguire la fase di lavoro costante di cui abbiam detto il valore massimo essere gr. 400 × mm. 4 = 1600 gr. mm.

Dopo due ore circa compare la modificazione che risulta dal tracciato fig. 12, consistente in una leggerissima irregolarità di livello della base delle contrazioni, con tendenza a rimanere al disopra dell'ascissa, mentre l'altezza delle contrazioni singole e quindi la quantità di lavoro da esse eseguita conserva il valore normale.

*b*) Lavoro massimo iniziale: gr. 950 × mm. 11 = kgm. 0,0104.

La curva fatta in tali condizioni si prolunga senz'altro nella fase di lavoro costante, che presenta però un valore sottomassimale: gr. 950 × mm. 0,5 = 475 gr. mm.

Il valore massimale della porzione costante è rappresentato in principio da gr. 350 × mm. 5 = 1750 gr. mm., e poi cresce gradatamente nello spazio di un'ora circa sino a gr. 500 × mm. 4,5 = 2250 gr. mm., e si mantiene ancora tale dopo una serie di contrazioni al ritmo di 1″ che dura circa 3 ore e mezza. (Eccitamento sempre massimale).

Due ore più tardi, il muscolo, che non ha mai tralasciato di lavorare, collo stesso peso e lo stesso eccitamento eseguisce contrazioni molto limitate; reagisce però ad ogni eccitamento. La determinazione delle condizioni di eccitamento e di peso con cui si potrebbe ottenere il massimo di lavoro dalle singole contrazioni è molto difficile; difatti ottengo cogli eccitamenti corrispondenti alle distanze: cm. 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 dei due rocchetti, che provo a più riprese (la distanza 12 non dà più contrazioni), dei prodotti di lavoro quasi uguali: gr. 400 × mm. 2 = 800 gr. mm.; gr. 500 × mm. 2 = 1000 gr. mm.; gr. 300 × mm. 3 = 900 gr. mm. Si direbbe anzi che gli eccitamenti minori siano più favorevoli allo sviluppo di lavoro. Del resto, i valori surriferiti non rappresentano che medie assai relative, essendo grandissime le oscillazioni dell'altezza delle contrazioni a parità di peso e di eccitamento, come il tracciato fig. 13 ci dimostra. Da questi fatti si sarebbe indotti a credere che l'eccitabilità sia aumentata e che la quantità di lavoro eseguita dalle singole contrazioni non possa ormai più raggiungere il valore che era costante due ore prima. Ma protraendo

a lungo queste prove con diversi pesi e diversi eccitamenti, mi succede di osservare che il muscolo è capace ancora in certi periodi di breve durata di eseguire coll'eccitamento massimale e col peso uguale a quello di allora un lavoro uguale o press'a poco: gr. 500 × mm. 4,5 = 2250 gr. mm., e scrivere così delle brevi serie di contrazioni che ricordano per l'altezza e la regolarità la lunga fase di lavoro costante prima descritta. Riducendo il ritmo delle contrazioni a 2″ si eleva d'alquanto la cifra del lavoro corrispondente ad ognuna di esse, ma sempre con fortissime oscillazioni, dovute essenzialmente alle variazioni di livello del punto di partenza dei singoli sollevamenti: le irregolarità della linea che unisce gli apici sono notevolmente meno accentuate. Continuai in queste ricerche per oltre due ore ancora, e interruppi l'esperienza senza che le condizioni in cui trovai il muscolo al principio di questo periodo si fossero notevolmente modificate. — In questa fase così avanzata compaiono dunque più che altro fenomeni di contrattura molto intensi, che non scompaiono nè per aumento del peso nè abbassando l'intensità dell'eccitamento sino alla soglia dell'eccitabilità; tutt' al più si riducono un po' di intensità. L'eccitamento massimale in questo stadio non è maggiore dell'eccitamento che era massimale durante la fase regolare di lavoro costante.

Un tetano protratto, in questo periodo, dà luogo ad una curva che differisce spiccatamente da quella che si ottiene durante la fase costante normale: se difatti il sollevamento iniziale è ancora talvolta abbastanza superiore al sollevamento delle contrazioni isolate, la linea che segna il livello a cui il peso viene sostenuto, col protrarsi del tetano, cade rapidamente a zero (fig. 14). Se in questo stadio si diminuisce la frequenza degli eccitamenti a cui il muscolo è sottoposto, aumenta l'altezza delle contrazioni e quindi il lavoro; ma non per elevamento degli apici delle contrazioni, bensì per riavvicinamento della loro base all'ascissa.

La lunga durata di queste esperienze non mi permise ancora di seguire un muscolo fino al momento in cui non sarebbe stato più capace di fornire del lavoro meccanico esterno; ma già dal tracciato che presentai è facile arguire che probabilmente questo momento sarebbe giunto, col protrarsi della esperienza, pel graduale aumento della rigidità muscolare, senza che si potesse stabilire una corrispondente variazione dell'intensità dell'eccitamento massimale e delle condizioni meccaniche nelle quali il muscolo voleva essere collocato.

*
* *

Prima di passare all'interpretazione delle esperienze, devo esporre in brevi cenni le considerazioni che mi indussero a farle ed i concetti che ne determinarono le modalità.

Fin dal 1891 avevo iniziato alcune osservazioni sulla curva muscolare dei diabetici; si trattava di ottenere da una serie di questi ammalati delle curve ergografiche secondo i metodi indicati da Mosso (1) per vedere l'andamento della fatica, la modificazione dell'elasticità dei muscoli per la fatica stessa; stabilire, se possibile, un rapporto tra l'altezza della curva e la quantità di zuccaro eliminata, ed, eventualmente, tra questa e la quantità di lavoro muscolare di cui il diabetico era capace. In massima vidi allora che la curva della fatica non presentava nei diabetici altra differenza da quella dei sani se non una minore altezza iniziale, che oscillava poi, all'ingrosso, nelle diverse fasi della malattia, in senso inverso alle oscillazioni della quantità di zuccaro eliminato per le orine. Sopratutto mi colpì la grande distendibilità dei muscoli per un breve lavoro; talora, difatti, succedeva che, nè la mano o l'anello legato al dito si erano spostati, nè la funicella s'era distesa: eppure questa, dopo una breve serie di contrazioni, si mostrava rallentata; sicchè la tensione, sotto cui si metteva il muscolo al principio dell'esperienza, poco tempo dopo diventava insufficiente; e gran parte della contrazione si eseguiva a vuoto, con rapido abbassamento dell'ergogramma. Se, allontanando la vite di sostegno dell'ergografo, ristabilivo una tensione opportuna, l'ergogramma ricominciava ed allora mi succedeva di vederlo continuare senza fine, costituito da una serie di sollevamenti poco regolari, ma che non accennavano a diminuire, fosse il ritmo di 1″ o 2″. Le curve erano volontarie. Un ergogramma simile avrebbe significato che il muscolo di un diabetico può in un primo tempo eseguire un lavoro in generale minore che non quello di un sano; ma poi per una lunga serie di spazii di tempo successivi è capace di fornirne dell'altro, in quantità minore, ma pur sempre considerevole e costante; sicchè i diabetici avrebbero presentato una potenzialità di lavoro assai maggiore che l'individuo sano: il che ognuno vede quanto sarebbe paradossale. — Mi astenni, naturalmente, dal pubblicare i risultati, che presentai solo con tutte le riserve in un sunto per la tesi di laurea. Più tardi fu ripetuta da altri e pubblicata l'osservazione di questa straordi-

(1) A. Mosso, *Ueber die Gesetze der Ermüdung. Unters. am Muskel des Menschen*, " Archives Du Bois-Reymond ", 1890, Suppl. Band, pag. 89.

naria lunghezza della curva della fatica nei diabetici (1), e in date diverse si accennò a tal fatto negli epilettici (2), negli itterici (3), negli affetti da malattie esaurienti, o convalescenti da morbi gravi, colla tendenza in genere a spiegare il fatto ammettendo che, in questi individui, gli impulsi motori cerebrali per la loro diminuita energia siano incapaci fin da principio di far eseguire al muscolo tutto lo sforzo che dovrebbe; per cui rimarrebbe sempre un residuo, che costituirebbe appunto la durata indefinita della curva. Ma intanto si dimenticava o non si dava la giusta importanza al fatto già accennato nella memoria di Mosso (4) che in taluni individui normali la curva non finisce mai; e non si faceva parola dell'osservazione, or ora da me esposta, che in certi casi la curva nei diabetici finisce anche più presto di quel che realmente non dovrebbe succedere per l'allungamento del muscolo. Ora, il Mosso, nel lavoro sopracitato, ci rende noto che l'elasticità del muscolo per la fatica si comporta in modo molto diverso dall'uno all'altro individuo sano; nell'uno aumenta, nell'altro diminuisce; è verosimile che nel primo, lavorando in sopraccarico, appaia la curva che non finisce mai; nel secondo invece l'ergogramma cessi mentre forse potrebbe ancora continuare. Nel sano l'influenza del vario modo di comportarsi dell'elasticità probabilmente si farà sentir meno che nei malati sopramenzionati; ma è certo che nei diabetici in genere ho visto comparire il lungo strascico della curva solo dopo che una volta almeno, talora a più riprese, avevo spostato il carretto per restituire al muscolo una tensione opportuna affinchè niuna parte della contrazione si eseguisse a vuoto; talora giunsi persino a far lavorare gli ammalati a carico completo.

Dunque, e nei sani e negli infermi l'ergogrammo fatto in sopraccarico, se può servire a darci un' idea dell' andamento

---

(1) Zenoni, *Ricerche cliniche sull'affaticamento muscolare nei diabetici*, " Policlinico „ vol. 3, 1896.

(2) Roncoroni e Diettrich, *L'ergographie des aliénés*, " Archives italiennes de Biol. „, 1895, XXII.

(3) Pantanetti, *Sur la fatigue musculaire dans certains états pathologiques*, " Archives italiennes de Biol. „, 1895, XXII.

(4) A. Mosso, Loc. cit., pag. 115.

della fatica, certo cessa di esser fedele se da esso attendiamo qualcosa di più preciso rispetto alla quantità di lavoro che il muscolo è capace di fornirci. Questo mio convincimento venne reso anche più saldo dalle osservazioni che ebbi opportunità di fare nei conigli, come preparazione alle esperienze attuali. Per maggior efficacia di dimostrazione presento senz'altro i frammenti dei diversi tempi di un'esperienza.

Il coniglio sollevava in sopraccarico un peso di gr. 400 col ritmo di 2''. Ottengo un ergogramma di 215 contrazioni di cui riproduco il primo tratto e l'ultimo (fig. 15 e 16). A questo punto distendo il muscolo, ritirando la vite dell'ergografo sulla quale peraltro il carretto continuava ad appoggiare. Ottengo una curva di circa 1500 contrazioni, di cui riproduco 5 tratti ad intervalli equidistanti (fig. 17, 18, 19, 20).

Le contrazioni accennano in complesso a diminuire d'altezza e, sul tardi, s'aggruppano a veri periodi di abbassamento e di ripresa di una regolarità che colpisce. Se una curva che accennava a spegnersi, può ancora segnare tanto lavoro solo per una modificazione del valore del sopraccarico, dobbiamo ben conchiudere che l'ergogramma in sopraccarico, come indicatore della quantità di lavoro, è fallace. La dimostrazione dello stesso fatto in senso inverso ce la può dare l'esperienza a cui corrisponde la fig. 21, dove il muscolo che servì all'esperienza 6ª, durante la fase del lavoro costante passa dallo stato di carico completo a quello di sopraccarico gradatamente crescente.

Nè solo rispetto alla quantità di lavoro la condizione di lavoro in sopraccarico ci può ingannare, bensì anche rispetto alla forma della curva della fatica, tanto da indurre in interpretazioni forse meno esatte. Infatti, i periodi che vediamo così bene delinearsi in questa curva di coniglio con l'eccitamento elettrico, non ci ricordano molto da vicino quei periodi che nell'ergogramma volontario dell'uomo P. W. Lombard (1) opinò dovessero attribuirsi ad oscillazioni dell'intensità dell'eccitamento?

Che col protrarsi del lavoro la forza della volontà non si conservi sempre allo stesso livello, è indubitato: ma meglio

---

(1) P. W. Lombard, *Effet de la fatigue sur la contraction musculaire volontaire*, " Archives italiennes de Biol. ", XII, 1890.

che le oscillazioni delle curve ce ne avverte la nostra coscienza stessa.

La comparsa di tali oscillazioni periodiche in un coniglio che lavora in sopraccarico con eccitamento artificiale, non può significare altro che oscillazioni dei rapporti in cui si trova il muscolo dirimpetto alle condizioni meccaniche in cui lo facciamo lavorare. E, invero, il muscolo affaticandosi subisce modificazioni d'elasticità; quanto più questa diminuisce, restando costante il sopraccarico, tanto meno lavoro eseguisce il muscolo; in questo periodo il muscolo si riposerà relativamente, la sua elasticità si riavvicinerà alla normale ed ecco allora comparire un nuovo periodo di maggior lavoro che tende ad abbassarsi gradatamente di nuovo. Se facciamo invece lavorare il muscolo in condizione di carico completo e quindi tensione costante, i periodi non compaiono più nei conigli, nè nell'uomo.

Mentre però da un lato scompaiono i periodi, dall'altro emerge *che la fase costante è una parte essenziale dell'ergogramma* che tien dietro direttamente alla curva decrescente iniziale.

***

Kronecker dalle sue esperienze (1) sui muscoli di rana, tenuti in vita colla circolazione artificiale, deduce tra le altre la legge seguente sul lavoro muscolare: " la linea di congiunzione dei punti superiori delle contrazioni che un muscolo ritmicamente eseguisce, caricato (a tutto carico) con un peso costante, è una retta fino a che il valore dell'altezza della contrazione è diventato più piccolo del tanto di distensione che il muscolo a riposo subisce per lo stesso peso. Da questo punto la linea decorre come un'iperbole di cui un'asintote è il tratto di distendimento del muscolo a riposo „ (2).

Vediamo se qualchecosa di corrispondente si verifica nelle nostre curve del lavoro muscolare.

Per ora lascio a parte la sezione iniziale decrescente, che corrisponde probabilmente a quella cui Kronecker attribuiva

(1) H. Kronecker, *Ueber die Ermüdung und Erholung in quergestreiften Muskeln*, " Berichte der K. Sächs. Ak. d. Wiss. „, Math. phys. Classe, 1871.

(2) Loc. cit., pag. 751.

l'andamento di una linea retta. Kronecker metteva a base della divisione ch' egli faceva della curva del lavoro muscolare in 2 periodi il momento dell'elasticità muscolare, la quale era pur quella che, secondo lui, imprimeva la forma iperbolica al secondo di essi. A questo riguardo mi limito a ricordare che lo studio dell' influenza delle condizioni meccaniche sull' esplicazione di lavoro meccanico esterno portava dieci anni dipoi alla conclusione che: " non si è autorizzati a scindere in una qualsiasi contrazione la parte che spetta alle forze elastiche e quella che spetta alle forze proprie di contrazione, e determinare la prima alla stregua del muscolo a riposo (1) „. Ciò premesso, si possono tuttavia trovare diversi punti di contatto tra la fase iperbolica di Kronecker e la fase di lavoro costante de' miei tracciati.

I. Kronecker trova che ad un certo punto delle esperienze (2) nelle quali il muscolo lavora a tutto carico, la distensione del muscolo col crescere dei pesi aumenta, ma l'altezza delle contrazioni varia solo di poco. — Ora comprendiamo che non poteva essere altrimenti, dal momento che il prodotto dell'altezza di esse contrazioni per i pesi che crescevano nella proporzione di 20 gr., 30 gr., 40 gr., 50 gr. (fig. 28, pag. 770) doveva rappresentare una quantità di lavoro minima, ma su per giù costante. Non altrimenti, sebbene in modo più chiaro, succedeva nelle prove che io facevo per determinare il peso massimale durante la fase di lavoro costante.

II. Kronecker trova che un muscolo di rana stancato, con una serie di contrazioni, anche se a vuoto, solleva pesi qualsivoglia ad uguali altezze minimali: p. es. gr. 40, 20, 5, all'altezza di mm. 0,25 (pag. 772). Ebbene, nelle nostre esperienze, cercando il valore massimo di lavoro della fase costante, troviamo pure che il muscolo può sollevare pesi diversi ad altezze quasi uguali, specie con pesi inferiori al massimale; mi è successo p. es. di vedere che il muscolo sollevava alla stessa altezza gr. 200 o gr. 100. Si direbbe che nella fase di lavoro costante la contrazione non possa oltrepassare una certa estensione, minore di quella di cui è capace il muscolo fresco.

---

(1) V. Kries, *Untersuchungen ueber Mechanik des quergestreiften Muskels*, " Arch. Du Bois-Reymond „, 1880, pag. 373.

(2) Kronecker, Loc. cit., pag. 770.

III. Ancora una concordanza. Kronecker (1) dice che un muscolo, presso che esaurito, che lavori a tutto carico, non presenta quasi più variazioni d'altezza nella contrazione col variare del ritmo. Il valore della fase costante, nelle mie esperienze, differenziava ben poco, fosse il ritmo di 1″ o 2″.

IV. Nel lavoro di Kronecker (2) si legge: " Von welcher Richtung auch immer die Ermüdungslinie des belasteten " Muskels einlaufen, ob sie divergirende Curven verschiedener " Zeitintervallen gewesen sein mögen, ob parallele Linien verschiedener (ursprüngliche) Ueberlastungsgewichte oder Belastungsgewichte, ob sie von hoher oder niederer Anfangshöhe, " steil oder flach absteigen, alle vereinigen sich an der Asymptote der Ermüdungshyperbel, wobei natürlich vorausgesetzt " wird, dass als Asymptote stets die Dehnungslinie des ruhenden " Muskels für das gehobene Gewicht gilt ... Se facciamo astrazione dal concetto che implicano queste ultime parole, le espressioni usate da Kronecker per indicare che in qualunque condizione di lavoro il muscolo venga collocato, ad una prima fase di contrazioni decrescenti in vario modo, succede sempre un secondo periodo che si distingue dal primo per la sua regolarità caratteristica, servono a pennello per me ad indicare che dopo una fase iniziale, in cui si rispecchia il modo con cui il muscolo consuma le forze in lui accumulate (in qualunque condizione meccanica di lavoro o di precedente fatica il muscolo si trovi), compare sempre una seconda parte nella curva del lavoro, che è caratteristica per la costanza della quantità di lavoro che ad ogni contrazione rappresenta.

Ma la linea che Kronecker aveva considerata come un'iperbole e ritenuta funzione dell'elasticità muscolare, nelle mie esperienze appare come una linea orizzontale. La quantità massima di lavoro che in questa fase veniva eseguita ad ogni contrazione, nelle mie esperienze era facilmente apprezzabile: dato l'infimo valore di essa, si comprende invece che nelle esperienze di Kronecker ne sarebbe stato impossibile ogni apprezzamento, quand'anche questo autore avesse avuto presente un tal concetto.

Egli, considerando qual funzione dell'elasticità muscolare

(1) Kronecker, Loc. cit., pag. 730.
(2) Kronecker, Loc. cit., pag. 769.

la differenza costante dell' iperbole, arriva teoricamente ad indicare quale sarebbe l'altezza dell'ultima contrazione, e crede di osservare la parte della contrazione che spetta alla pura elasticità muscolare quando nota sollevamenti uguali minimali per qualsiasi peso, e quando osserva che l'elasticità è già divenuta assai incompleta (1); io noto invece sollevamenti pressochè uguali anche per pesi considerevoli e per contrazioni che sono massimali in un periodo che precede di ore la comparsa delle alterazioni dell'elasticità muscolare; gli è perchè realmente quel che sta alla base del fenomeno è la costanza della quantità di lavoro di cui il muscolo in questo periodo è capace ad ogni contrazione, quantità di lavoro che si ottiene solo con un determinato peso e di cui l'altezza della contrazione non è che un fattore.

Si potrebbe dubitare che le condizioni mie di esperienza non possano confrontarsi con quelle delle esperienze di Kronecker, che lavorava su muscoli di rana staccati dal corpo e alimentati solo dalla circolazione artificiale.

Le molteplici concordanze di fatto sopra rilevate dovrebbero già di per sè rispondere, almeno in parte, all' obbiezione. Del resto, anche su muscoli di mammiferi percorsi da una corrente sanguigna artificiale si osservarono fenomeni che probabilmente avevano lo stesso significato di quelli che io ho osservati.

Ecco, difatti, in quali termini C. Ludwig ed A. Schmidt (2) riferiscono le loro osservazioni sul modo in cui lavoravano muscoli di cani, attraverso cui facevano la circolazione artificiale:

" Il peso durante l'eccitamento (erano eccitamenti tetanici di lunga durata) s'abbassa dall'altezza raggiunta al principio di esso. Se il muscolo in cui si continua la circolazione artificiale resta un po' a riposo, si ripiglia e diventa capace di alzare di nuovo il peso ad un'altezza maggiore di quella a cui lo sosteneva al fine dell'eccitamento precedente; quest'altezza però è minore dell'altezza iniziale ottenuta coll'eccitamento anteriore stesso.

---

(1) Kronecker, Loc. cit., pag. 770.

(2) *Das Verhalten der Gase welche mit dem Blut durch den reizbaren Säugethiermuskeln strömen*, " Berichte K. Sächs. Ak. d. Wiss. ", Math. phys. Classe, 1868, pag. 34.

“ La differenza fra le altezze massimali di due tetani successivi è maggiore all'inizio dell'esperienza che più tardi, *sicchè alfine succede un periodo in cui le contrazioni tetaniche succedentisi a intervalli sono affatto uguali. Questo fatto si stabilisce tanto più prontamente quanto più spesso il muscolo fu fatto lavorare.*

“ Il risultato si potrebbe così riassumere: la corrente sanguigna può riparare alle perdite che il muscolo subisce lavorando; ma ciò in misura limitata, sicchè *il sangue può specialmente riparare alle piccole perdite di un muscolo stanco, e meno alle grosse perdite di un muscolo fresco.*

“ *La forza del muscolo completamente esaurito si riaccumula per l'azione del sangue in modo graduale sino ad un massimo che non si può oltrepassare* „.

La fase costante adunque che si osserva nelle nostre curve del lavoro muscolare rappresenta una specie di livello di potenzialità meccanica, sotto al quale il muscolo non può discendere sinchè le sue proprietà biologiche non sono alterate. E la prova che il muscolo durante tale fase rimane per lungo tempo normale, ce la forniscono:

1° la regolarità del suo lavoro;

2° il fatto che il muscolo ubbidisce anche ora alle leggi meccaniche che regolano la produzione di lavoro esterno; il massimo lavoro della fase costante si ottiene difatti con eccitamento massimale e solo con un peso determinato, nè più nè meno di quello che succede col muscolo all'inizio dell'esperienza;

(Dall'esperienza N. 8 si apprende come nel muscolo alterato dalla fatica queste proprietà 1° e 2° vanno scomparendo);

3° l'andamento del tetano, che è qui come quello di un muscolo fresco (Confronta le fig. 8 e 14). Mentre il muscolo fresco tetanizzato conserva lungo tempo l'altezza di sollevamento iniziale, il muscolo stanco ne discende rapidamente (1).

Già descrivendo l'esperienza N. 8 ho accennato che forse bisogna fare una distinzione netta tra l'esaurimento delle forze che sono accumulate nel muscolo ed il complesso quadro fenomenologico della fatica; quello succede, in determinate condizioni, in un tempo assai breve ed iniziale, e tra esso e l'insorgere della fatica decorre un lungo periodo in cui il muscolo

(1) Kronecker, loc. cit., pag. 734.

può lavorare col materiale fornitogli da una sorgente che appare costante, che possiamo forse fin d'ora supporre, appoggiandoci anche alle osservazioni surriferite di Ludwig e Schmidt, che sia il sangue.

***

La quantità di lavoro che, nelle mie condizioni d'esperienza, in una singola contrazione il gastrocnemio fresco d'un coniglio era in grado di eseguire, oscillava da kgm. 0,010 a kgm. 0,022; in alcuni conigli, di eccezionale sviluppo, potei osservare un valore di lavoro di kg. $2 \times 20$ mm. = kgm. 0,040. Se dopo la parte di curva decrescente, ed annessa una notevole porzione di lavoro costante, si lascia riposare il muscolo più o meno a lungo, il lavoro massimale di cui il muscolo è capace aumenta di nuovo; tanto meno prontamente, però, quante più volte l'esperienza si riprende. Il che è un fatto parallelo a quello riferito da Ludwig e Schmidt (1) che, cioè, il muscolo si risente tanto più prontamente dei nocivi effetti dell'anemia quanto più volte vi venne sottoposto.

Occorrono almeno 45', un'ora, perchè il lavoro del muscolo raggiunga il valore iniziale, collo stesso peso massimo.

Per spazî di riposo minori, il rifocillamento del muscolo non si fa così completo, ed i pesi massimali sono minori che all'inizio dell'esperienza. Dopo 20', 30' può succedere che il peso massimo sia ancora quello stesso della porzione costante della curva. Tuttavia già dopo 10' di riposo, si può osservare che sulla porzione costante si sovrappone una leggiera quantità di lavoro. — In ogni caso, alla parte decrescente della curva, succede la parte costante col suo valore inalterato.

La parte decrescente della curva del lavoro muscolare in un muscolo fresco o sufficientemente riposato, segue press'a poco sempre lo stesso andamento. Salvo rari casi, si osserva la scala (*Treppe*) iniziale, sicchè la linea che unisce gli apici sarebbe rappresentata da una prima porzione curva colla concavità in basso, seguìta da una seconda, concava verso l'alto, a raggio di curvatura molto più ampio, la quale si protrae nella linea retta

---

(1) Loc. cit., pag. 35.

orizzontale degli apici della fase costante, che può rappresentare, secondo le condizioni di lavoro in cui viene eseguita, un lavoro massimo o sottomassimale.

Man mano però che i periodi di lavoro si succedono e diventa minore la potenzialità del muscolo, anche il tipo della curva si modifica. La scala (*Treppe*) è meno elevata e si protende per un tempo maggiore, e la parte della curva concava verso l'alto acquista dei raggi di curvatura man mano più lunghi, sino ad assumere talora addirittura un andamento quasi rettilineo, con una leggerissima inclinazione, come succede nei casi in cui il peso massimale è nella parte iniziale della curva uguale a quello della fase costante. La gradazione dei diversi aspetti che può assumere la linea che unisce gli apici della parte iniziale della curva del lavoro muscolare si osserva nelle figg. 1, 5, 6, 7, 9, 10, 11.

È un andamento che, nel complesso di molte contrazioni successive, ricorda singolarmente la modificazione che subisce la forma della contrazione isolata per effetto della fatica.

La parte decrescente della curva del lavoro muscolare assume gli aspetti descritti anche se il muscolo vien fatto lavorare in condizioni di lavoro sottomassimale.

Se il lavoro è sottomassimale perchè si sieno attaccati al muscolo pesi inadeguati inferiori al massimale, la porzione iniziale si continua senz'altro nella fase costante, rappresentante pur essa d'ordinario un lavoro sottomassimale.

Se riattacchiamo al muscolo il peso adeguato, potremo riportare la fase costante al suo valore massimo, ma non otterremo traccia di porzione decrescente.

Non mi nascondo che questo fatto appare in contraddizione con altri fatti che pure osservai nelle mie esperienze, e cioè, che una certa quantità di lavoro in curva decrescente si può sovrapporre sul lavoro costante, se per un certo tempo durante la fase di questo si fa lavorare il muscolo in condizione di lavoro sottomassimale (pesi di molto inferiori al massimale, contrazioni a vuoto, talvolta tetano).

Ma il muscolo ci dà meno del lavoro massimo anche nel caso in cui le condizioni meccaniche corrispondono bensì a questo, ma l'eccitamento è sottomassimale. In questo caso, se durante la fase costante, adottiamo l'eccitamento massimale, si

nota tosto sovrapporsi sul livello della curva costante una porzione di lavoro in curva discendente (fig. 22).

Questo significa che, mentre condizioni meccaniche inadeguate non servono forse a risparmiare lavoro, l' intensità dell'eccitamento è quella invece che determina la quantità delle forze utilizzabili che si sviluppano nella contrazione muscolare. Sotto questo aspetto l'eccitamento elettrico massimale sta al sottomassimale come l'eccitamento volontario sta all'eccitamento artificiale (1).

*
* *

Il lettore, che mi avrà seguìto sino a questo punto, si sarà chiesto più volte se io potevo a buon diritto parlare nelle mie esperienze di lavoro massimo, come ho sempre fatto. Ed in vero il problema, come si possa ottenere da un muscolo tutto il lavoro di cui è capace, è tuttora insoluto. Tutt'al più, l'esperienza ci ha forniti sino ad ora i dati che si riferiscono alle condizioni le quali ci permettono di ottenere da un muscolo, isolato dall'organismo, un massimo di lavoro meccanico.

I risultati di queste ricerche, per quel che riguarda le condizioni meccaniche di un muscolo separato dal corpo, si possono riassumere nelle proposizioni seguenti:

*a*) Il rendimento di lavoro di un muscolo è massimo per un peso determinato (2).

*b*) Le contrazioni che il muscolo eseguisce con un dato peso a tutto carico sono più alte che quelle eseguite collo stesso peso in sopraccarico. La contrazione isotonica a carico diretto per forti pesi dà un lavoro maggiore che la auxotonica. I prodotti di lavoro sono a carico diretto notevolmente maggiori che in sopraccarico (3).

---

(1) Mosso, loc. cit. — Fick, *Myographische Versuche am lebenden Menschen*, " Pflüger's Archiv ", vol. 41, 1887.

(2) J. Rosenthal, *Ueber die Arbeitsleistung der Muskeln*, " Du Bois-Reymond's Archiv ", 1880.

(3) Santesson, *Ueber die Mechanische Leistung der Muskeln*, " Skandin. Archiv ", vol. 3. — *Studium über die allgemeine Mechanik der Muskeln*, id., vol. 4°.

c) Il muscolo fornisce maggior lavoro quando la sua forza è impiegata non a vincere direttamente la gravità, ma a mettere in moto masse inerti, le quali per essere spostate esigono che il muscolo raggiunga senza accorciarsi un grado notevolmente maggiore di tensione; il che torna a vantaggio della quantità di lavoro che il muscolo si trova in condizione di poter eseguire (1).

Queste proposizioni valgono sia per eccitamenti massimali che sottomassimali.

A Seegen, che pel primo (2), a quanto io sappia, cercò di stabilire un'equazione tra il lavoro che un muscolo ha eseguito e le alterazioni chimiche che nel muscolo avvennero, Schenk (3) obbiettò appunto che troppo poco conto aveva tenuto delle condizioni meccaniche in cui il muscolo va collocato perchè possa esplicare il massimo di lavoro esterno.

Accettando queste obbiezioni, Seegen cercò di riparare in parte almeno; sebbene appaia che non di tutte avesse un chiaro concetto, specialmente per quel che riguarda la scelta del peso adeguato; poichè nella sua risposta alle obbiezioni di Schenk si legge (4): " cercai, provando varii pesi, l'ottimo di lavoro, cioè quel peso che, a parità di eccitamento, veniva sollevato al massimo ".

Dal metodo con cui io ho eseguita la stessa determinazione appare in qual modo va, secondo me, inteso il concetto del peso massimale: esso è quel peso che, per l'eccitamento massimale, permette una tale contrazione, la cui altezza moltiplicata per il valore del peso dia il prodotto massimo di lavoro.

Col lasciar sempre il peso a tutto carico cercai di ottemperare alla seconda delle leggi esposte.

In tal guisa il muscolo era sempre in tensione prima dell'eccitamento; e la tensione a cui il muscolo veniva ordinaria-

(1) Fick, *Mechanische Arbeit und Wärmeentwickelung bei der Muskelthätigkeit*, pag. 77, 1882, " Intern. Wissens. Bibliothek ".

(2) Seegen, *Muskelarbeit und Glykogenverbrauch*, " Du Bois-Reymond's Archiv ", Physiol. Abtheilung, 1895, pag. 273.

(3) F. Schenk, *Kritische Bemerkungen zu Seegen's Abhandlung ecc.*, " Pflüger's Archiv ", 1895, vol. 61, pag. 535.

(4) Seegen, *Muskelarbeit und Glykogenverbrauch*, II, " Du Bois-Reymond's Archiv ", Physiol. Abtheilung, 1896, pag. 398.

mente sottoposto in tal guisa, era o uguale o di poco inferiore alla tensione massima che il muscolo potesse fisiologicamente subire.

Alla terza condizione cercai soddisfare, attaccando il carretto dell'ergografo alla zampa e non direttamente al tendine del gastrocnemio. La leva ossea naturale era la massa inerte su cui il muscolo doveva esercitare la sua forza. L'eccitamento adottato era, come dissi, massimale; di natura tetanica e di brevissima durata, quale appunto può supporsi sia l'eccitamento volontario (1). In questa guisa credo di essermi avvicinato alquanto alla risoluzione del problema di ottenere il massimo di lavoro, che da un muscolo, nelle condizioni di vita normale, sia possibile con eccitamenti artificiali. Spero di avvicinarmivi ancor più perfezionando le condizioni di lavoro del muscolo in una serie successiva di ricerche.

Resta sempre però il fatto, a giudicare da quanto succede nell'uomo, che l'eccitamento volontario è in grado di dare una quantità di lavoro assai maggiore che non l'eccitamento elettrico massimale: sicchè già solo per questo è giusta l'affermazione di Schenk (2) secondo cui è impossibile disporre le condizioni meccaniche esterne e la natura dell'eccitamento in modo che ne debba risultare in ogni circostanza il massimo dell'effetto utile.

Certo la curva volontaria eseguita nelle condizioni meccaniche opportune, darà una quantità di lavoro che si avvicinerà assai al massimo effetto utile di cui il muscolo è capace; raggiungerlo non potrà forse perchè col procedere del lavoro la produzione di esso è influenzata dalla fatica dei centri e delle terminazioni nervose periferiche in una misura che appare quasi impossibile stabilire.

Intanto alcune poche esperienze fatte sull'uomo, all'ergografo, coll'eccitamento volontario, mi fanno ritenere che, anche in queste condizioni, avvengono gli stessi fatti descritti nelle curve del lavoro muscolare dei conigli. Ma i pesi che per l'uomo sarebbero stati massimali, sono troppo forti perchè si possano

(1) J. Rosenthal, loc. cit.

(2) F. Schenk, *Muskelarbeit und Glykogenverbrauch, Entgegnung an Seegen*, " Pflüger's Archiv ", 1897, vol. 65.

tollerare a lungo appesi a tutto carico alla 2ª falange del dito medio, come porterebbe l'ergografo di Mosso; quindi la determinazione del lavoro massimale mi riuscì sempre soltanto approssimativa, e sto studiando una disposizione opportuna per eseguire curve ergografiche umane nelle stesse condizioni meccaniche che ho realizzate nel coniglio. Ciò non ostante con pesi di kg. 4, 5, od anche 6, secondo gli individui, sollevati col ritmo di 2″, col massimo sforzo di volontà, ottenni delle curve che constavano di una porzione più o meno rapidamente decrescente e di una successiva di cui le singole contrazioni erano per altezza più irregolari che non fossero quelle osservate nei conigli, ma però oscillavano attorno ad una media che non accennava a diminuire, almeno per lo spazio di tempo per cui sono riuscito a scrivere il lavoro di tale fase; tale spazio durò dai 30′ ai 45′ e interruppi sempre l'esperienza a causa del dolore che la forte trazione provocava sulla pelle del dito, mai perchè il muscolo fosse giunto a reale esaurimento. Convien credere che il peso di 5 o 6 kg. sia pel muscolo flessore del dito medio dell'uomo in genere notevolmente inferiore al peso massimale, poichè la fase di lavoro costante, nelle mie esperienze, tenne ognora dietro direttamente alla fase iniziale decrescente senza che il peso dovesse venire diminuito, e non ottenevo neppure, durante di essa, il massimo di lavoro.

Di tali curve eseguii alcune io stesso; onde posso riferire l'impressione che si prova quando il muscolo continua a lavorare durante tale fase: si può seguire benissimo il ritmo di 2″ indicato dal metronomo; il senso di progressivo spossamento, che si ha durante la fase di lavoro decrescente, lascia luogo ad una specie di incoscienza relativa al lavoro che ad ogni contrazione si eseguisce; un apprezzamento al riguardo è impossibile per chi lavora, il quale accusa a volta a volta d'aver dovuto fare uno sforzo maggiore o di aver provato una speciale facilità a sollevare uno stesso peso, senza che dalla curva appaia che abbia eseguito nei diversi casi quantità di lavoro considerevolmente diverse. Se si alleggerisce il peso, aumenta l'estensione della contrazione, ma diminuisce il prodotto di lavoro.

Anche per l'uomo, come nel coniglio, dopo un periodo di riposo il muscolo diventa capace di eseguire di nuovo un lavoro notevolmente maggiore che durante la fase di lavoro co-

stante; la curva decrescente accenna pure a subire le modificazioni descritte nel coniglio, a diventar cioè più estesa e più bassa; e la fase costante rappresenta sempre suppergiù la stessa quantità di lavoro, come la prima volta che il muscolo ha lavorato.

Come dissi, credo che queste curve ergografiche dell'uomo furono tutte eseguite in condizioni di lavoro sottomassimale, sebbene con pesi già considerevoli.

Ultimamente Ch. Richet e A. Broca (1) comunicarono all'Accademia delle Scienze di Parigi i risultati di alcune ricerche fatte su loro stessi, destinate a stabilire " dans quelles conditions un muscle donné peut effectuer, sans fatigue notable, " un travail continu, régulier et maximum „ e credettero conchiuderne che " le travail, s'il n'est pas exagéré, rend le muscle " plus apte à un travail ultérieur „.

In realtà essi videro che facendo sollevare al dito medio dei pesi che variavano da 500 a 1200 gr., questo era capace di lavorare col ritmo di 2″ per due o tre ore consecutive; osservarono un massimo di lavoro e di senso di fatica nel primo minuto, un minimo di lavoro dovuto alla contrattura nei tre o quattro minuti consecutivi, ed infine, a partire dal 5° o 6° minuto, un regime regolare *caratterizzato da un aumento graduale e lento.*

Chi ha lette le esperienze sul coniglio, da me esposte, non potrà a meno di esser convinto che non è necessario mettere il muscolo in condizione da produrre una quantità di lavoro così inferiore alla massima, che se ne può ottenere, affinchè il lavoro si protragga in regime regolare per così lungo spazio di tempo; la regolarità dei valori di lavoro che M. Broca e Ch. Richet ottennero dal quinto minuto in poi e lo stesso loro graduale aumento fanno pensare subito che la fase del regime di lavoro descritta dagli autori suddetti corrisponda alla fase di lavoro costante da me osservata nei conigli.

Se poi ancora faccio notare che i valori di lavoro che Broca e Richet ottennero in questa fase sono spesso inferiori, mai su-

---

(1) A. Broca et Charles Richet, *Expériences ergographiques pour mesurer la puissance maximum d'un muscle en régime régulier*, " Comptes rendus hebdomadaires de l'Acad. des Sciences „, tome CXXVI, n. 4, janvier, 1898.

periori a quelli che nelle mie curve ergografiche umane fornirono muscoli che lavoravano sin dal principio pressochè in condizione di lavoro massimale, converrà concludere che le curve di lavoro riferite da quegli autori non rappresentano che curve in condizioni esagerate di lavoro sottomassimale, e sarà, mi sembra, provato all'evidenza che le condizioni di lavoro sottomassimale per peso inadeguato non servono ad economizzare il lavoro di cui il muscolo è capace. Si direbbe che nelle condizioni di lavoro sottomassimali per peso inadeguato l'esplosione chimica produttrice del lavoro è quantitativamente la stessa che nelle condizioni di lavoro massimale: soltanto le prime non sono adatte ad utilizzare in modo completo, trasformandole in lavoro, le forze che dalla reazione chimica si sprigionarono: sicchè una parte di materiale va perduta.

Istituto Fisiologico della R. Università di Torino.

---

*L'Accademico Segretario*
ANDREA NACCARI.

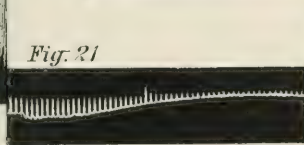
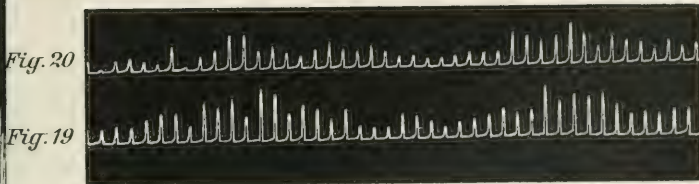
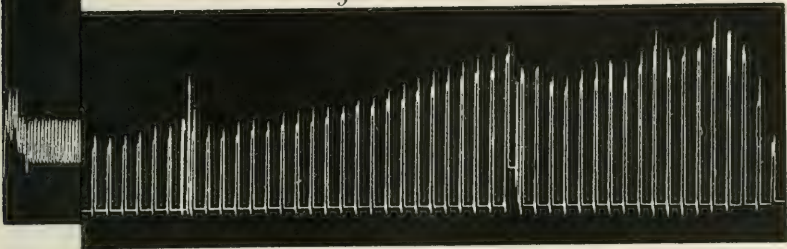
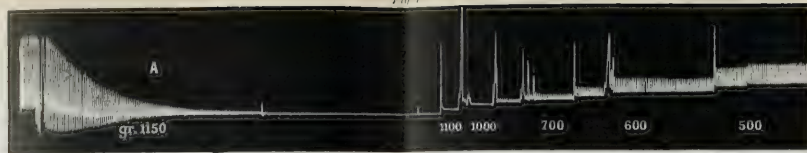
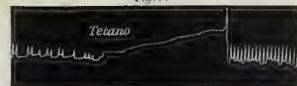
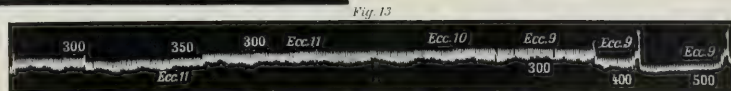
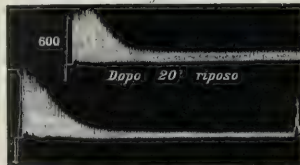
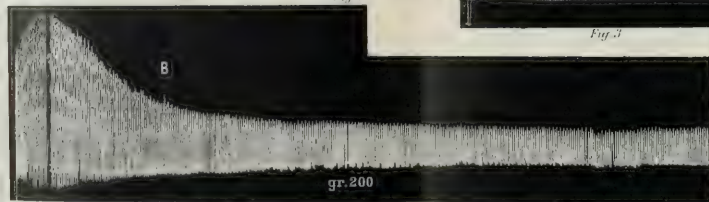
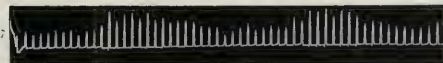
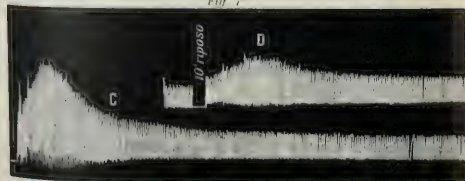
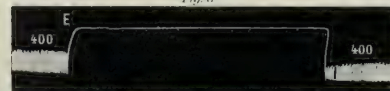
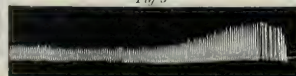
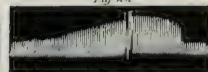



Fig. 14
Tetano
13
Ecc. 10
Ecc. 9
300
Ecc. 9
400
Ecc. 9
500
Fig. 15
Fig. 20
Fig. 19
Fig. 22
Fig. 21
Fig. 12

# CLASSE

DI

# SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

---

## Adunanza del 20 Febbraio 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO BARONE GAUDENZIO CLARETTA
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Socii: PEYRON, ROSSI, MANNO, BOLLATI DI SAINT-PIERRE, PEZZI, FERRERO, COGNETTI DE MARTIIS, GRAF, BOSELLI, PERRERO e NANI Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della precedente seduta.

Il Socio Segretario presenta un esemplare di una medaglia di bronzo coll' effigie del Prof. T. MOMMSEN, fatta coniare dall'Accademia Reale delle Scienze di Berlino in occasione dell'80$^{mo}$ anniversario della di lui nascita, e dalla medesima offerto in dono alla R. Accademia delle Scienze di Torino.

Presenta pure, a nome del Dott. Giuseppe PITRÉ, a cui venne testè conferito il X premio Bressa, due opere da lui offerte in omaggio all'Accademia intitolate: *Biblioteca delle tradizioni popolari siciliane* (Palermo, 1872-97), 20 vol. 16°; *Bibliografia delle tradizioni popolari d'Italia* (Torino-Palermo, 1894), 8°.

A nome dell'Autore Prof. Felice RAMORINO, del R. Istituto di Studi superiori di Firenze, offre in omaggio un opuscolo intitolato: *Cornelio Tacito nella storia della coltura* (Milano, 1898), 8°.

Il Socio E. Ferrero per incarico dell'autore prof. Aristide Marre, Socio corrispondente dell'Accademia, fa omaggio di un estratto della sua nota: *Proverbes et similitudes des Malais avec leurs correspondants en diverses langues d'Europe et d'Asie,* inserita nel vol. 33° degli *Atti* di questa Accademia.

Il Socio S. Cognetti de Martiis presenta una nota del Dott. Costantino Ottolenghi, intitolata: *Le plebi rurali a Roma nel secolo III a. C.* Detta nota verrà pubblicata negli *Atti* accademici.

Quindi la Classe in seduta privata eleggeva, salva la Sovrana approvazione, a Soci nazionali non residenti il sig. Prof. Alessandro D'Ancona della R. Università di Pisa e il sig. Prof. Graziadio Ascoli della R. Accademia scientifico-letteraria di Milano.

Venne pure confermato per un secondo triennio a Direttore della Classe il Socio G. Claretta, salva l'approvazione Sovrana.

# LETTURE

## *Le plebi rurali a Roma nel secolo III a. C.;*

Nota del Dott. COSTANTINO OTTOLENGHI.

Mentre la condizione e le vicende delle plebi rurali nei primi secoli di Roma emergono solo dallo studio complessivo delle forme dell' evoluzione economica e non v' è alcuna iscrizione che risalga a quei tempi la quale porti su di esse alcuna luce, nel sesto secolo oltre alla maggior precisione colla quale si conosce la vita economica del popolo romano, abbiamo fonti contemporanee che delineano chiaramente le condizioni delle plebi rurali. Queste fonti sono: il trattato *de re rustica* di Catone (1) e le *comoedie* di Plauto (2). Dagli insegnamenti che Catone dà sull'agricoltura possiamo dedurre quali fossero le condizioni di fatto a cui essi si riferivano; e da alcune splendide scene rustiche che Plauto ci dipinge possiamo ritrarre interessanti notizie sulla vita rurale dell' epoca sua. Le commedie plautine furono e sono un largo campo di studi letterari e filologici non solo, ma economici, giuridici e sociali. Ricordiamo tra gli scrittori che studiarono le commedie sotto questi tre ultimi aspetti il Costa (3) che ritrasse un completo sistema di diritto privato romano, il Cognetti de Martiis che studiò in esse un lato importante della vita economica della civiltà latina del sesto secolo di Roma (4), e che notò e illustrò in seguito uno schema socialistico contenuto in una commedia plautina (5). Plauto ritrasse nelle sue commedie uomini e riti del tutto romani. Egli

(1) Cato, *De agricultura liber recognovit Henr. Keil.* Lipsiae, 1895.

(2) T. M. Plauti *Comoed. rec. instr. crit. et prol. aux. Frid. Ritschelius, sociis op. ads. G. Loewe, G. Goetz, Fr. Schoell.* Lipsiae, 1871-90. Per la *Mostellaria* v. ediz. del Naudet.

(3) Costa, *Il diritto privato romano nelle commedie di Plauto.* Torino, 1890.

(4) Cognetti de Martiis, *Banche, banchieri ed usurai nelle commedie di Plauto*, in “ Giornale degli economisti „, ottobre 1891 e dicembre 1892.

(5) Cognetti de Martiis, *Uno schema socialistico nell' “ Aulularia „ di Plauto* (“ Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, Vol. XXX, 1894).

dai Greci, dice il Costa, tolse gli argomenti della sua commedia, in Grecia finse la scena, con nomi greci disegnò i personaggi e i luoghi, gli oggetti con cui essi fingono aver pertinenza, ad esempio le varie parti della casa, le vesti; ma all'infuori di questo, l'ambiente, i caratteri, la maniera di muoversi e d'agire è tutta romana. Del resto il popolo romano non sarebbe accorso numeroso ad assistere alle commedie plautine se non avesse ritrovato sulla scena tipi e ambiente romano.

Nel secolo sesto di Roma è già compiuta la trasformazione della mano d'opera rurale. Nei primi secoli il lavoro campestre era circondato d'un'aureola religiosa, e costituiva l'unica occupazione cui potesse attendere l'uomo libero, mentre i mestieri eran riservati agli schiavi e agli stranieri; ma poi le vicende economiche e politiche allontanarono dalla vita rustica. Il prodotto dei campi non retribuiva sufficientemente i lavoratori; molti di essi ingolfati nei debiti, trovandosi nell'impossibilità di pagarli, cadevano sotto l'inesorabile legge che poneva il debitore insolvente alla mercè del creditore e divenivano *addicti*; una gran parte poi abbandonava spontaneamente l'agricoltura per le industrie che già al tempo di Servio Tullio eran state riordinate ed offrivano maggior profitto; e la mano d'opera schiava che sempre più si offriva sul mercato fu adibita anche ai lavori campestri. S'aggiunse poi una grande innovazione avvenuta in occasione della guerra di Veio nel 410 di Roma, che favorì l'esodo del contadino dal campo. Questa innovazione consiste nell'essere stato stabilito per la prima volta il soldo a coloro che partecipassero alla guerra. I lavoratori accettarono con gioia quest'innovazione e abbandonarono i campi dedicandosi alle armi, lasciando che agli schiavi fosse affidata la cura della coltivazione.

E così crebbe grandemente la mano d'opera schiava; essa per la sua deprezzante concorrenza riuscì, come già era avvenuto in Atene, ad abbassare il prezzo della mano d'opera libera e a porla fuori di concorrenza, impedendo ogni possibile ritorno al libero lavoro (1). Risulta chiaramente dalla storia che le

(1) Questi concetti sono maggiormente sviluppati nello studio: *Le plebi rurali a Roma nei primi cinque secoli dalla fondazione della città*, di prossima pubblicazione.

famiglie dei servi rustici crebbero in proporzione della frequenza delle guerre combattute fuori del Lazio, come pure che i patrizi poterono sempre più dilatare le loro proprietà usurpando nuovi terreni senza temere i risentimenti del popolo. Non cercheremo nel secolo sesto di Roma alcuna importante legge agraria per la bassa condizione in cui si trovava l'agricoltura. Dal 387 al 621, cioè per più di due secoli, dalla legge Licinia alle leggi Sempronie e dei Gracchi, la grande questione economica e sociale di Roma era caduta quasi in completo oblio (1). Il sistema di coltura prevalente era la coltivazione in grande a schiavi (2), i poderi romani non erano ancora di molto grande estensione, ma riuniti in gran numero sotto lo stesso proprietario. Così pure le terre che lo Stato affittava finivano per ridursi nel potere di pochi, tanto più che lo Stato stesso desiderava restringere il più possibile il numero degli affittuari per essere più prontamente e sicuramente soddisfatto (3). Del resto era un pensiero economico espresso già nel terzo secolo di Roma, che solo la grande proprietà poteva retribuire bastantemente le fatiche dell'agricoltore (4). Naturalmente questo stato di cose era solo nella campagna romana propriamente detta, e non nelle colonie che si andavano formando, in cui s'iniziava una novella e prospera agricoltura (5): qui la coltivazione ad economia o la colonia parziaria predominavano, nella campagna romana invece, la prima era ridotta a minime proporzioni e retta, benchè in scala minore, collo stesso sistema della coltivazione in grande a schiavi, e la colonia parziaria era ancora qua e là praticata, ma non si confaceva più alle condizioni economiche del tempo.

Nei poderi romani a cui abbiamo accennato il lavoro campestre era assegnato ad una famiglia rustica riunita sotto la direzione d'un sopraintendente esso pure schiavo. Alcune volte il podere era situato in vicinanza della città e allora il padrone vi si recava sovente. A questa vicinanza accennano Catone e

---

(1) De Ruggero, *Enciclopedia giuridica*, voc. *agrariae leges*, p. 760 e sg.

(2) Mommsen, *Histoire romaine*, Vol. I, parte II, pp. 331 e sg.

(3) De Ruggero, *Dizionario epigrafico di antichità romane*, Vol. II, f. 19, 1897, voc. *conductor*.

(4) Dionisio d'Alic., *Antiquitates Romanorum quae supersunt*. Lipsiae, 1881-91, libro 3°, c. LXXIII.

(5) Poggi, *Cenni storici sulle leggi dell'agricoltura*, p. 75 e sg. Firenze, 1845.

Plauto. Catone (1) dà consigli riguardanti il genere di coltura da seguirsi in questi poderi; in alcune commedie di Plauto, ad es. il *Mercator*, la *Casina*, si discorre del podere come se fosse situato a poche ore di lontananza dalla città, e vi si recano frequentemente tanto il proprietario quanto la moglie (2). Spesso però il podere è situato lontano dalla città, talchè il proprietario vi si recava alcune volte a trattenervisi alcuni giorni per vedere a qual punto fossero i lavori, informarsi dei suoi dipendenti e dar castighi e consigli per nuove opere (3). Nel podere stesso infatti, poco discosto dalla villa rustica che serviva d'abitazione per la famiglia rustica e comprendeva quasi sempre la stalla e il granaio, era situata la villa urbana, cioè una casina isolata che serviva di abitazione al padrone. La coltivazione generalmente praticata era quella della vite e dell'ulivo, così che cambiava la specie dei lavoratori secondochè si praticava l'una o l'altra coltivazione. Due persone però le quali non mancavano mai in ogni podere erano il fattore e la fattoressa. Il fattore era esso pure uno schiavo, ma godeva di qualche libertà. Sovente si recava in città a conferire col suo padrone, nel podere aveva la direzione di tutta l'azienda rurale, manteneva la disciplina e provvedeva il vitto (4). Tuttavia di fronte al padrone è un semplice schiavo al quale si nega tutto ciò che s'attiene alla personalità umana. La sua autorità era grande negli altri schiavi rusticani, perchè ne poteva disporre a piacimento; ma quando si recava in città e si trovava cogli altri servi urbani dello stesso padrone perdeva ogni considerazione, era deriso perchè campagnuolo, e solo avevano un ritegno al pensiero che se il padrone li avesse assegnati al lavoro dei campi avrebbero dovuto sottostare ai suoi comandi. Ciò appare chiaramente in diverse commedie come la " Casina „ e la " Mostellaria „. Nella " Casina „ (5)

---

(1) Cato, Op. cit., c. VII.
(2) Plauti *Mercator*, Atto 4° e 5°.
(3) Cato, Op. cit., cap. II (*Patris familiae officia*).
(4) Cato, Op. cit., cap. VII (*Villici officia*).
(5) Plauti *Casina*, I, v. 1 e sg.

Olimpio (*servo di città*).
Non mihi licere meam rem me solum, ut uolo,
Loqui atque cogitare, sine te arbitro?

assistiamo ad un bisticcio tra un servo urbano e il *villicus*. Si deve qui notare la speciale condizione del campagnuolo *Chalinus* che non era solo un servo rustico, ma il capo della famiglia rustica che trova infatti il modo di ricordare all' altro tutti i più duri servigi e castighi a cui potrà assoggettarlo quando il padrone lo invierà al lavoro dei campi; tuttavia dalle parole del servo urbano ci appare la inferiorità in cui lo tiene di fronte a sè stesso che vive in città e gli dice altezzosamente di starsene in campagna e di non impicciarsi degli affari cittadini.

Questa inferiore considerazione in cui è tenuto il servo di campagna di fronte all'urbano solo perchè addetto ai lavori campestri che avevano perduta tutta l'antica reputazione, appare specialmente in una splendida scena della " Mostellaria „ in cui Plauto ci pone innanzi ad un rabbuffo tra un servo di campagna e di città (1). Come nella " Casina „ dà origine a questo rabbuffo la

---

Quid tu, malum, me sequere?
Ch. Quia certum est mihi,
Quasi umbra quodquod ibis tu, te persequi.
Quin edepol etiam, si in crucem uis pergere.
Sequi decretum est. Dehinc coniictio ceterum
Porrisne, necne, clam me sutelis tuis
Praeripere Casinam uxorem, proinde ut postulas.
Ol. Quid tibi negoti mecum est?
Quid ais, imprudens?
Quid in urbe reptas, uillice haud magni preti?
Ol. Libet.
Ch. Quin ruri es, in praefectura tua?
Quin potius, quod legatum est tibi negotium.
Id curas, atque urbanis rebus te abstines?
Huc tu venisti sponsam praereptum meam?
Abi rus, abi dierectus tuam in prouinciam
. . . . . . . . . .
. . . . . . . . . .
V. 32. Ol. Quot te modis,
Si uiuo, habebo in nuptiis miserum meis!
. . . . . . . . . .
V. 38. Ol. . . . . . . quando ad uillam ueneris
Dabitur tibi amphora una, et una semita,
Fons unus, unum ahenum, et octo dolia;
Quae nisi erunt semper plena, ego te implebo flagris.

(1) *Mostellaria*, Att. 1, v. 6.
Tranio. Quid tibi malum hic ante aedis clamitatios?
An ruri censes te esse? abscede ad aedibus.

venuta in città del servo di campagna per alcune incombenze. Il servo urbano lo caccia fuori di casa e lo batte, ma esso (Grunione) non reagisce e mentre gli augura che venga presto il padrone e lo mandi alla macina, gli rimprovera di rovinare il figlio e le sostanze. Il servo urbano invece gli risponde con mot-

---

Abi rus: abi hinc dierecte, abscede ab ianua.
En:
Hocine uolebas?
GRYMIO. Patiar, quor me uerberas?
TR. Quia tu vis.
GR. Patiar sine modo adueniat senex:
Sine modo uenire saluom, quem absentem comes.
TR. Nec ueri simile loquere nec uerum, rupex
Comesse quemquam ut quisquam absentem possiet.
GR. Tu urbanus uero scurra, deliciae popli
Rus mihi obiectas?
V. 20. Nunc dum lubet licetque, pota, perde rem
Corrumque erilem nostrum adulescentem optumum:
Dies noctisque bibite, pergraecamini:
Amicas emite, liberate: pascite
Parasitos: obsonate pollucibiliter.
Haecine mandauit tibi, quom peregre hinc it, senex?
Hocine modo hic rem curatam offendet suam?
Hocine boni esse officium serui existumas,
Ut eri sui corrumpat et rem et filium?
. . . . . . . . . . . . . . . .
V. 34. TR. Quid tibi malum me, aut quid ego agam, curatiost?
An ruri quaeso non sunt quos cures bouis?
Lubet potare, amare, scorta ducere:
Mei tergi facio haec, non tui fiducia.
GR. Quam confidenter loquitur.
TR. At te Juppiter
Dique omnes perdant: fu, aboluisti alium,
Germana inluuies, (rus merum) hircus, hara suis
Cones capro commixta.
GR. Quid uis fieri?
Non omnes possunt olere unguenta exotica.
Si tu oles ***** . . . . . . .
. . . neque superior cum ero accumbere,
Neque tam facetis, quam tu uiuis, uictibus
**** . . . . . . . . . . .
Tu tibi istos habeas turtures piscis auis:
Sine me aliatum fungi fortunas meas.
Tu fortunatu's, ego miser: patiunda sunt.
Meum bonum me, te tuum maneat malum.

teggi, gli dice che puzza d'aglio, che è un villano e che non s'impicci nei fatti altrui, e Grunione ancora si mostra rassegnato, risponde che non tutti posson sapere di pomate forestiere, nè mangiare cibi squisiti; " tu sei felice, aggiunge, ed io misero, ma ben venga a te il tuo malanno „. La scena termina con altre astiose parole del servo urbano.

Un altro fatto importante che si rileva dalla scena riportata è la notevole rettitudine di sentimenti dei servi rustici che fa vivo contrasto colla corruzione dei cittadini. Vediamo infatti il rustico Grunione rimproverare a Trumione servo urbano di mal governare la casa affidatagli dal padrone assente e di condurre alla rovina il figliuolo (1). Pare che questa superiorità morale fosse pure ammessa dagli antichi *scriptores rei rusticae*, essi ebbero infatti pagine frequenti da cui traspira la dolcezza ed indulgenza pei servi rustici. La posizione di fatto in cui si trovavano i servi appartenenti alla famiglia rustica dovette essere certamente migliore di quella dei servi urbani. Essi, eccettuati s'intende quelli destinati ai più infimi servizi, gli ergastuli catenati, condannati bene spesso ai più tormentosi lavori per pena di mali portamenti, *genus ferratile, cruraque signati, nigro liventia ferro,* vivono lontani dal consorzio cittadino, attendono alla coltura dei terreni e godono di una certa indipendenza, sia per la lontananza del padrone, sia per la natura degli uffici cui sono destinati. Essi hanno facilitazioni maggiori dei servi cittadini ad accumularsi un loro peculio (2) e vivono di una vita tranquilla con stabilità già allora di rapporti sessuali. Quanto all'indipendenza dei servi rustici e alla fissità dei loro rapporti coniugali troviamo accenni in una commedia di Plauto, nella " Casina „, in cui il servo rustico Olimpione si propone la vita che dovrà condurre ottenuta Casina in isposa, e negli appellativi spesso usati nelle commedie di Plauto dagli schiavi di *pater, avus, proavus* (3). I rapporti tra i

---

(1) Costa, *Le nozze servili nel diritto romano,* " Arch. giurid. „, Vol. XLII, p. 213

(2) Plauti *Truculentus*, Atto 2°, v. 80.

(3) Plauti *Casina*, Atto 1°, v. 24.

Quando ego eam mecum rus uxorem obduxero
Rure incubo usque in praefectura mea.

Cfr. Costa, Op. cit., p. 215: la fissità di rapporti dei servi rustici ha pure

coniugi, di soggezione della donna all'uomo e di amorevolezza e di fedeltà di questa a quello, sono rivelati dagli avvertimenti che Catone dà al villico nel suo trattato di agricoltura. La regolarità poi in cui era tenuta la famiglia rustica nello stesso interesse del padrone, assicurava al servo un vitto povero ma sicuro.

La castalda o villica è un'altra persona indispensabile della famiglia rustica, è quella che il padrone dà in moglie al fattore per aiutarlo nelle faccende domestiche. Essa cura le pratiche religiose e si occupa in special modo del vitto della famiglia rustica (1). Abbiamo poi gli operarii, i bifolchi, ecc. Naturalmente variava il numero secondo l'estensione del podere. Così per un podere che avesse un'area di 240 iugeri e fosse coltivata ad ulivo eran necessari secondo Catone 13 lavoratori tra castaldi, bifolchi, sottobifolchi, pecorai (2). Maggior lavoro richiedeva il podere a vigna; eran reputati necessari per la coltivazione d'un semplice podere di 100 iugeri, sedici uomini tra castaldi, operai roncaioli (3). Naturalmente questi operai sono fissi nel podere e non si possono allontanare, ma alcune volte quando la necessità lo richiedeva eran sostituiti od aiutati dagli schiavi dei poderi vicini i cui proprietari ne ricevon la mercede. Il lavoratore è parificato ad un bue, il lavoro è indefesso ed interrotto. Se la stagione è piovosa, si compiono lavori che non richiedono il bel tempo: mondar la semenza, aggiustar le vecchie corde, farne delle nuove; durante le ferie si astengono dai lavori proibiti dal culto e ne compiono altri permessi, come accomodar le strade pubbliche, zappar l'orto. Quando l'agricoltura era circondata d'un'aureola religiosa, i giorni festivi eran giorni di quiete, l'uomo doveva agli dei tutte le sue azioni, tutti i suoi sentimenti, tutti i suoi pensieri. Ma poi, mentre la mano d'opera libera emigrava dal campo, si vennero via via permettendo nei giorni festivi alcune occupazioni; i libri

grave conferma nelle numerosissime epigrafi sepolcrali che trovansi dedicate al coniuge servo premorto dal superstite nella Calabria, nel Piceno e nella Sicilia. — V. Mommsen, *Corp. insc. lat.*, IX, in 313, 365, 419 ecc.

(1) Cato, Op. cit., cap. CLII.

(2) Cato, Op. cit., cap. XII.

(3) Cato, Op. cit., cap. XIII. Cfr. per l'interpretazione di questi cap., Varro, *De re rustica*, cap. XVIII.

dei pontefici indicarono con minuziosa cura tutti i lavori che gli dei permettevano (1), e gli scrittori che trattarono di economia rurale, Catone, Varrone, Columella, ad essi largamente accennarono. In sostanza, nel giorno di festa si doveva lasciare a parte ogni preoccupazione d'interesse e di lucro, ma era permesso il lavoro che avesse lo scopo non di produrre, ma di conservare i beni presenti e far fronte alle necessità urgenti. E così cambiava la specie di lavoro che nei giorni festivi la *famiglia rustica* doveva compiere, ma non si riconosceva ad essa il diritto al riposo.

Lo scopo era essenzialmente l'utile del padrone; d'ogni cosa si traeva profitto, gli arnesi inutili o resi inservibili e gli schiavi vecchi inabili al lavoro eran venduti. Colla violenza poi e colla minaccia si obbligavano gli schiavi ad un continuo lavoro; gli indolenti venivan costretti a lavorare coi ceppi ai piedi, e giunta la notte si gettavano nel carcere degli schiavi; le punizioni più gravi consistevano nell'invio alla cava delle pietre e nell'invio al mulino. Nella cava delle pietre avevano i fianchi stretti da grossi ferri ed eran costretti a cavarne otto o dieci al giorno a piacimento del padrone; non avevan pace finchè fosse terminato il lavoro prefisso e di notte alcune volte dovevano sopportare la catena al collo (2). Nel mulino invece erano costretti a forza di braccia a farne girare la ruota e colla pelle livida pei colpi

---

(1) Daremberg, *Dictionnaire des antiquités grecques et romaines*, voc. *feriae*. Tome deuxième, 1896, pag. 1042.

(2) Plauti *Famulus*, IV, 11.

Plauti *Captivi*, III, v. 279.

Hegio. . . . . . . . . . . ducite
Ubi ponderosas, crassas capiat compedis:
Inde ibis porro in latomias lapidarias.
Ibi quom alii octonas lapides ecfodiunt, nisi
Cotidiano sesquiopus confeceris,
Sescentoplago nomen indetur tibi.
Aristophontes. Per deos atque homines ego te optestor, Hegio,
Ne tu istunc hominem perduis.
Heg. Curabitur:
Nam noctu neruo uinctus custodibitur,
Interdius sub terra lapides eximet.
Din ego hunc cruciabo, non uno apsoluam die.

e il dorso solcato di piaghe e i piedi in catene e la fronte impressa d'un marchio, davano di sè orribile aspetto.

Il vitto della famiglia rustica era differente secondo le diverse stagioni. Nell'inverno ciascun lavoratore riceveva in ragione di quattro moggi di grano e in ragione di quattro e mezzo d'estate. Per companatico ricevevano secondo le stagioni ora olive cascaticcie e uova stagionate, ora salamoia e aceto. Di olio riceveva ognuno un sestaio al mese, di sale un moggio a testa all'anno. Dopo la vendemmia si beveva alcuni mesi futecchia; la quantità di vino che si beveva dai singoli uomini era in generale di 8 quadrantali a testa (1). In quanto alle vestimenta, la famiglia riceveva un anno sì e un anno no una tonaca di tre piedi e mezzo e dei sai; le vesti vecchie servivano a far schiavine. Un anno sì e un anno no, si davan loro gli scarponi (2). Si vede quindi quanta piccola spesa portasse al padrone il mantenimento della famiglia rustica. Il prezzo medio d'uno schiavo da campagna era valutato da Catone secondo Plutarco di 1500 dramme (1300 L.) (3); ma Livio ci riferisce che Catone nell'esercizio della censura valutava gli schiavi dieci volte più del prezzo reale per sottoporlo alla tassa del 3 per 1000. Troviamo in Plauto un accenno alla vendita d'un fanciullo per 6 mine (548 lire) (4) ed a prezzi più elevati che il Wallon dice in molti casi esagerati (5). Non ci è dato di conoscere la potenza d'acquisto di queste somme, ma da un passo del " Truculentus „ di Plauto (6), in cui Strabace ci dipinge come avvenne la riscossione di 20 mine (1820 L.) equivalente di alcune pecore tarantine vendute da suo padre, è

(1) Cato, Op. cit., cap. LXV, LXVI, LXVII, CXIII. Vedi nell'ediz. ven. del 1792 lo specchio delle misure, monete, pesi, cui accenna Catone.

(2) Cato, Op. cit., cap. LXVIII.

(3) Plinio, *Hist. nat.*, X, 43. — Plutarco in *Catone*, 4.

(4) Plauti *Captivi*, atto V, v. 57.

(5) Wallon, *Histoire de l'esclavage dans l'antiquité*. Paris, 1879, vol. II pag. 164. Cfr. Abignente, *La schiavitù*, Torino, 1890, p. 75.

(6) Plauti *Truculentus*, Atto III, v. 1:

Strabax. Rus mane dudum hinc ire me iussit pater
Ut bubus glandem prandio deposuerem.
Post illoc quam ueni, aduenit, si deis placet,
Ad uillam, argentum meo qui debebat patri,
Qui ouis Tarentinas erat mercatus de patre.

lecito supporre il poco valore che si attribuiva alle venti mine che erano appunto presso a poco il prezzo d' acquisto di due schiavi. Questa supposizione acquista maggior fondamento se consideriamo l'alto prezzo delle ammende e la grande affluenza a Roma in questo secolo dei metalli preziosi, che aumentò la ricchezza, determinando tra il 241 e 215 a. C. l'aumento del grado di fortuna necessario per appartenere alle diverse classi (1). S'aggiunga a ciò un fatto della massima importanza: la fissità di rapporti sessuali che abbiam veduto esistere presso gli schiavi rurali non era solo una guarentigia di buona condotta e fedeltà, ma una fonte d'arricchimento pei figli nascituri, quindi si vede che il capitale speso per l'impiego della mano d'opera schiava veniva ad esser molto minore. V' eran poi alcuni speculatori i quali mantenevano un certo numero di schiavi e si assumevano determinati lavori di coltivazione per conto di proprietari o fornivano a quest'ultimi operai e gli strumenti verso mercede (2). I proprietari eran tenuti a concedere che i proprî servi rustici attendessero temporaneamente ai pubblici lavori; già allora esistevano le comandate, ma non ci è dato conoscere se fossero spesati a conto dell'erario o del rispettivo padrone e con che regole si procedesse.

Ad aiutare la famiglia rustica interveniva alcune volte la mano d'opera libera; ciò avveniva in occasione della mietitura delle biade e pel taglio del fieno, quando in generale non bastano le forze ordinarie e si ha bisogno d'un certo numero di lavoratori avventizî, e nelle vallate di Rieti tutti gli anni i montanari dell'Umbria discendevano per locare la loro giornata (3). Il battitore e i falciatori ricevevano in retribuzione una quota

---

Querit patrem: dico esse in urbe; interrogo,
Quid eum velit.
Homo cruminam sibi de collo detrahit,
Minas uiginti mihi dat, accipio lubens
Condo in cruminam: ille abiit, ego propere minas,
Ouis in crumina, hac in urbem detuli.

(1) Belot, *De la révolution écon. et mon. qui eut lieu à Rome au milieu du III$^{me}$ siècle avant l'ère chrétienne.* Paris, 1885, pag. 87.

(2) Bertagnolli, *Le vicende dell'agricoltura in Italia,* Firenze, 1884, p. 109.

(3) Humbert, *Sur la condition des ouvriers libres chez les Romains,* " Recueils de l'Académie de législation de Toulouse ", 1868, T. XVII, p. 399.

parte del prodotto e il salario abituale d' un *operarius* era di 12 assi (60 cent.). Ma eran pochi questi liberi lavoratori, perchè l'abbondanza degli schiavi rendeva inutile per la maggior parte dell'anno la loro opera e perchè trovavano un facile ricovero gl'intriganti nella capitale, i buoni nelle colonie; nel secolo sesto queste aumentarono grandemente, ma pochi si iscrivevano nei ruoli per la ripartizione delle terre, cosicchè venivano a distribuirsi lotti di una certa estensione a gente che non era capace di metterli a produzione (1).

Alcune operazioni agricole che richiedevano maggior perizia non si lasciavano alla famiglia rustica, ma si davano ad impresa. Così infatti avveniva per la vendemmia o pel raccolto delle olive che si lasciava ad un imprenditore che colla sua gente, libera o schiava propria o altrui, faceva la vendemmia e raccoglieva le olive sotto la sorveglianza di alcune persone a ciò dal padrone destinate. Egli ne curava la torchiatura e ne rimetteva il prodotto al proprietario, dando sicurtà che il lavoro sarebbe stato compiuto a dovere e doveva risarcire i danni avvenuti per causa sua (2).

La grande economia era pure applicata nei poderi a pastura i quali raggiungevano generalmente una superficie notabilmente maggiore del podere aratorio (3). Il sistema d'amministrazione era lo stesso, solo che in luogo del fattore c'era un mastro pecoraio; tutti gli altri pastori erano schiavi che albergavano la maggior parte dell'anno sotto tettoie o frascati sovente distanti molte miglia dalle loro abitazioni. Ai confini dei grandi possessi troviamo ancora qua e là praticata l'economia dei piccoli proprietari, ma questa diversificava dalla grande solo per esser basata su una scala minore.

Il modo di ripartizione dei prodotti seguìto nel sistema a colonia parziaria è chiarito da due passi di Catone. Nell' uno

---

(1) Livio, XXXIX, 44. Nel 559 si inviarono due colonie a Pesaro e Potenza e si assegnarono 6 iugeri per capo. Nel 569 (Livio, XXXIX, 55; XL, 34) una colonia ad Aquileia con 50 iugeri per capo, una a Parma con 8 iugeri ed una nell'agro Calabrese con 10 iugeri. Nel 572 (XLI, 13), un'altra a Lucca con 51 iugeri e mezzo.

(2) Cato, Op. cit., cap. CLIII.

(3) Mommsen, Op. cit., Vol. I, parte 2ª, p. 339 e sg.

(*Politionem quo pacto dari oporteat. In agro Casinato et Venafro in loco bono parte octava corbi dividat, satis bona septima, tertius loco sexta; si granum modio dividat parte quinta... ordeum quinto modio, fabam quinto modio dividat*) dice che nei territori di Cassino e Venafro si darà l'ottava parte delle spighe in terreni buoni, la 7ª in terreni mediocri, la 6ª in terreni infimi, oppure il 5° del grano battuto e nei migliori terreni di Venafro il 5° delle spighe e dell'orzo (1). Nell'altro passo (*Vineam curandam partiario foenum et fabulam quod bubus satis siet, qui illic sient. Caetera omnia pro indiviso*) afferma che il coltivatore riterrà quella parte che sarà necessaria pel mantenimento del bestiame delle colonie, tutti gli altri prodotti saranno divisi a metà (2).

Sorse una prima disputa sul modo d'interpretare il primo passo e alcuni, tra cui il Poggi e il Rodbertus, negarono trattarsi qui di colonia parziaria, dicendo che il *politor* non è un colono parziario, ma un semplice operaio impiegato solo in certi tempi nei lavori contadineschi. Quasi tutti i commentatori di Catone al contrario traducono colono parziario. I due capitoli (CXLV e CXLVI), dice il Bertagnolli, dipendono da un solo titolo " Politionem pro pacto dari oporteat „ posto a fianco al cap. CXLV; Catone stesso parla al cap. XVI del *politor* come di colono parziario e questo significato dà pure Celso a quel vocabolo, ove dice " aut agrum politori damus in commune quaerendis fructibus „.

Una questione più grave è di sapere se la quota enunciata da Catone, cioè l'ottavo delle spighe, il quinto del grano battuto, fosse la porzione spettante al padrone o quella spettante al colono. Il Bertagnolli crede spettasse al padrone e che il colono ricevesse la parte maggiore, cioè i $^{7}/_{8}$ delle spighe, i $^{4}/_{5}$ del grano, ecc. (3). A noi pare, interpretando letteralmente il testo e confrontandolo colle condizioni dell'economia rurale di quei tempi, che la porzione minore, quella appunto accennata da Catone, fosse quella che spettasse al lavoratore. La stessa

---

(1) Cato, Op. cit., cap. CXLV.
(2) Cato, Op. cit., cap. CXLVI.
(3) Bertagnolli, *La colonia parziaria*, Roma, 1877, p. 20.

porzione troviamo assegnata da un' antica legge indiana al lavoratore parziario (1). Essa era quasi insufficiente per vivere, si dice dai fautori della contraria opinione; ciò è vero, ma era una necessaria conseguenza della concorrenza della mano d'opera schiava che grandemente era offerta sul mercato, molto preferita per la minor spesa che portava e per la maggior quantità di lavoro che si credeva producesse. Solo qualche secolo dopo, ai tempi di Columella, si comprese esser la mano d'opera schiava inferiore alla libera. Dopo Catone nè Varrone, nè Columella accennarono alla colonia parziaria; questa andò disparendo di fronte all'estendersi della grande economia a schiavi e cominciò la rovina dell'agricoltura romana.

Da queste indagini sulle plebi rurali del III sec. a. C. un fatto appare evidente. La numerosa classe di liberi lavoratori avventizi che s'era venuta formando nei secoli anteriori intorno ad una minoranza di lavoratori delle proprie terre, andò sparendo, lasciando luogo ad una folla di schiavi rusticani lavoranti le estese proprietà dei padroni. Esiste pure la mano d' opera libera, ma è scarsa, deprezzata e adibita solo in speciali contingenze. Questa minoranza dà ancora luogo a due sistemi, al sistema della coltivazione ad economia e alla colonia parziaria; ma il primo perde i caratteri suoi proprii e vien modellandosi sul sistema della coltivazione in grande a schiavi, allargando i confini della proprietà rurale; la colonia parziaria trova un ambiente economico contrario alla sua esistenza e va sparendo. I lavoratori liberi, sia avventizi che coloni parziari, non ricevono sufficiente retribuzione e stanno peggio degli schiavi rusticani. Questi infatti non hanno come gli altri la preoccupazione del dimani, trovano nella " villa rustica „ il necessario alla vita, sono oggetto di cura del proprietario, pel cui profitto è necessaria la buona condizione degli schiavi e degli animali, e posson

(1) Nel diritto indiano troviamo una legge " la Narada „ assegnata ai primi secoli dell'era volgare, che fissa ad un decimo la partecipazione del lavoratore al prodotto. — Max Müller, *The sacred books of East translated by various oriental scholars*. Oxford, 1889. Vol. XXXIII. *The minor law books*, titolo 6, art. 3: " Where the amount of the wages has not been fixed, (the servant of) a trades, a herdsman, and an agricultural servant shall respectively taxe a tenth part of the profit (derived from the sole of mercandise) of the seed of cows, and of the grain „.

fruire d'una certa indipendenza. La condizione di fatto poi è anche migliore di quella degli schiavi urbani, quantunque sien tenuti in più bassa considerazione perchè campagnuoli. È lecito pure dedurre, dalle indagini fatte, la frequenza del padrone a visitare i propri fondi rustici, ma questa era quasi impossibile ad effettuarsi quando il fondo era situato lontano dalla città ove abitava, e diventava infruttuosa quando le terre si estendevano in grandi dominii, e fu questa non ultima causa della necessità in cui si trovarono più tardi i proprietari di lasciare incolta la zona estrema dei latifondi e concentrare la coltivazione nelle vicinanze della dimora signorile.

Laboratorio di Economia Politica
della R. Università di Torino.

---

*L'Accademico Segretario*
CESARE NANI.

Torino, VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

# CLASSE

DI

## SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

### Adunanza del 27 Febbraio 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Cossa, Vice-presidente dell'Accademia, Berruti, D'Ovidio, Spezia, Camerano, Segre, Peano, Volterra, Jadanza, Foà, Guareschi, Fileti e Naccari Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della precedente seduta.

Il Presidente partecipa che con R. Decreto 20 gennaio 1898 egli fu confermato nella sua carica e che con altro R. Decreto in data 6 febbraio 1898 il Socio Naccari fu confermato nell'ufficio triennale di Segretario della Classe.

Il Socio D'Ovidio presenta una memoria stampata del Prof. Francesco Caldarera dell'Università di Palermo, intitolata: *Sulle equazioni lineari ricorrenti trinomie.*

Il Segretario presenta un volume intitolato: *L'opera botanica di Ulisse Aldrovandi (1549-1605),* inviato in omaggio all'Accademia dall'autore di esso Prof. Oreste Mattirolo dell'Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio corrispondente dell'Accademia.

Presenta pure una commemorazione del Prof. A. Des Cloizeaux già Socio corrispondente dell'Accademia, inviata in dono dal Prof. A. Lacroix, Direttore del Laboratorio di Mineralogia al Museo di storia naturale di Parigi.

Vengono poscia accolte per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° *Sulla presenza del tellurio nei prodotti del cratere dell'isola Vulcano (Lipari)*, nota del Socio Cossa,

2° *Sopra una classe di equazioni dinamiche*, nota del Socio Volterra,

3° *Osservazioni sull'etere acetilcianacetico*, nota del dottor Luigi Sabbatani, presentata dal Socio Guareschi,

4° *I gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio*, nota del Dott. Gino Fano, presentata dal Socio Segre.

Lo stesso Socio Segre legge anche a nome del Socio D'Ovidio la relazione sulla memoria del Dott. Beppo Levi: *Sulla varietà delle corde di una curva algebrica*. La relazione si chiude con la proposta di leggere la memoria alla Classe. La proposta viene approvata e la memoria dopo la lettura viene accolta nei volumi accademici.

Il Socio Camerano legge anche a nome del Socio Bizzozero la relazione sulla memoria del Dott. Ermanno Giglio-Tos intitolata: *Sui trombociti degli Ittiopsidi e dei Sauropsidi*. Conforme alle conclusioni della relazione la Classe approva la lettura e poi accoglie la memoria per l'inserzione nei volumi accademici.

In seduta privata il Presidente comunica alla Classe una lettera del Prof. Giovanni Arcangeli dell'Università di Pisa recentemente nominato Socio corrispondente. Questi si dice dolente di non poter accettare la nomina, perchè le molte sue occupazioni gli impedirebbero di prendere parte ai lavori dell'Accademia.

La Classe prende atto di questa lettera.

La Classe procede quindi all'elezione del Direttore di Classe e riesce eletto il Socio Prof. Giulio Bizzozero, salvo l'approvazione sovrana.

# LETTURE

## *Sulla presenza del tellurio nei prodotti del cratere dell'isola Vulcano (Lipari);*

Comunicazione del Socio ALFONSO COSSA.

In una memoria presentata all'Accademia dei Lincei il 2 dicembre 1877 (1), feci conoscere il risultato delle mie ricerche eseguite sulla composizione dell'allume potassico, che in grande quantità trovasi aderente alle pareti interne del cratere dell'isola Vulcano in prossimità delle aperture dei fumaiuoli, mettendo in evidenza, come commisti all'allume potassico trovansi in proporzioni variabili gli allumi di rubidio, di cesio e di tallio.

Posteriormente, cioè nell'anno 1882, studiando le concrezioni stalattitiformi, che cementano a guisa di tufo frammenti di trachiti e di lave decomposte, che abbondano pure nella Fossa di Vulcano, vi trovai in copia grande del fluosilicato potassico cristallizzato, che descrissi come una nuova specie minerale denominandola: *Hieratite.* Questo minerale si trova associato oltre che agli allumi sovrindicati, a zolfo selenifero, a cloruro d'ammonio, ad acido borico, a solfato sodico, glauberite ed a composti solubili nell'acqua di arsenico, di ferro, di zinco, di stagno e bismuto (2).

Nella scorsa estate mi sono rimesso a studiare il residuo del materiale che aveva raccolto personalmente venti anni prima durante il mio soggiorno alle isole Lipari, coadiuvato in quel tempo dal Ministero d'Agricoltura, e dal Generale comandante la Divisione militare di Messina.

Le nuove ricerche eseguite nello scorso anno furono indi-

(1) " Memorie della Reale Accademia dei Lincei ", Serie III, vol. II.
(2) " Transunti della R. Acc. dei Lincei ", Serie 3ª, vol. VI.

rizzate specialmente allo studio delle sostanze insolubili nell'acqua componenti le concrezioni stalattitiformi precedentemente esaminate.

Il materiale di cui potei ancora disporre, già esaurito prima con acqua e poi con solfuro di carbonio per eliminare lo zolfo selenifero, fu ripetutamente trattato a caldo con acido nitrico diluito con metà volume di acqua. Nella soluzione nitrica, per l'azione lungamente protratta di una corrente di acido solfidrico, si depose una quantità relativamente molto grande di solfuro d'arsenico commisto a solfuri metallici, che potei separare con ripetuto trattamento con ammoniaca. In questi solfuri ho riscontrato una sostanza che non presentava i caratteri distintivi dei metalli già prima trovati nella parte solubile nell'acqua delle concrezioni di Vulcano.

Mi sono lusingato per qualche tempo d'aver a che fare con un nuovo elemento; ma un accurato esame mi ha convinto che si trattava di tellurio, che potei con sicurezza identificare colla reazione caratteristica del Müller, col modo di comportarsi col cianuro potassico e coll'analisi spettrale. Da tre chilogrammi di materiale potei separare, vincendo molte difficoltà, circa due grammi e mezzo di tellurio affatto puro.

Lo scopo di questa breve comunicazione non è solo di far conoscere il fatto, che ritengo interessante, della presenza del tellurio finora non avvertita in minerali italiani (1), ma ancora di segnalare ai cultori della chimica mineraria i prodotti del cratere di Vulcano, che si distinguono dagli ordinarii prodotti vulcanici anche per la grande quantità di fluoro che essi contengono, come un materiale di ricerche feconde di importanti risultati.

---

(1) Questa scoperta del tellurio nei prodotti del cratere dell'isola Vulcano fu annunziata nel N. 17 della " Rassegna mineraria ", pubblicato in Roma colla data 11 dicembre 1897.

## *Sopra una classe di equazioni dinamiche;*

Nota del Socio VITO VOLTERRA.

Nella dinamica dei sistemi rigidi liberi non soggetti a forze le tre componenti della velocità traslatoria e le tre componenti della velocità rotatoria soddisfano ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in cui questi sei elementi compariscono da soli.

La questione si presenta in modo analogo allorchè si studia il moto di un corpo rigido immerso in un fluido indefinito.

In uno studio fatto qualche tempo fa (*) sulla rotazione spontanea dei corpi in cui esistono sistemi ciclici, ho mostrato come le tre componenti della rotazione del corpo e tutte le velocità cicliche possono determinarsi partendo da un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in cui figurano queste sole quantità.

Possono immaginarsi infiniti altri casi nei quali caratterizzando il moto istantaneo di un sistema mediante dei parametri indipendenti, allorchè il sistema è abbandonato alla propria inerzia, le equazioni del moto possono separarsi in due gruppi, il primo dei quali è un sistema di equazioni differenziali del primo ordine rapporto ai detti parametri, che soli compariscono in esse come elementi variabili. Il problema della determinazione dei parametri stessi in funzione del tempo, costituisce quindi una questione a sè che può discutersi indipendentemente dalla completa questione dinamica.

Colle presenti ricerche mi sono proposto di iniziare uno studio sistematico di tutti questi casi e delle corrispondenti equazioni differenziali. Il tipo di esse si riconnette direttamente

(*) *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi ciclici,* “ Rend. Acc. dei Lincei „, 2° sem. 1895. — *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici,* “ Annali di Matematica „, T. XXIV.

a quello delle equazioni di Eulero dei sistemi rigidi e a quello delle equazioni di Kirchhoff del moto di un corpo immerso in un fluido.

Questo studio non si limita ai soli sistemi *holonomi* (*), ma comprende il caso generale di tutti quei sistemi soggetti al principio fondamentale della dinamica di Lagrange, i cui vincoli si rappresentano mediante equazioni fra le coordinate ed i loro differenziali. Coll'abbracciare il caso dei sistemi *non holonomi* il campo di applicazione delle ricerche stesse viene notevolmente allargato.

I parametri indipendenti che individuano il moto istantaneo di un sistema possono chiamarsi le *caratteristiche del moto*, onde può darsi il nome di *moti spontanei a caratteristiche indipendenti* a quelli che formano il soggetto delle presenti ricerche.

In questa prima Nota mi sono limitato allo studio degli integrali di 1° e 2° grado ed alla corrispondente riduzione delle equazioni.

Esaminerò in una prossima Nota alcuni casi notevoli, approfondendo lo studio della integrazione delle equazioni differenziali; ed in una successiva studierò i moti permanenti ricercando le condizioni della loro stabilità ed instabilità.

## § 1. — Caratteristiche del moto e calcolo delle loro variazioni.

1. — Consideriamo un sistema materiale costituito da $n$ punti le cui coordinate siano $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{3n}$, e supponiamo che le componenti delle velocità dei punti siano funzioni lineari di $\nu$ parametri arbitrarii $p_1, p_2, \dots p_\nu$; per modo che si abbia

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \xi'_i = \sum_1^\nu {}_s\, \xi_{is}\, p_s \tag{1}$$

ove le $\xi_{is}$ sono funzioni delle coordinate $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{3n}$.

---

(*) La distinzione dei sistemi dando loro il nome di sistemi *holonomi* e *non holonomi* è dovuta ad Hertz (*Die Prinzipien der Mechanik*, I Buch, Abschnitt 4). I sistemi non holonomi però erano già stati soggetti di studio (Vedi A. Voss., *Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik*, " Mathem. Annalen ", XXV Band). Confronta pure O. Hölder, *Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis* (" Nachr. von der K. Gesell. der Wissensch. zu Göttingen ", 1896).

Ad ogni configurazione che assume il sistema corrispondono infiniti moti istantanei che saranno caratterizzati dai valori che si possono dare arbitrariamente ai $\nu$ parametri $p_1\, p_2 \ldots p_\nu$. Essi perciò si chiameranno *le caratteristiche del moto del sistema.*

Ogni sostituzione lineare invertibile eseguita sulle $p_1, p_2 \ldots p_\nu$ trasforma queste caratteristiche in altre caratteristiche.

Evidentemente ogni qualvolta i legami del sistema si esprimeranno mediante relazioni, fra le coordinate e le componenti delle velocità dei punti, e rispetto a queste ultime, le relazioni stesse saranno lineari ed omogenee, potremo scrivere le (1). In tal modo viene a trattarsi tanto il caso di sistemi *holonomi*, quanto qnello di sistemi *non holonomi.*

2. — Per avere un sistema di spostamenti virtuali basterà prendere le

$$(2) \qquad \delta\xi_i = \sum_1^\nu{}_s\, \xi_{is}\, \delta\omega_s$$

ove le $\delta\omega_s$ sono quantità infinitesime indipendenti. Esse si chiameranno le *caratteristiche dello spostamento virtuale del sistema.* Dalle formule (1) e (2) segue immediatamente

$$(3) \qquad \delta\xi_i = \sum_1^\nu{}_s\, \frac{\partial \xi'_i}{\partial p_s}\, \delta\omega_s.$$

3. — Denotiamo con $m_i$ la massa del punto materiale di cui una delle coordinate è $\xi_i$. Allora la forza viva del sistema sarà data da

$$(4) \qquad \mathrm{T} = \frac{1}{2} \sum_1^{3n}{}_i\, m_i\, \xi'^2_i = \frac{1}{2} \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_s\, \mathrm{E}_{rs}\, p_r\, p_s\,,$$

avendo posto

$$(5) \qquad \mathrm{E}_{rs} = \mathrm{E}_{sr} = \sum_1^{3n}{}_i\, m_i\, \xi_{is}\, \xi_{ir}\,.$$

Le quantità $\mathrm{E}_{rs}$ risultano quindi delle funzioni di $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_{3n}$.

In virtù d'un teorema ben noto sulle forme quadratiche sarà possibile cambiare in infiniti modi le caratteristiche $p_s$ in altre $q_s$, per mezzo di una sostituzione lineare invertibile, in modo da porre la forza viva sotto la forma

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \sum_1{}_s\, q_s^2.$$

Potremo anche in infiniti modi, mediante sostituzioni reali invertibili, ridurre la espressione della forza viva ad una forma definita positiva arbitraria.

4. — Calcoliamo ora le variazioni delle caratteristiche corrispondenti ad uno spostamento virtuale del sistema.

Partiamo perciò dalla relazione

$$\delta \xi'_i = \frac{d}{dt} \delta \xi_i .$$

A cagione delle (1) e (2), avremo

$$\sum_1^\nu {}_s \xi_{is} \delta p_s + \sum_1^\nu {}_s p_s \delta \xi_{is} = \sum_1^\nu {}_s \xi_{is} \frac{d \delta \omega_s}{dt} + \sum_1^\nu {}_s \delta \omega_s \frac{d \xi_{is}}{dt} .$$

Ma

$$\delta \xi_{is} = \sum_1^{3n} {}_h \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} \sum_1^\nu {}_r \xi_{hr} \delta \omega_r$$

$$\frac{d \xi_{is}}{dt} = \sum_1^{n} {}_h \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} \sum_1^\nu {}_r \xi_{hr} p_r$$

quindi la equazione precedente diverrà

$$\sum_1^\nu {}_s \xi_{is} \left( \delta p_s - \frac{d \delta \omega_s}{dt} \right) = \sum_1^{3n} {}_h \sum_1^\nu {}_s \sum_1^\nu {}_r \xi_{hr} \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} (p_r \delta \omega_s - p_s \delta \omega_r).$$

Moltiplichiamo ambo i membri di queste equazioni per $m_i \xi_{ig}$ e sommiamo per tutti i valori $1, 2 \ldots 3n$ di $i$. Tenendo presente la (5) otterremo

$$\sum_1^\nu {}_s \mathrm{E}_{sg} \left( \delta p_s - \frac{d \delta \omega_s}{dt} \right) = \sum_1^\nu {}_s \sum_1^\nu {}_r b_{sr}^{(g)} (p_r \delta \omega_s - p_s \delta \omega_r) \tag{6}$$

avendo posto

$$b_{sr}^{(g)} = \sum_1^{3n} {}_h \xi_{hr} \sum_1^{3n} {}_i m_i \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} \xi_{ig} . \tag{7}$$

5. — Sia

$$\Delta = \begin{vmatrix} E_{11}, & E_{12} & \ldots\ldots & E_{1\nu} \\ E_{21}, & E_{22} & \ldots\ldots & E_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ E_{\nu 1}, & E_{\nu 2} & \ldots\ldots & E_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

$$e_{rs} = \frac{\partial \log \Delta}{\partial E_{rs}}:$$

le quantità $e_{rs}$ saranno i coefficienti della forma reciproca della (4) e avremo che dalle (6) seguiranno le altre

$$\delta p_u - \frac{d\delta\omega_u}{dt} = \sum_1^\nu{}_s \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_g e_{gu} b_{sr}^{(g)} (p_r \delta\omega_s - p_s \delta\omega_r)$$

$$= \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_r \left[\sum_1^\nu{}_g e_{gu} (b_{sr}^{(g)} - b_{rs}^{(g)})\right] p_r \delta\omega_s.$$

Ponendo dunque

$$a_{sr}^{(u)} = \sum_1^\nu{}_g e_{gu} (b_{sr}^{(g)} - b_{rs}^{(g)}) \tag{8}$$

l'equazione precedente si scriverà

$$\delta p_u = \frac{d\delta u_u}{dt} + \sum_1^\nu{}_s \sum_1^\nu{}_r a_{sr}^{(u)} p_r \delta\omega_s. \tag{A}$$

## § 2. — Proprietà dei coefficienti $a_{sr}^{(u)}$, $b_{sr}^{(u)}$.

1. — Dalla equazione (8) segue

$$a_{sr}^{(u)} = - a_{rs}^{(u)}$$

e per conseguenza

$$a_{ss}^{(u)} = 0.$$

Se ne conclude che *i coefficienti* $a_{sr}^{(u)}$ *cambiano segno invertendo i due indici.*

Dalla (8) si deduce poi

$$b_{sr}^{(h)} - b_{rs}^{(h)} = \sum_1^\nu{}_u E_{hu} a_{sr}^{(u)}. \tag{9}$$

2. — Riprendiamo le (7) e invertiamo l'indice $s$ e l'apice $g$. Si otterrà

$$b_{gr}^{(s)} = \sum_1^{3n}{}_h \, \xi_{hr} \sum_1^{3n}{}_i \, m_i \frac{\partial \xi_{ig}}{\partial \xi_h} \xi_{is}$$

onde

$$b_{sr}^{(g)} + b_{gr}^{(s)} = \sum_1^{3n}{}_h \, \xi_{hr} \frac{\partial E_{gs}}{\partial \xi_h} \tag{10}$$

e per conseguenza allorchè le $E_{gs}$ sono costanti

$$b_{sr}^{(g)} = - b_{gr}^{(s)}.$$

Dunque: *allorchè i coefficienti della forza viva sono costanti, i coefficienti* $b_{sr}^{(g)}$ *cambiano segno permutanto l' apice col primo indice.*

3. — Supponiamo di aver ricondotto la forza viva alla forma

$$T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \ldots\ldots + p_\nu^2),$$

allora la (9) ci darà

$$b_{sr}^{(u)} - b_{rs}^{(u)} = a_{sr}^{(u)}$$

e la (10)

$$b_{sr}^{(u)} + b_{ur}^{(s)} = 0$$

quindi

$$b_{sr}^{(u)} + b_{us}^{(r)} = a_{sr}^{(u)}$$

$$b_{us}^{(r)} + b_{ru}^{(s)} = a_{us}^{(r)}$$

$$b_{ru}^{(s)} + b_{sr}^{(u)} = a_{ru}^{(s)}$$

da cui si deduce

$$2 b_{sr}^{(u)} = a_{sr}^{(u)} + a_{ru}^{(s)} - a_{us}^{(r)} = a_{sr}^{(u)} + a_{ru}^{(s)} + a_{su}^{(r)}$$

e finalmente

$$b_{sr}^{(u)} = \frac{a_{sr}^{(u)} + a_{ru}^{(s)} + a_{su}^{(r)}}{2}.$$

4. — Vediamo ora come cambiano i coefficienti $a_{sr}^{(u)}$, allorchè si eseguisce una sostituzione lineare a coefficienti costanti sulle caratteristiche $p_s$.

Si abbia

(11) $q_i = \sum_s \lambda_{is} p_s$, $\delta \chi_i = \sum_s \lambda_{is} \delta \omega_s$, (11') $p_s = \sum_i \Lambda_{is} q_i$

le $\lambda_{is}$ essendo delle qualità costanti.

Dalle

$$\delta p_s = \frac{d\delta\omega_s}{dt} + \sum_1^\nu{}_h \sum_1^\nu{}_k a_{hk}^{(s)} p_k \delta\omega_h$$

segue

$$\delta q_i = \sum_1^\nu{}_s \lambda_{is} \delta p_s = \frac{d\delta\chi_s}{dt} + \sum_1^\nu{}_h \sum_1^\nu{}_k \sum_1^\nu{}_s a_{hk}^{(s)} \lambda_{is} p_k \delta\omega_h =$$

$$= \frac{d\delta\chi_s}{dt} + \sum_1^\nu{}_h \sum_1^\nu{}_k \sum_1^\nu{}_s \sum_1^\nu{}_g \sum_1^\nu{}_l a_{hk}^{(s)} \lambda_{is} \Lambda_{gh} \Lambda_{lk} q_l \delta\chi_g$$

$$= \frac{d\delta\chi_s}{dt} + \sum_1^\nu{}_g \sum_1^\nu{}_l c_{gl}^{(i)} q_l \delta\chi_g$$

avendo posto

(12) $$c_{gl}^{(i)} = \sum_1^\nu{}_h \sum_1^\nu{}_k \sum_1^\nu{}_s a_{hk}^{(s)} \lambda_{is} \Lambda_{gh} \Lambda_{lk} .$$

Dunque: *se si eseguisce sulle caratteristiche la sostituzione* (11) *a coefficienti costanti, i coefficienti* $a_{rs}^{(u)}$ *si cambiano nelle* $c_{rs}^{(u)}$ *legate alle prime dalle relazioni* (12).

## § 3. — Le equazioni differenziali del movimento.

**1.** — Avendo chiamato T la forza viva del sistema, si avrà

$$\delta T = \sum_1^\nu{}_s \frac{\partial T}{\partial p_s} \delta p_s + \sum_1^{3n}{}_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \delta \xi_i$$

ed applicando la (A) e la (2),

(13) $$\delta T = \sum_1^\nu{}_s \frac{\partial T}{\partial p_s} \left( \frac{d\delta\omega_s}{dt} + \sum_1^\nu{}_h \sum_1^\nu{}_k a_{hk}^{(s)} p_k \delta\omega_h \right) + \sum_1^\nu{}_s T_s \delta\omega_s$$

scrivendo

(14) $$T_s = \sum_1^{3n}{}_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \xi_{is} .$$

Se $\Xi_i$ denota la componente della forza corrispondente alla

coordinata $\xi_i$, il lavoro eseguito dalle forze per uno spostamento virtuale, resulterà dato da

(15) $$\delta L = \sum_1^{3n}{}_i \, \Xi_i \, \delta\xi_i = \sum_1^{3n}{}_i \, \Xi_i \sum_1^{\nu}{}_s \, \xi_{is} \, \delta\omega_s = \sum_1^{\nu}{}_s \, P_s \, \delta\omega_s$$

ponendo

(14′) $$P_s = \sum_1^{3n}{}_i \, \Xi_i \, \xi_{is} .$$

2. — Per stabilire le equazioni differenziali del movimento partiamo dal principio di Lagrange rappresentato dall' equazione (*)

(B) $$\delta L = \frac{d}{dt} \left( \sum_1^{3n}{}_i \frac{\partial T}{\partial \xi'_i} \delta\xi_i \right) - \delta T.$$

Applicando la (3) avremo

$$\sum_1^{3n}{}_i \frac{\partial T}{\partial \xi'_i} \delta\xi_i = \sum_1^{3n}{}_i \frac{\partial T}{\partial \xi'_i} \sum_1^{\nu}{}_s \frac{\partial \xi_i}{\partial p_s} \delta\omega_s = \sum_1^{\nu}{}_s \frac{\partial T}{\partial p_s} \delta\omega_s .$$

Perciò in virtù delle (13) e (15), la (B) diverrà

$$\sum_1^{\nu} P_s \delta\omega_s = \frac{d}{dt} \left( \sum_1^{\nu}{}_s \frac{\partial T}{\partial p_s} \delta\omega_s \right) - \sum_1^{\nu}{}_s \frac{\partial T}{\partial p_s} \left( \frac{d\delta\omega_s}{dt} + \sum_1^{\nu}{}_h \sum_1^{\nu}{}_k a_{hk}^{(s)} p_k \delta\omega_h \right)$$
$$- \sum_1^{\nu}{}_s T_s \, \delta\omega_s$$

$$= \sum_1^{\nu}{}_s \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_s} \delta\omega_s - \sum_1^{\nu}{}_s \frac{\partial T}{\partial p_s} \sum_1^{\nu}{}_h \sum_1^{\nu}{}_k a_{hk}^{(s)} p_k \, \delta\omega_h - \sum_1^{\nu}{}_s T_s \, \delta\omega_s$$

o anche

$$\sum_1^{\nu}{}_s \delta\omega_s \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_s} - \sum_1^{\nu}{}_r \sum_1^{\nu}{}_k a_{sk}^{(r)} \frac{\partial T}{\partial p_r} p_k - T_s - P_s \right] = 0$$

da cui segue

(C) $$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_1^{\nu}{}_r \sum_1^{\nu}{}_k a_{sk}^{(r)} \frac{\partial T}{\partial p_r} p_k + T_s + P_s , \qquad (s = 1, 2 \ldots \nu)$$

*Come equazioni differenziali del movimento del sistema potremo dunque prendere le equazioni precedenti insieme alle*

$$\xi'_i = \sum_1^{\nu}{}_s \, \xi_{is} \, p_s .$$

---

(*) Vedi Beltrami, *Sulle equazioni dinamiche di Lagrange*, " Rendiconti dell'Istituto Lombardo „. S. II, vol. XXVIII, fasc. XIV, pag. 745.

## § 4. — L'integrale delle forze vive.

**1.** — Moltiplichiamo la (C) per $p_s$, quindi sommiamo per tutti i valori $1, 2 \ldots \nu$ di $s$. Otterremo

$$\sum_1^\nu{}_s\, p_s \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_1^\nu{}_s \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k\, a_{sk}^{(r)} \frac{\partial T}{\partial p_r}\, p_k\, p_s + \sum_1^\nu T_s\, p_s + \sum_1^\nu{}_s\, P_s\, p_s.$$

Ma in virtù delle eguaglianze

$$a_{sk}^{(r)} = - a_{ks}^{(r)},$$

si ha

$$\sum_1^\nu{}_s \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k\, a_{sk}^{(r)} \frac{\partial T}{\partial p_r}\, p_k\, p_s = \sum_1^\nu{}_r \frac{\partial T}{\partial p_r} \sum_1^\nu{}_s \sum_1^\nu{}_k\, a_{sk}^{(r)}\, p_k\, p_s = 0$$

onde

$$\sum_1^\nu{}_s\, p_s \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_1^\nu{}_s\, T_s\, p_s + \sum_1^\nu{}_s\, P_s\, p_s$$

o anche

$$\sum_1^\nu{}_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\, p_s\right) = \sum_1^\nu{}_s\, T_s\, p_s + \sum_1^\nu{}_s \frac{\partial T}{\partial p_s}\frac{dp_s}{dt} + \sum_1^\nu{}_s\, P_s\, p_s$$

da cui si deduce, poichè T è una funzione omogenea di 2° grado nelle $p_s$,

$$(16) \qquad 2\frac{dT}{dt} = \sum_1^\nu{}_s\, T_s\, p_s + \sum_1^\nu{}_s \frac{\partial T}{\partial p_s}\frac{dp_s}{dt} + \sum_1^\nu{}_s\, P_s\, p_s.$$

Ora (vedi (14))

$$\sum_1^\nu{}_s\, T_s\, p_s = \sum_1^{3n}{}_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \sum_1^\nu{}_s\, \xi_{is}\, p_s = \sum_1^{3n}{}_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i}\, \xi'_i$$

quindi

$$\sum_1^\nu{}_s\, T_s\, p_s + \sum_1^\nu{}_s \frac{\partial T}{\partial p_s}\frac{dp_s}{dt} = \frac{dT}{dt},$$

e l'equazione (16) diventa

$$(17) \qquad \frac{dT}{dt} = \sum_1^\nu{}_s\, P_s\, p_s.$$

2. — Se esiste il potenziale P delle forze ed è una funzione delle sole coordinate $\xi_i$, avremo (vedi (14'))

$$P_s = \sum_1^{3n}{}_i \, \Xi_i \, \xi_{is} = \sum_1^{3n}{}_i \frac{\partial P}{\partial \xi_i} \xi_{is} ,$$

quindi

$$\sum_1^{\nu}{}_s P_s \, p_s = \sum_1^{3n}{}_i \frac{\partial P}{\partial \xi_i} \sum_1^{\nu}{}_s \xi_{is} \, p_s = \sum_1^{3n}{}_i \frac{\partial P}{\partial \xi_i} \xi'_i = \frac{dP}{dt}$$

onde la (17) si scriverà

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dP}{dt}$$

e integrando

$$T - P = \text{cost.}$$

## § 5. — Caso in cui le equazioni (C) diventano le equazioni di Lagrange.

1. — Allorchè le $p_s$ sono le derivate rapporto a $t$ di un sistema di variabili indipendenti $q_s$, cioè

$$p_s = \frac{dq_s}{dt} ,$$

avremo

$$\xi_{is} = \frac{\partial \xi_i}{\partial q_s} ,$$

quindi

$$\sum_1^{3n}{}_h \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} \xi_{hr} = \sum_1^{3n}{}_h \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} \frac{\partial \xi_h}{\partial q_r} = \frac{\partial \xi_{is}}{\partial q_r} = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_s \partial q_r} .$$

Applicando la (7) si trova

$$b_{sr}^{(g)} = \sum_1^{3n}{}_i m_i \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_s \partial q_r} \xi_{ig} = \sum_1^{3n}{}_i m_i \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_s \partial q_r} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_g}$$

onde mutando $s$ con $r$

$$b_{sr}^{(g)} = b_{rs}^{(g)}$$

e a cagione della (8)

$$a_{sr}^{(u)} = 0 \tag{18}$$

quindi la (A) si riduce a

$$\delta p_u = \frac{d\delta\omega_u}{dt}.$$

2. — In virtù delle (18) le equazioni (C) diventano

$$\text{(C')} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s} = T_s + P_s$$

e (vedi (14))

$$T_s = \sum_1^{3n}{}_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i}\xi_{is} = \frac{\partial T}{\partial q_s}$$

per conseguenza le (C′) si scriveranno sotto la forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_s} = \frac{\partial T}{\partial q_s} + P_s$$

che è la forma di Lagrange delle equazioni del movimento.

## § 6. — Varie forme delle equazioni del moto.

1. — Supponiamo che le caratteristiche del sistema siano prese in modo da rendere costanti i coefficienti $E_{rs}$ della forza viva; allora le (C) diverranno

$$\text{(D)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_1^{\nu}{}_r \sum_1^{\nu}{}_k \, a_{sk}^{(r)} p_k \frac{\partial T}{\partial p_r} + P_s$$

e se la forza viva sarà ridotta alla forma

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^{\nu}{}_s p_s^2$$

le equazioni precedenti si scriveranno

$$\text{(E)} \qquad p'_s = \sum_1^{\nu}{}_r \sum_1^{\nu}{}_k \, a_{sk}^{(r)} p_k p_r + P_s.$$

Ricordiamo che la riduzione della forza viva alla forma precedente è sempre possibile in infiniti modi, quindi potremo dire:

*Ogni problema di dinamica, relativo ad un sistema holonomo o non holonomo avente legami indipendenti dal tempo, può farsi*

*dipendere da un sistema di equazioni differenziali della forma*

$$
(\mathrm{E}_1) \quad \left\{ \begin{aligned} p'_s &= \sum_1^{\nu}{}_r \sum_1^{\nu}{}_k \, a_{sk}^{(r)} \, p_k \, p_r + \mathrm{P}_s && (s = 1, 2 \ldots \nu) \\ \xi'_i &= \sum_1^{\nu}{}_s \, \xi_{is} \, p_s && (i = 1, 2 \ldots 3n) \end{aligned} \right.
$$

*in cui*

$$a_{sk}^{(r)} = - a_{ks}^{(r)}.$$

2. — Tenendo conto che

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_r} = \sum_1^{\nu}{}_h \, \mathrm{E}_{rh} \, p_h$$

le (D) si scriveranno

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s} = \sum_1^{\nu}{}_k \sum_1^{\nu}{}_h \, p_k \, p_h \sum_1^{\nu}{}_r \, \mathrm{E}_{rh} \, a_{sk}^{(r)} + \mathrm{P}_s$$

ed applicando la (9)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s} = \sum_1^{\nu}{}_h \sum_1^{\nu}{}_k \left( b_{sk}^{(h)} - b_{ks}^{(h)} \right) p_h \, p_k + \mathrm{P}_s$$

e ponendo

$$b_{sk}^{(h)} - b_{ks}^{(h)} = c_{sk}^{(h)}$$

avremo

$$
(\mathrm{F}) \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s} = \sum_1^{\nu}{}_h \sum_1^{\nu}{}_k \, c_{sk}^{(h)} \, p_h \, p_k + \mathrm{P}_s
$$

in cui

$$c_{sk}^{(h)} = - c_{ks}^{(h)}.$$

Osservando che

$$p_r = \sum_1^{\nu}{}_s \, e_{rs} \, \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s}$$

le (F) si trasformeranno facilmente nelle

$$p'_r = \sum_1^{\nu}{}_g \sum_1^{\nu}{}_h \, p_h \, \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_g} \sum_1^{\nu}{}_s \sum_1^{\nu}{}_k \, c_{sk}^{(h)} \, e_{rs} \, e_{gk} + \sum_1^{\nu}{}_s \, e_{rs} \, \mathrm{P}_s$$

quindi ponendo

$$f_{rg}^{(h)} = \sum_1^{\nu}{}_s \sum_1^{\nu}{}_k \, c_{sk}^{(h)} \, e_{rs} \, e_{gk}$$

$$\mathrm{Q}_r = \sum_1^{\nu}{}_s \, e_{rs} \, \mathrm{P}_s$$

avremo

$$(G) \qquad p'_r = \sum_1^\nu{}_g \sum_1^\nu{}_h f_{rg}^{(h)} p_h \frac{\partial T}{\partial p_g} + Q_r$$

in cui

$$f_{rg}^{(h)} = - f_{gr}^{(h)}.$$

3. — Le due forme (F) (G) sotto cui vennero poste le equazioni della dinamica possono subire una comune trasformazione.

Sia F una forma quadratica delle $p_1, p_2 \dots p_\nu$ a discriminante diverso da zero.

Potremo scrivere

$$p_h = \Sigma_l \lambda_{hl} \frac{\partial F}{\partial p_l}$$

in cui le $\lambda_{hl}$ sono indipendenti dalle $p_1, p_2 \dots p_\nu$.

Ponendo dunque

$$\sum_1^\nu{}_h c_{sk}^{(h)} \lambda_{hl} = \gamma_{sk}^{(l)}$$

$$\sum_1^\nu{}_h f_{rg}^{(h)} \lambda_{hl} = \varphi_{rg}^{(l)}$$

le (F) e (G) diverranno

$$(F_1) \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_1^\nu{}_l \sum_1^\nu{}_k \gamma_{sk}^{(l)} \frac{\partial F}{\partial p_l} p_k + P_s, \qquad (\gamma_{sk}^{(l)} = - \gamma_{ks}^{(l)})$$

$$(G_1) \qquad p'_r = \sum_1^\nu{}_g \sum_1^\nu{}_l \varphi_{rg}^{(l)} \frac{\partial F}{\partial p_l} \frac{\partial T}{\partial p_g} + Q_r, \qquad (\varphi_{rg}^{(l)} = - \varphi_{gr}^{(l)})$$

## § 7. — Moti spontanei a caratteristiche indipendenti.

1. — Allorchè, oltre essere costanti i coefficienti della forza viva, sono costanti anche le $a_{rs}^{(u)}$, allora il sistema si dirà *a caratteristiche indipendenti*.

Evidentemente un sistema rigorosamente *ciclico* secondo la denominazione di Helmholtz corrisponde ad un sistema a caratteristiche indipendenti in cui i coefficienti $a_{rs}^{(u)}$ sono tutti eguali a zero, allorchè si prendono come caratteristiche le velocità cicliche.

Si vedrebbe facilmente come i sistemi rigidi, liberi o im-

mersi nei fluidi, con o senza moti ciclici interni, si riducano a sistemi a caratteristiche indipendenti.

Supponiamo che il sistema non sia soggetto ad alcuna forza, sia cioè abbandonato alla propria inerzia, allora le quantità $P_s$, saranno tutte nulle e le equazioni del moto diverranno

$$(D') \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k a_{sk}^{(r)} p_k \frac{\partial T}{\partial p_r}$$

$$(1') \qquad \xi'_i = \sum_1^\nu{}_s \xi_{is} p_s .$$

Osserviamo che nel sistema (D′) non compariscono che le $p_1 \dots p_\nu$ e le loro derivate prime; esso quindi determina le caratteristiche del moto indipendentemente dalle coordinate. Possiamo quindi stabilire che *in un sistema a caratteristiche indipendenti abbandonato alla propria inerzia, le caratteristiche del moto soddisfano ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in cui compariscono da sole.* Il problema della integrazione delle equazioni del moto può essere dunque decomposto in due parti. Nella prima si determinano le caratteristiche mediante le (D′); nella seconda, note queste, si determinano le coordinate applicando la (1′).

In tal caso chiameremo il moto un *moto spontaneo a caratteristiche indipendenti.*

2. — Ogni sostituzione a coefficienti costanti nelle caratteristiche non altera il tipo del sistema; quindi come equazioni differenziali del moto potremo prendere indifferentemente uno dei sistemi

$$(D') \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k a_{sk}^{(r)} p_k \frac{\partial T}{\partial p_r} ,$$

$$(F') \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k c_{sk}^{(r)} p_k p_r$$

$$(G') \qquad p'_s = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k f_{sk}^{(r)} p_r \frac{\partial T}{\partial p_k}$$

o anche il sistema

$$(E') \qquad p'_s = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k g_{sk}^{(r)} p_r p_k$$

a cui si riducono contemporaneamente tutti i precedenti, quando si riduca T alla semisomma dei quadrati delle caratteristiche.

In tutte le equazioni precedenti dovremo ritenere *costanti tutti i coefficienti e tali che cambino segno per una trasposizione degli indici.*

Se denotiamo con F una forma quadratica delle $p_1 \dots p_\nu$ a discriminante diverso da zero, e a coefficienti costanti, potremo ancora scrivere le equazioni differenziali sotto la forma

$$(F'_1) \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_1^\nu {}_r \sum^\nu {}_k \gamma_{sk}^{(r)} p_k \frac{\partial F}{\partial p_r}$$

$$(G'_1) \qquad p'_s = \sum_1^\nu {}_r \sum_1^\nu {}_k \varphi_{sk}^{(r)} \frac{\partial F}{\partial p_r} \frac{\partial T}{\partial p_k}$$

in cui al pari che nelle equazioni precedenti i coefficienti $\gamma_{sk}^{(r)}$ e $\varphi_{sk}^{(r)}$ sono costanti e cambiano segno per una inversione degl'indici.

3. — Quando le caratteristiche sono costanti diremo che il moto è *permanente.* Quindi *come equazioni corrispondenti ai moti permanenti prenderemo uno qualsiasi dei sistemi* (D'), (F'), (G'), (E'), (F'$_1$), (G'$_1$) *in cui assumeremo nullo il primo membro.*

Ne segue che la determinazione delle caratteristiche corrispondenti ai moti permanenti può eseguirsi senza alcuna operazione di integrazione.

## § 8. — Integrali di primo grado delle equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti.

1. — Se esiste un integrale di primo grado delle equazioni (G'), cioè se si ha

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_\nu p_\nu = \text{cost}$$

essendo $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_\nu$ delle quantità costanti, eseguiamo una sostituzione lineare a coefficienti costanti sulle caratteristiche in modo che la prima di esse resulti eguale al primo membro della equazione precedente. Si vede in tal modo che il caso in

cui esista un integrale di primo grado si riduce sempre a quello in cui le equazioni ammettono l'integrale

$$p_1 = \text{cost},$$

ossia si abbia

$$p'_1 = 0.$$

2. — Ciò premesso eseguiamo sulle $p_2 \dots p_\nu$ una sostituzione lineare in modo da far sparire nella espressione della forza viva i termini contenenti i rettangoli delle $p_2 \dots p_\nu$, cioè che si abbia

$$T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_\nu^2) + p_1 (E_{12} p_2 + \dots + E_{1\nu} p_\nu),$$

allora le equazioni (G′) diverranno

$$0 = p'_1 = \sum_1^\nu{}_r \sum_2^\nu{}_k f_{1k}^{(r)} p_r (p_k + E_{1k} p_1)$$

$$p'_s = \sum_2^\nu{}_r \sum_2^\nu{}_k f_{sk}^{(r)} p_r (p_k + E_{1k} p_1) + \sum_2^\nu{}_k f_{sk}^{(1)} p_1 (p_k + E_{1k} p_1)$$

$$+ \sum_2^\nu{}_r f_{s1}^{(r)} p_r \left(p_1 + \sum_2^\nu{}_g E_{1g} p_g\right) + f_{s1}^{(1)} p_1 \left(p_1 + \sum_2^\nu{}_g E_{1g} p_g\right).$$

In virtù della prima otterremo

$$f_{1k}^{(r)} + f_{1r}^{(k)} = 0 \tag{19}$$

$$f_{1g}^{(1)} + \sum_2^\nu{}_k f_{1k}^{(g)} E_{1k} = 0,$$

quindi, con un calcolo facile, si avrà

$$p'_s = \sum_2^\nu{}_r \sum_2^\nu{}_k (f_{sk}^{(r)} + f_{s1}^{(k)} E_{1r}) p_r (p_k + E_{1k} p_1) + \sum_2^\nu{}_k (f_{s1}^{(k)} + f_{sk}^{(1)}) p_1 (p_k + E_{1k} p_1) \tag{20}$$

$$= \sum_2^\nu{}_r \sum_2^\nu{}_k g_{sk}^{(r)} p_r q_k + \sum_2^\nu{}_k \gamma_{sk} q_k$$

ponendo

$$g_{sk}^{(r)} = f_{sk}^{(r)} + f_{s1}^{(k)}, \qquad \gamma_{sk} = (f_{s1}^{(k)} + f_{sk}^{(1)}) p_1$$

$$q_k = p_k + E_{1k} p_1. \tag{21}$$

Tenendo presente la relazione (19) si vede che le $g_{sk}^{(r)}$ e

le $\gamma_{sk}^{(r)}$ saranno delle quantità costanti che cambiano segno per una trasposizione degl'indici.

Le (20) potranno scriversi ancora

$$(20') \qquad p'_s = \sum_2^\nu {}_k\, q_k \left( \sum_2^\nu g_{sk}^{(r)} p_r + \gamma_{sk} \right)$$

$$= \sum_2^\nu {}_k\, q_k \left[ \sum_2^\nu {}_r\, g_{sk}^{(r)} q_r + \gamma_{sk} - \sum_2^\nu {}_r\, g_{sk}^{(r)} E_{1r} p_1 \right].$$

Poniamo

$$\gamma_{sk} - \sum_2^\nu {}_r\, g_{sk}^{(r)} E_{1r} p_1 = p_1 \left[ f_{s1}^{(k)} + f_{sk}^{(1)} - \sum_2^\nu {}_r\, g_{sk}^{(r)} E_{1r} \right] = l_{sk}$$

anche $l_{sk}$ cambierà segno per una inversione degli indici, e le (20′) diverranno

$$(20'') \qquad q'_s = \sum_2^\nu {}_k \sum_2^\nu {}_r\, g_{sk}^{(r)} q_r q_k + \sum_2^\nu {}_k\, l_{sk} q_k.$$

Dalle (21) segue

$$T = \frac{1}{2}(q_2^2 + q_3^2 + \dots + q_\nu^2) + \text{cost}$$

onde le (20″) assumeranno la forma

$$q'_s = \sum_2^\nu {}_k \sum_2^\nu {}_r\, g_{sk}^{(r)} q_r \frac{\partial T}{\partial q_k} + \sum_2^\nu {}_k\, l_{sk} \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

Eseguendo sulle $q_2, q_3 \dots q_\nu$ una sostituzione lineare qualunque che trasformi le caratteristiche nelle $u_2 \dots u_\nu$, le equazioni precedenti si trasformeranno nelle

$$(H) \qquad u'_s = \sum_2^\nu {}_k \sum_2^\nu {}_r\, m_{sk}^{(r)} u_r \frac{\partial T}{\partial u_k} + \sum_2^\nu {}_k\, n_{sk} \frac{\partial T}{\partial u_k} \qquad (s = 2, 3 \dots n)$$

in cui le $m_{sk}^{(r)}$ e le $n_{sk}$ cambiano segno per una trasposizione degl'indici e si calcolano immediatamente dalle $g_{sk}^{(r)}$, $l_{sk}$.

3. — Supponiamo ora che esista un secondo integrale di primo grado delle equazioni (G′) indipendente da quello precedentemente considerato.

Potremo prendere sempre le cose in modo che esso si riduca ad

$$u_2 = \text{cost}$$

ed allora, ripetendo un calcolo analogo a quello fatto precedentemente, le equazioni (H) si ridurranno ad un sistema di equazioni della forma

$$v'_s = \sum_3^\nu {}_k \sum_3^\nu {}_r \, \mu_{sk}^{(r)} v_r \frac{\partial T}{\partial v_k} + \sum_3^\nu {}_k \, \nu_{sk} \frac{\partial T}{\partial v_k} \qquad (s = 3, 4 \ldots \nu)$$

ove le $v$ sono legate lineamente alle $u$, e T resulta, a meno di una costante, una forma omogenea di secondo grado delle $v$.

In generale quando esistano $g$ integrali indipendenti di primo grado delle equazioni del moto, esse potranno ridursi alla forma

$$(\mathrm{H}') \qquad z'_s = \sum_1^\lambda {}_k \sum_1^\lambda {}_r \, \mathrm{M}_{sk}^{(r)} z_r \frac{\partial T}{\partial z_k} + \sum_1^\lambda {}_k \, \mathrm{N}_{sk} \frac{\partial T}{\partial z_k}, \qquad \begin{array}{l} s = 1, 2 \ldots, \lambda \\ \lambda = \nu - g \end{array}$$

in cui $\mathrm{M}_{sk}^{(r)}$ e $\mathrm{N}_{sk}$ sono dei coefficienti costanti che cambiano segno per una trasposizione degl'indici, e T, a meno di un termine costante, è una forma omogenea di 2° grado delle $z$, le quali sono legate lineamente alle variabili primitive $p$.

## § 9. — Integrali di secondo grado delle equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti.

1. — Una delle forme sotto le quali vennero poste le equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti è stata la seguente (cfr. § 7)

$$(\mathrm{G}'_1) \qquad p'_s = \sum_1^\nu {}_r \sum_1^\nu {}_k \, \varphi_{sk}^{(r)} \frac{\partial F}{\partial p_r} \frac{\partial T}{\partial p_k}$$

ove F è una forma omogenea qualunque di secondo grado delle $p$ a discriminante diverso da zero e a coefficienti costanti.

Supponiamo che si abbia, comunque siano gl'indici e l'apice,

$$\varphi_{sk}^{(r)} = - \varphi_{rk}^{(s)}.$$

Resulterà allora

$$\varphi_{sk}^{(r)} = - \varphi_{ks}^{(r)} = \varphi_{rs}^{(k)} = - \varphi_{sr}^{(k)} = \varphi_{kr}^{(s)} = - \varphi_{rk}^{(s)},$$

onde ponendo

$$\varphi_{sk}^{(r)} = \varphi_{skr}$$

la quantità $\varphi_{skr}$ cambierà segno per ogni trasposizione degli indici.

Le $(G'_1)$ diverranno

$$p'_s = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k \varphi_{skr} \frac{\partial F}{\partial p_r} \frac{\partial T}{\partial p_k}$$

e quindi

$$\sum_1^\nu{}_s \frac{\partial F}{\partial p_s} p'_s = 0$$

onde

$$F = \text{cost.}$$

Abbiamo dunque che $F = \text{cost}$ sarà un integrale delle equazioni $(G'_1)$.

2. — Supponiamo ora inversamente che il sistema di equazione $(G'_1)$ ammetta per integrale

$$F = \text{cost.}$$

Mediante una sostituzione lineare nelle $p$

(22) $$q_i = \sum_1^\nu{}_s \alpha_{is} p_s$$

riduciamo contemporaneamente le due funzioni T ed F ad essere rispettivamente della forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^\nu{}_i q_i^2$$

$$F = \frac{1}{2} \sum_1^\nu{}_i \lambda_i q_i^2$$

e supponiamo che le $\lambda_i$ resultino tutte diverse fra loro. Allora le $(G'_1)$ diverranno

(23) $$q'_s = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k \beta_{sk}^{(r)} \frac{\partial F}{\partial q_r} \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k \beta_{sk}^{(r)} \lambda_r q_r q_k$$

avendo posto

$$\beta_{sk}^{(r)} = \sum_1^{\nu}{}_x \sum_1^{\nu}{}_y \sum_1^{\nu}{}_z \varphi_{xy}^{(z)} \alpha_{sx} \alpha_{ky} \alpha_{rz}.$$

Ora dalle (23) segue

$$\sum_1^{\nu}{}_s \lambda_s q_s q'_s = \sum_1^{\nu}{}_r \sum_1^{\nu}{}_k \sum_1^{\nu}{}_s \beta_{sk}^{(r)} \lambda_r \lambda_s q_r q_k q_s,$$

quindi se $F = \text{cost}$, ossia se

$$\sum_1^{\nu}{}_s \lambda_s q_s q'_s = 0,$$

dovremo avere

$$\sum_1^{\nu}{}_r \sum_1^{\nu}{}_k \sum_1^{\nu}{}_s \beta_{sk}^{(r)} \lambda_s \lambda_r q_r q_k q_s = 0$$

per ogni sistema di valore delle $q$.

Calcolando il coefficiente di $q_r q_k q_s$ si trova

$$(\lambda_s \lambda_r - \lambda_k \lambda_r) \beta_{sk}^{(r)} + (\lambda_r \lambda_k - \lambda_s \lambda_k) \beta_{rs}^{(k)} + (\lambda_k \lambda_s - \lambda_r \lambda_s) \beta_{kr}^{(s)}$$

otterremo dunque le equazioni

$$(24) \qquad \lambda_r \beta_{sk}^{(r)} (\lambda_s - \lambda_k) + \lambda_k \beta_{rs}^{(k)} (\lambda_r - \lambda_s) + \lambda_s \beta_{kr}^{(s)} (\lambda_k - \lambda_s) = 0.$$

**3.** — Abbiamo supposto le $\lambda_i$ tutte diverse fra loro; dalla (24) può dunque dedursi

$$\lambda_r \beta_{sk}^{(r)} = C_{skr} + \lambda_r D_{skr}$$

in cui le costanti $C_{skr}$ e $D_{skr}$ sono quantità che cambiano segno per una trasposizione degli indici

Sostituendo nelle (23) per $\lambda_r \beta_{sk}^{(r)}$ i valori trovati e riducendo i termini simili esse si scriveranno

$$(23') \qquad q'_s = \sum_1^{\nu}{}_r \sum_1^{\nu}{}_k D_{skr} \lambda_r q_r q_k = \sum_1^{\nu}{}_r \sum_1^{\nu}{}_k D_{skr} \frac{\partial F}{\partial q_r} \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

**4.** — Siano ora

$$p_s = \sum_1^{\nu}{}_i A_{is} q_i$$

le inverse delle (22); posto

$$e_{skr} = \sum_1^{\nu}{}_x \sum_1^{\nu}{}_y \sum_1^{\nu}{}_z D_{xyz} A_{xs} A_{yk} A_{zr}$$

le (23') diverranno

$$p'_s = \Sigma_r \Sigma_k e_{skr} \frac{d\mathrm{T}}{\partial p_k} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p_r}$$

o anche

$$p'_s = \Sigma_{rk} e_{skr} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_k p_r)}$$

denotando con $\Sigma_{rk}$ la somma estesa a tutte le combinazioni a due a due degli indici $r$ e $k$.

La dimostrazione fatta per ottenere queste equazioni presuppone che F sia una forma a discriminante diverso da zero. Ora tale restrizione evidentemente può togliersi, tenendo presente che all'integrale F = cost, può sostituirsi l'altro F + KT = cost, ove K è una costante arbitraria, ed osservando pure che le equazioni precedenti non si alterano mutando F in F + KT.

5. — Scriviamo ora le due forme

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \mathrm{E}_{rs} p_r p_s$$

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{s} p_r p_s .$$

Le $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_\nu$ saranno le radici dell'equazione di grado $\nu$ in $\lambda$.

$$(\mathrm{K}) \qquad \begin{vmatrix} \Lambda_{11} - \lambda \mathrm{E}_{11}, & \Lambda_{12} - \lambda \mathrm{E}_{12}, & \ldots & \Lambda_{1\nu} - \lambda \mathrm{E}_{1\nu} \\ \Lambda_{21} - \lambda \mathrm{E}_{21}, & \Lambda_{22} - \lambda \mathrm{E}_{22}, & \ldots & \Lambda_{2\nu} - \lambda \mathrm{E}_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Lambda_{\nu 1} - \lambda \mathrm{E}_{\nu 1}, & \Lambda_{\nu 2} - \lambda \mathrm{E}_{\nu 2}, & \ldots & \Lambda_{\nu\nu} - \lambda \mathrm{E}_{\nu\nu} \end{vmatrix} = 0$$

potremo dunque enunciare il teorema:

*Posto*

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \mathrm{E}_{rs} p_r p_s$$

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{rs} p_r p_s$$

*se l'equazione algebrica* (K) *non ammette radici eguali, la condizione necessaria e sufficiente affinchè un moto spontaneo a caratteristiche indipendenti avente* T *per forza viva, ammetta l'integrale* F = cost *è che le equazioni del moto siano della forma*

$$p'_s = \sum_{rk} e_{skr} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_k, p_r)} \tag{I}$$

*in cui le* $e_{skr}$ *sono costanti che cambiano segno per una trasposizione degl'indici.*

Chiameremo la equazione (K) la *equazione determinante.*

6. — Allorchè le equazioni differenziali assumono la forma (I), ogni nuovo integrale $\Phi =$ cost, dovendo verificare l'equazione

$$\sum_1^{\nu}{}_s \frac{\partial \Phi}{\partial p_s} p'_s = 0$$

dovrà esser tale che

$$\sum_{skr} e_{skr} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F}, \Phi)}{d(p_s\, p_k\, p_r)} = 0$$

in cui $\sum_{skr}$ denota una somma ottenuta facendo tutte le combinazioni tre a tre degl'indici $s, k, r$.

## § 10. — Integrali di primo e di secondo grado delle equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti.

1. — Se le equazioni del moto ammettono un integrale di secondo grado non omogeneo, si vede immediatamente che debbono essere separatamente integrali dell'equazione la parte di primo e quella di secondo grado.

Supponiamo di valerci di tutti gl'integrali di primo grado che si possono conoscere per ridurre le equazioni differenziali del moto alla forma (Cfr. § 8)

$$q'_s = \sum_k \sum_r a_{sk}^{(r)} q_k q_r + \sum_k b_{sk} q_k. \tag{H''}$$

L'integrale delle forze vive avrà allora la forma

$$\mathrm{T} + \mathrm{cost} = \frac{1}{2} \sum q_s^2 = \mathrm{cost}. \tag{25}$$

Supponiamo che esista un integrale di secondo grado

$$F(q_1, q_2, q_3 \dots) = \text{cost}. \tag{26}$$

Per mezzo di una sostituzione ortogonale nelle $q$, potrà sempre ridursi questo integrale a mancare dei termini contenenti i rettangoli delle variabili senza che perciò si alteri la forma delle equazioni (H″), nè quella dell' integrale (25). Potremo dunque supporre senz'altro che l'integrale (26) abbia la forma

$$F = \frac{1}{2}(\lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \dots) + \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2 + \dots = \text{cost}. \tag{26'}$$

Ammettiamo che le $\lambda_1, \lambda_2 \dots$ siano tutte diverse fra loro; moltiplicando respettivamente le (H″) per $\lambda_s q_s + \mu_s$ e sommando si avrà, in virtù della (26′),

$$\Sigma_s \Sigma_k \Sigma_r \lambda_s a_{sk}^{(r)} q_s q_k q_r = 0 \tag{27}$$

$$\Sigma_s \Sigma_k \Sigma_r a_{sk}^{(r)} \mu_s q_k q_r + \Sigma_s \Sigma_k b_{sk} \lambda_s q_s q_k = 0 \tag{27'}$$

$$\Sigma_s \Sigma_k b_{sk} \mu_s q_k = 0. \tag{27''}$$

Dalle (27) segue

$$(\lambda_s - \lambda_k) a_{sk}^{(r)} + (\lambda_r - \lambda_s) a_{rs}^{(k)} + (\lambda_k - \lambda_r) a_{kr}^{(s)} = 0$$

e quindi

$$a_{sk}^{(r)} = C_{skr} + \lambda_r D_{skr}$$

ove le $C_{skr}$ e $D_{skr}$ cambiano segno per ogni trasposizione degli indici.

La (27′) dunque si scriverà

$$\Sigma_s \Sigma_k q_s q_k [b_{sk} - \Sigma_r \mu_r D_{skr}] \lambda_s = 0$$

e quindi

$$(\lambda_s - \lambda_k)[b_{sk} - \Sigma_r \mu_r D_{skr}] = 0$$

da cui segue

$$b_{sk} = \Sigma_r D_{skr} \mu_r.$$

Questi valori delle $b_{sk}$ verificano evidentemente le (27″).
Le (H″) potranno dunque scriversi

$$q'_s = \Sigma_k \Sigma_r D_{skr} \lambda_r q_k q_r + \Sigma_k \Sigma_r D_{skr} q_k \mu_r$$
$$= \Sigma_k \Sigma_r D_{skr} q_k (\lambda_r q_r + \mu_r) = \Sigma_k \Sigma_r D_{skr} \frac{\partial T}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial q_r}.$$

Eseguendo sopra le $q$ una sostituzione lineare qualsiasi che conduca alle $p$, avremo che la forma delle equazioni non cambierà e si otterrà

$$(L) \qquad p'_s = \Sigma_k \Sigma_r e_{skr} \frac{\partial T}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial p_r} = \Sigma_{kr} e_{skr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)}$$

ove le $e_{skr}$ saranno quantità che cambieranno segno per una trasposizione degli indici.

## § 11. — Teorema generale sulla integrazione delle equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti.

1. — Prendiamo le equazioni sotto la forma (Vedi § 9)

$$(I) \qquad p'_s = \Sigma_{kr} e_{skr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)}.$$

Si verifica facilmente che

$$\Sigma_s \frac{\partial}{\partial p_s} \Sigma_{kr} e_{skr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)} = \Sigma_{skr} e_{skr} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_s} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{d(T, F)}{d(p_r, p_s)} + \frac{\partial}{\partial p_r} \frac{d(T, F)}{d(p_s, p_k)} \right\} = 0.$$

Dunque il sistema di equazioni differenziali

$$(I') \qquad \frac{dp_1}{\Sigma_{kr} e_{1kr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)}} = \frac{dp_2}{\Sigma_{kr} e_{2kr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)}} = \frac{dp_3}{\Sigma_{kr} e_{3kr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)}} = \cdots\cdots$$

ammette il moltiplicatore 1.

2. — Il numero dei parametri $p_1 p_2 \ldots$ di un sistema *a caratteristiche indipendenti* se ne dirà l'*ordine*. Supponiamo che il sistema che si considera sia di ordine ν e che si conoscano ν — 4 integrali delle (I) indipendenti dal tempo e dai due integrali quadratici T = cost, F = cost. Tenendo conto di questi due integrali, avremo che si conosceranno ν — 2 integrali del sistema (I'), e siccome se ne conosce un moltiplicatore, così con una quadratura potremo ottenere l'ultimo integrale. Determinati così ν — 1 integrali delle (I) indipendenti dal tempo con una ulteriore qradratura avremo l'equazione del tempo.

Possiamo dunque enunciare il teorema: *Se, oltre l'integrale delle forze vive, si conoscono* ν — 3 *integrali indipendenti dal tempo delle equazioni d'un moto spontaneo a caratteristiche indipendenti d'ordine* ν, *ed uno di essi è un integrale di secondo grado (la cui equazione determinante abbia radici diseguali) la determinazione delle caratteristiche si riduce alle quadrature.*

---

## *Osservazioni sull'etere acetilcianacetico;*

Nota del Dott. LUIGI SABBATANI.

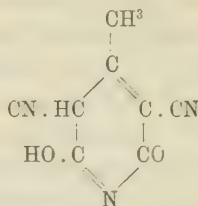
I miei colleghi e compagni di laboratorio, Quenda, Pasquali e Grande, hanno ottenuto da reazioni analoghe uno stesso prodotto, la β β' dicianmetilglutaconimide. Facendo reagire a rapporti equimolecolari l'etere etilidenacetacetico col cianacetato d'etile in presenza di ammoniaca, Quenda (1) ottenne dell'etere idrocollidindicarbonico, e della *dicianmetilglutaconimide* e dimostrò che questo secondo prodotto trae origine da un po' di aldeide etilica, che si forma per scomposizione dell'etere etilidenacetacetico.

E non è solo l'aldeide etilica che in presenza di etere cianacetico ed ammoniaca dà origine alla dicianmetilglutaconimide; ma anche i chetoni grassi normali (quelli almeno studiati fino

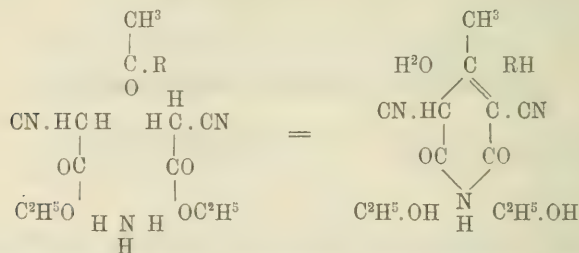
---

(1) " Atti della R. Accad. delle Scienze „, 1897, vol. XXXII.

ad ora. della formula $CH^3.CO.C^nH^{2n+1}$) dànno sempre come prodotto finale e stabile la stessa sostanza:

```
          CH³
           |
           C
          / \\
   CN.HC     C.CN
      |      |
   HO.C      CO
       \\   /
         N
```

Così Pasquali (1) dal metilessilchetone, dal metilbutilchetone, dal metilpropilchetone, dal dimetilchetone, e Grande (2) dal metiletilchetone ottennero sempre per azione dell'etere cianacetico ed ammoniaca la dicianmetilglutaconimide.

In tutti questi casi la reazione avviene, come dimostrò il prof. Guareschi (3), in modo analogo a quello per cui Hantzsch ottiene i suoi composti piridinici:

```
          CH³                                 CH³
          |                                   |
          C.R                       H²O       C    RH
          O     H                            / \\
CN.HC H     H C.CN                     CN.HC     C.CN
    |         |             =              |     |
    OC        CO                           OC    CO
    |         |                              \  /
C²H⁵O   H N H  OC²H⁵              C²H⁵.OH     N    C²H⁵.OH
          H                                   H
```

Qui reagiscono contemporaneamente due molecole di etere cianacetico con una di aldeide o chetone; io invece ho cercato se era possibile ottenere lo stesso prodotto partendo da un derivato cianico dell'etere acetacetico. Parve questo tentativo non privo di interesse. qualunque fosse il risultato che si sarebbe ottenuto, e però pubblico la presente Nota, quantunque l'esperienza abbia dato risultato negativo.

---

(1) Loc. cit.

(2) Loc. cit.

(3) *Nuove ricerche sulla sintesi di composti piridinici e la reazione di Hantzsch*, " Atti della R. Accad. delle Scienze ", 1897, vol. XXXII.

Partendo dall'etere acetilcianacetico, etere cianacetico ed ammoniaca, a freddo si ottiene della cianacetamide e del sale ammonico dell'etere acetilcianacetico.

Perchè la sintesi avvenga cogli eteri chetonici nel senso indicato dal Guareschi (1), occorre che l'ossigeno abbia funzione nettamente chetonica e sia dotato di una discreta mobilità. Nel caso speciale dell'etere acetilcianacetico l'atomo d'ossigeno perde le proprietà sue chetoniche ed acquista una funzione acida netta e spiccata. La perdita della funzione chetonica ci è dimostrata dalla mancata sintesi a cui accennava or ora: quanto poi alla funzione acido basterà ricordare che questo etere ha reazione acidissima e scompone i carbonati, che Haller ed Held ne hanno ottenuti dei sali metallici ben definiti e che coll'ammoniaca forma pure un sale molto stabile. Quest'ultimo fatto è bene dimostrato dalle osservazioni seguenti.

Preparai l'etere etilico dell'acido acetilcianacetico

$$CH^3CO\,.\,CH\begin{cases}CN\\COOC^2H^5\end{cases}$$

seguendo esattamente il metodo indicato da Haller ed Held (2) ed ebbi un prodotto che corrispondeva esattamente per tutti i caratteri suoi a quello ottenuto da essi.

Quando è liquido e si tratta con poca ammoniaca, si riapprende in una massa compatta, bianca, che si scioglie poi prontamente per aggiunta di acqua. Svaporata la soluzione sull'acido solforico, lascia un residuo cristallino appena leggermente gialliccio agli orli.

Si lava con poche goccie di acqua, si spreme fra carta da filtro, e fattolo ricristallizzare da poca acqua, si secca nel vuoto e quindi nella stufa a 100—105° C. per molte ore.

All'analisi si ebbe:

I. Gr. 0,2122 di sostanza diedero cc. 29,6 di azoto a 15° ed a 754 mm., da cui azoto gr. 0,03482:

---

(1) *Sintesi di composti piridinici dagli eteri chetonici coll'etere cianacetico in presenza dell'ammoniaca e delle amine*, " Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino „, 1896, Serie II, vol. XLVI.

(2) " Ann. Chim. et Phys. „ (3) 1889, T. 17, p. 207.

II. Gr. 0,1880 di sostanza diedero gr. 0,1186 di $H^2O$ e gr. 0,3366 di $CO^2$.

| | trovato | | calcolato per $C^7H^{12}N^2O^3$ |
|---|---|---|---|
| | I | II | |
| C % | — | 48,83 | 48,84 |
| H „ | — | 7,01 | 6,97 |
| N „ | 16,40 | — | 16,28 |

Questi dati corrispondono esattamente al sale ammonico dell'etere acetilcianacetico per il quale Held (1) ha ottenuto dei dati assai discordanti:

Per l'azoto egli trova

15,67 15,10 15.27 14,67

Per il carbonio

49,30 50,13

Per l'idrogeno non riporta alcuna cifra. È quindi a ritenere che egli abbia avuto fra mano un prodotto impuro; così solo si spiega la diversità dei caratteri notati dall'Held e quelli trovati da me per questa sostanza.

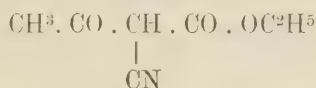
Egli dice che seccandola sull'acido solforico e nella stufa perde ammoniaca e probabilmente anche un po' di acido carbonico: io invece ho constatato che, stando a 100—105° C. per molte ore, se ne volatilizza una piccola quantità, ma il prodotto non varia per il punto di fusione (156—158° C.) e per gli altri suoi caratteri esterni.

Anzi, ponendo un po' della sostanza secca in una capsula a b. m., e ricoprendola con un vetro da orologio, su questo si depositano dei bei cristalli lunghi, setacei, che fondono a 156—158° C., come la sostanza da cui provengono.

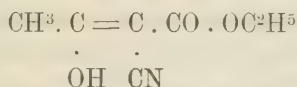
In questa occasione constatai inoltre che i vapori svolgentisi dalla capsula arrossavano la carta bleu ed inazzurrivano contemporaneamente la carta rossa di tornasole.

(1) " Ann. Chim. et Phys. „ (3) 1889, T. 18, p. 485.

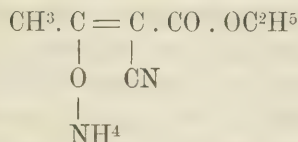
Ed ora, considerando la mancata funzione chetonica, la facilità di ottenere sali metallici, la grande stabilità del sale ammonico, apparisce molto poco probabile la formula ammessa da Haller ed Held per l'etere acetilcianacetico:

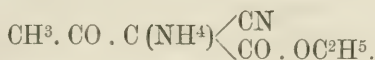
$$\begin{array}{l} CH^3 . CO . \underset{\displaystyle CN}{\underset{|}{CH}} . CO . OC^2H^5 \end{array}$$

e le denominazioni di *eteri ed acidi metinici* non sembrano giustificate.

Si viene così alla conclusione molto verosimile che la formula strutturale di questo etere debba essere

$$CH^3 . \underset{\displaystyle OH}{\underset{\cdot}{C}} = \underset{\displaystyle CN}{\underset{\cdot}{C}} . CO . OC^2H^5$$

Forma che spiega la mancanza di funzione chetonica e l'intensa funzione acida.

Conseguentemente a ciò, la formula del sale ammonico deve essere

$$CH^3 . \underset{\displaystyle NH^4}{\underset{|}{\underset{\displaystyle O}{\underset{|}{C}}}} = \underset{\displaystyle CN}{\underset{|}{C}} . CO . OC^2H^5$$

e non l'altra ammessa da Held

$$CH^3 . CO . C\,(NH^4) \left\langle \begin{array}{l} CN \\ CO . OC^2H^5 . \end{array} \right.$$

Torino, Laboratorio di Chimica farmaceutica e tossicologica. Dicembre 1897.

---

# *I gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio;*

Nota di GINO FANO.

1. — È noto che ogni gruppo continuo di trasformazioni cremoniane del piano (dipendente da un numero finito di parametri) si può ridurre con un' ulteriore trasformazione cremoniana (birazionale) a un gruppo appartenente a una di *tre* categorie determinate: *gruppi proiettivi, gruppi di trasformazioni quadratiche* (o *conformi*), e *gruppi di Jonquières* (trasformanti in sè stesso *un* fascio di rette) (¹). Ciascuna di queste categorie comprende soltanto *un* tipo di gruppo completo (di un ordine qualunque $n$, nel 3º caso) coi relativi sottogruppi. A quest'argomento, e ad altri che vi si connettono, si riferiscono, in parte, anche talune mie note di questi ultimi anni (²).

Recentemente, il signor Enriques e io ci siamo proposti di studiare l'analoga questione per lo spazio; e in una nostra comune Memoria (³) abbiamo dimostrato che i gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio sono tutti riducibili birazionalmente a *gruppi proiettivi, gruppi conformi*, o *gruppi* " *di Jonquières generalizzati* „ (ossia trasformanti in sè stesso un fascio di piani, ovvero una stella di rette), più altri *due* tipi di di gruppi $\infty^3$ ben determinati. In particolare, i gruppi *primitivi* si riducono tutti a gruppi proiettivi e conformi; i gruppi *imprimitivi*, a gruppi di Jonquières generalizzati (e ad altri *tre* tipi, uno dei quali è ancora un gruppo conforme). Il risultato relativo ai gruppi primitivi fu però ottenuto valendosi della

(¹) Enriques, " Rend. R. Acc. dei Lincei „, maggio 1893.

(²) Rend. cit., aprile 1895; " Rend. di Palermo „, t. X (1896), pp. 1 e seg., 16 e seg.

(³) " Annali di Matem. „, s. 2ª, t. 25. In seguito indicherò questa Memoria, per brevità, colle lettere EF.

classificazione, dovuta al sig. Lie, dei gruppi continui primitivi di trasformazioni *puntuali* dello spazio ([1]); e quest' ultima presuppone a sua volta lunghe ricerche sui gruppi continui *irriducibili* di trasformazioni di contatto del piano (non riducibili cioè ad *estensioni* di gruppi puntuali) ([2]). Non sarà quindi inutile il mostrare come allo stesso nostro risultato sui gruppi cremoniani primitivi si possa anche giungere per una via più diretta, senza valersi di tante altre ricerche, ma ricorrendo soltanto (come io già feci pei gruppi cremoniani del piano) a un unico teorema (molto più semplice) del sig. Lie, già dimostrato per un numero qualunque di variabili ([3]).

Questa dimostrazione diretta verrà data appunto nel presente lavoro. E, per mezzo di essa, noi preciseremo anche ulteriormente il risultato già ottenuto dal sig. Enriques e da me, determinando in pari tempo *i singoli gruppi tipici (proiettivi e conformi) birazionalmente distinti, ai quali tutti i gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane possono ricondursi.* Questi gruppi (come si potrebbe anche facilmente dedurre dal risultato già noto) sono quelli stessi che sono distinti dal punto di vista delle trasformazioni puntuali, e furono già come tali enumerati dal sig. Lie ([4]), più *il gruppo* $\infty^{6}$ *delle trasformazioni conformi che lasciano fissa una data sfera (non nulla)* ([5]). In un altro lavoro mi occuperò della determinazione dei diversi tipi di gruppi di Jonquières generalizzati; questione interessante, ma piuttosto lunga e complicata.

Anche in questo lavoro farò costantemente uso (come in

---

([1]) *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, pp. 122-140. Così pure vi occorrono le ricerche del Sig. Enriques sui sistemi lineari di superficie a intersezioni variabili razionali (“ Rend. Acc. dei Lincei „, dicembre 1893. nota ([3]) a p. 282; “ Mathem. Ann. „, vol. 46).

([2]) *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. II, cap. 23, 24.

([3]) Op. cit., vol. I, p. 631.

([4]) Op. cit., vol. III, p. 139.

([5]) Come è già detto (ma non dimostrato) in EF, § 6. — Desidero anche avvertire esplicitamente, ch'io non intendo certo che questa nuova dimostrazione sia preferibile all'altra contenuta in EF, §§ 4-6; ma ho creduto che valesse forse la pena di far conoscere anche queste ricerche, le quali formarono un sol gruppo con quelle che concorsero alla Memoria pubblicata negli Annali di Matematica.

E F; cfr. in part. § 2) della possibilità di ricondurre birazionalmente ogni gruppo cremoniano continuo dello spazio a un gruppo proiettivo sopra un'opportuna varietà $M_3$ di un certo spazio $S_r$ (rappresentabile sopra $S_3$ in modo che quel gruppo cremoniano e questo gruppo proiettivo vengano a corrispondersi). Supporremo pure i nostri gruppi *algebrici* (cfr. E F, § 1), e ci varremo, ogni qual volta sarà necessario, delle osservazioni enunciate in E F, §§ 2, 3.

**2.** — Come già in altre ricerche, sarà anche qui per noi fondamentale la considerazione del gruppo proiettivo che il gruppo proposto subordina nell'intorno di un punto generico dello spazio imposto come unito.

Consideriamo un gruppo continuo qualunque G di trasformazioni cremoniane dello spazio, e indichiamo con $k$ la sua dimensione. Fra le operazioni di esso ve ne saranno allora almeno $\infty^{k-3}$ che lasciano fisso un punto generico P; e anzi precisamente tante, se il gruppo stesso è transitivo (il che richiede $k \geq 3$). Queste operazioni formeranno un sottogruppo che permuterà le $\infty^2$ direzioni uscenti da P secondo le operazioni di un certo gruppo *proiettivo* (il quale potrebbe tuttavia ridursi alla sola trasformazione identica). Supposto per il momento che quest'ultimo gruppo sia anch'esso continuo, potremo concludere, per le note proprietà dei gruppi continui proiettivi in una forma fondamentale di 2ª specie, che dovrà presentarsi uno dei quattro casi seguenti [1]:

1° Le $\infty^2$ direzioni uscenti da P verranno permutate secondo tutte le possibili $\infty^8$ proiettività della loro stella;

2° Vi sarà in questa stella almeno una direzione fissa uscente da P;

3° Verrà trasformato in sè il sistema delle $\infty^1$ direzioni uscenti da P e contenute in un certo piano (formanti cioè un fascio) — senza però che sia fissa alcuna direzione, contenuta o no in questo piano —;

4° O infine verrà trasformato in sè un cono quadrico elementare di direzioni uscenti da P (potendosi anche supporre che

---

[1] Cfr. anche Lie, op. cit., vol. III, p. 124.

non sia contemporaneamente fissa nessuna direzione e nessun fascio di direzioni entro la stella P).

Si vede facilmente che il gruppo proposto G sarà certo *primitivo* nel 1° e nel 4° caso, e *imprimitivo* nel 2° (perchè in questo caso le direzioni fisse condurrebbero per integrazione a una congruenza di linee invariante). Nel 3° caso dovrà venir trasformata in sè una certa equazione Pfaffiana:

$$X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dx + Z(x,y,z)dz = 0;$$

e il gruppo G sarà primitivo o imprimitivo secondo che quest'equazione Pfaffiana sarà non integrabile oppure integrabile. — Se il gruppo G è primitivo, esso sarà pure transitivo: e dalla dimensione ($k - 3 \geqq 8, 5, 3$) del sottogruppo che se ne stacca col fissare il punto generico P si può già concludere che nel 1°, 3° e 4° caso sarà rispett. $k \leqq 11, 8, 6$.

Però il gruppo G, pur essendo continuo, potrebbe subordinare nella stella delle direzioni uscenti da P un gruppo proiettivo non più continuo, ma bensì misto [1], o composto soltanto di un numero finito ($\geq 1$) di operazioni. In tal caso, con un ragionamento analogo a quello che fu già applicato dal Klein alle forme di prima specie [2], si vedrebbe facilmente che nell'intorno del punto P sarebbe certo fissa o una direzione, o un sistema di un numero finito di direzioni (eventualmente anche permutabili fra loro); con che il gruppo G risulterebbe imprimitivo.

Concludiamo perciò che, se il gruppo G è primitivo, esso deve subordinare nell'intorno di un punto generico P, imposto come unito, un gruppo proiettivo continuo del 1°, 3° o 4° fra i tipi dianzi enumerati. Dovremo quindi esaminare successivamente questi tre casi.

---

[1] Questo caso non è indicato come possibile dal Sig. Lie, ma può effettivamente presentarsi; si presenta ad es. se G è il gruppo $\infty^7$ di tutte le trasformazioni proiettive che mutano in sè un dato cono quadrico.

[2] Cfr. il *Princip der Fixpunkte* (*Höhere Geometrie*, II, autogr. Vorl., 1893, pp. 275-76).

I.

3. — Si abbia un gruppo continuo G di trasformazioni cremoniane dello spazio, il quale subordini nella stella delle direzioni uscenti da un punto generico P l' intero gruppo proiettivo $\infty^8$ di questa stella.

Ricorriamo (come già si è avvertito) a un teorema generale del sig. LIE [1], secondo il quale *un gruppo continuo di trasformazioni puntuali di uno spazio qualunque, il quale nell'intorno di un punto generico, imposto come unito, subordini il massimo gruppo proiettivo possibile* (per lo spazio $S_3$ dunque un gruppo $\infty^8$), *si può ridurre con un'ulteriore trasformazione puntuale a un gruppo proiettivo,* e precisamente *al gruppo proiettivo totale,* ovvero *al gruppo lineare generale* o *speciale.* Si tratta ora di far vedere che nello spazio $S_3$ (come pure nel piano, e lo si dimostrerebbe anche facilmente per uno spazio qualunque) se il gruppo proposto si compone di trasformazioni cremoniane, esso deve potersi ridurre a uno dei tre gruppi proiettivi nominati con una trasformazione pure cremoniana (anzichè semplicemente puntuale). Indicata pertanto con $S^{-1}$ una trasformazione puntuale (certo esistente) la quale muti il gruppo *cremoniano* G in un gruppo proiettivo $G'$ ($\infty^{15}$, $\infty^{12}$ o $\infty^{11}$), basterà dimostrare che la sua inversa S fa corrispondere al sistema $\infty^3$ dei piani, invariante rispetto a $G'$, *un sistema lineare omaloidico di superficie,* il quale sarà invariante rispetto a G: da ciò seguirà appunto che S, e quindi $S^{-1}$, sono trasformazioni birazionali.

4. — Poichè vi sono in $G'$ infinite trasformazioni che lasciano fissi tutti i punti di un piano generico, così in G ve ne dovranno essere pure infinite per le quali siano fissi tutti i punti di una qualunque delle superficie $\varphi$, trasformate dei piani mediante S. Le $\varphi$ saranno dunque superficie algebriche (per l'ultima osservazione contenuta in E F. § 3); e saranno pure *razionali,*

---

[1] Op. cit., vol. I, p. 631.

perchè G subordina su ciascuna di esse un gruppo transitivo primitivo di trasformazioni birazionali [1].

Così pure, essendovi in $G'$ infinite trasformazioni che lasciano fissa una retta qualunque e ne permutano ancora i vari punti in infiniti (anzi in almeno $\infty^2$) modi diversi, si conclude che le intersezioni delle superficie $\varphi$ a due a due sono curve algebriche e con infinite (anzi almeno $\infty^2$) trasformazioni proiettive in sè; dunque curve *razionali* (e normali pei rispettivi spazi).

Infine, ciascuna $\varphi$ è incontrata dalle rimanenti secondo un sistema di sole $\infty^2$ curve razionali (trasformate mediante S delle rette di un certo piano); e questo sistema è invariante rispetto al gruppo primitivo subordinato da G su quella $\varphi$. Da ciò si trae che il detto sistema di $\infty^2$ curve su $\varphi$ è una rete omaloidica (perchè il gruppo di trasformazioni birazionali subordinato da G sulla $\varphi$ è equivalente a un gruppo proiettivo primitivo del piano; gruppo che non trasforma in sè nessun sistema $\infty^2$ di curve, all'infuori del sistema delle rette). Tre $\varphi$ generiche hanno dunque un solo punto variabile comune (perchè così avviene delle curve intersezioni di due di esse colla terza); e perciò le $\varphi$ formano un sistema lineare omaloidico, come appunto si voleva dimostrare.

Concludiamo pertanto: *I gruppi cremoniani corrispondenti al 1° caso del n° 2 sono riducibili birazionalmente a gruppi proiettivi,* e precisamente *al gruppo totale* $\infty^{15}$, *al gruppo lineare* $\infty^{12}$, o *al gruppo lineare speciale* $\infty^{11}$.

## II.

5. — Supponiamo ora che il gruppo cremoniano proposto subordini nell'intorno di un punto generico, imposto come unito, un gruppo proiettivo ($\infty^6$ o $\infty^5$) il quale non trasformi in sè nessuna direzione uscente da questo punto, bensì però un fascio di tali direzioni. Faremo vedere che *i gruppi di questa categoria*

---

[1] Dalle ricerche dei Sigg. Castelnuovo e Enriques (“ Compt. Rend. de l'Ac. des Sciences „, luglio 1895) risulta infatti che, se una superficie algebrica non razionale ammette infinite trasformazioni birazionali in sè, queste formano sempre un gruppo imprimitivo.

*sono tutti di un tipo unico, e si possono ridurre birazionalmente al gruppo proiettivo* $\infty^{10}$ *di un complesso lineare non speciale.*

Abbiamo già detto (cfr. n° 2) che in questo caso deve venir trasformata in sè stessa un'equazione Pfaffiana *non integrabile*, e riducibile quindi (come un'opportuna trasformazione) alla forma $dz - ydx = 0$, che è l'equazione differenziale di un complesso lineare non speciale [1]. Il sig. Lie, valendosi dei risultati ottenuti sui gruppi continui irriducibili di trasformazioni di contatto del piano, ha dimostrato che con quella stessa trasformazione ogni gruppo continuo primitivo di trasformazioni puntuali, rispetto al quale sia invariante l'equazione Pfaffiana considerata, deve necessariamente ridursi al grupppo $\infty^{10}$ delle proiettività che trasformano in sè il complesso lineare definito dalla $dz - ydx = 0$. Si potrebbe ora far vedere che, se il gruppo (primitivo) proposto si compone di trasformazioni birazionali, esso deve potersi ridurre a questo gruppo proiettivo $\infty^{10}$ con una trasformazione anche birazionale; ma noi tratteremo invece la questione direttamente, senza valerci del risultato già noto pei gruppi puntuali.

6. — Ci converrà perciò riferirci a una varietà razionale $M_3$ di un certo spazio $S_r$ ($r \geq 4$ [2]), la quale possa rappresentarsi sullo spazio $S_3$ in modo che al gruppo cremoniano proposto corrisponda su di essa un gruppo *proiettivo* G (di dimensione $k \geq 8$).

Un primo punto che ci importa stabilire è il seguente:

*Le* $\infty^{k-3}$ *trasformazioni del gruppo* G *che lasciano fisso un punto generico* P *della varietà* $M_3$ *trasformano in sè stessa anche una certa superficie contenuta nella* $M_3$ *e passante per* P. Faremo poi vedere che, variando P, questa superficie descrive, entro la varietà $M_3$, un sistema lineare omaloidico (che sarà certo invariante rispetto a G): di qui seguirà appunto la riduzione di G, e quindi del gruppo cremoniano proposto, a un gruppo proiettivo di $S_3$.

Le $\infty^{k-3}$ operazioni di G che lasciano fisso il punto generico P su $M_3$ formano un sottogruppo H, il quale trasforma in sè

---

[1] Lie, *Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 206.

[2] Escludiamo per ora il caso $r \geq 3$, per evitare talune complicazioni; vedremo poi che a questo caso si riducono tutti gli altri.

stesso lo spazio $S_3$ tangente in P alla $M_3$, e così pure un piano $\pi$ passante per P e contenuto in questo $S_3$, ma non lascia ancora fissa nessuna retta del fascio P ($\pi$). Una qualunque di queste rette sarà fissa per un ulteriore sottogruppo H′, soltanto $\infty^{k-1}$, il quale subordinerà gruppi integrabili nel piano $\pi$ e nello spazio $S_3$ tangente alla $M_3$ in P. *Io dico ora che questo gruppo* H′ *deve essere esso stesso integrabile.* Evidentemente da H′ noi possiamo staccare dei sottogruppi invarianti, di dimensioni decrescenti di un'unità per volta, fino ad avere un gruppo per il quale siano fissi tutti punti dello spazio $S_3$ considerato (tangente in P alla $M_3$); basterà quindi far vedere che quest'ultimo gruppo deve anche essere integrabile.

E infatti, se questo gruppo non fosse integrabile, esso dovrebbe contenere (almeno) un sottogruppo semplice $\infty^3$ (H″), il quale lascerebbe ancora fissi tutti i punti dello spazio $S_3$ tangente in P alla nostra $M_3$ — o eventualmente anche di un $S_h$ ($h \geq 3$) contenente tale $S_3$ —, e lascerebbe del pari fisso uno spazio $\Sigma_{r-h-1}$ non incontrante questo $S_h$, con tutti gli $S_{r-h}$ per esso ([1]). Fra questi $S_{r-h}$, quelli che proiettano i singoli punti della varietà $M_3$ dovranno tutti incontrare questa varietà in *superficie* passanti rispett. per questi punti (non già in curve o in numero finito di punti, perchè su tali enti il gruppo H″ non potrebbe operare in modo $\infty^3$). In particolare lo spazio $S_{r-h}$ passante per P incontrerà la $M_3$ secondo una superficie passante per P stesso; sicchè tutte le tangenti in P a questa superficie, essendo contenute in quell'$S_{r-h}$, dovranno incontrare lo spazio $\Sigma_{r-h-1}$. D'altra parte queste tangenti devono anche stare nello spazio $S_3$ tangente in P alla $M_3$, il quale non incontra $\Sigma_{r-h-1}$. Siamo dunque caduti in un assurdo, e perciò il gruppo H′ sarà necessariamente integrabile, c. s. v. d.

7. — Poichè dunque il gruppo H′ è integrabile, esso ammetterà tutta una serie di spazi fissi $S_1, S_2, \ldots S_{r-1}$ passanti per P, di cui ciascuno conterrà i precedenti. Fra questi spazi consideriamone uno (certo esistente) il quale incontri la varietà

---

([1]) Lie, *Theorie der Transformationsgruppen,* vol. III, pp. 757, 785. Cfr. anche la mia Memoria: *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè* (“ Mem. Acc. di Torino „, 1895-96).

$M_3$ secondo una *linea* (e non una superficie) passante per P; e indichiamo con $\gamma$ questa linea (o, eventualmente, una parte irriducibile di essa, anche passante per P). — Questa linea $\gamma$ (certamente algebrica) sarà invariante pel gruppo H', e toccherà in P l'unica retta invariante del fascio P ($\pi$) — che è anche la sola tangente fissa della $M_3$ —; essa varierà però al variare di H' entro il gruppo H ($\infty^{k-3}$), perchè varia appunto, entro una serie $\infty^1$, questa sua tangente. Variando, essa assumerà $\infty^1$ posizioni diverse, luogo delle quali sarà una superficie $\varphi$, tangente in P al piano $\pi$, e invariante rispetto ad H. Con ciò è appunto dimostrato quanto ci eravamo proposti al principio del n° prec.

Su questa superficie $\varphi$ (che sarà algebrica, perchè luogo di una serie razionale $\infty^1$ di curve algebriche) sarà pure invariante rispetto ad H il sistema $\infty^1$ delle curve $\gamma$, le quali verranno permutate da H stesso in tutti gli $\infty^3$ modi possibili, come le rette del fascio P ($\pi$) ad esse rispett. tangenti.

Variando P, varierà naturalmente la superficie $\varphi$, assumendo in tutto $\infty^3$ posizioni diverse, perchè se no le curve o superficie luoghi di punti P corrispondenti a una stessa $\varphi$ costituirebbero nella varietà $M_3$ un sistema d'imprimitività pel gruppo G. — Resta a mostrare che questo sistema $\infty^3$ è un sistema lineare omaloidico.

8. — Nel piano $\pi$ passante per il punto P lo stesso gruppo H già considerato (che è almeno $\infty^5$) subordina un gruppo proiettivo, per il quale è unito il punto P, ma non è fissa nessuna retta del fascio P ($\pi$). — Non si può invece escludere *a priori* che vi sia in $\pi$ una retta fissa non passante per P: se non ve n'è alcuna, il gruppo subordinato da H in $\pi$ sarà $\infty^6$ o $\infty^5$, mentre sarebbe soltanto $\infty^4$ o $\infty^3$ in caso contrario.

D'altra parte sappiamo che nella stella ($\infty^2$) delle rette tangenti in P alla varietà $M_3$ il gruppo H subordina almeno $\infty^5$ trasformazioni diverse. Se dunque in $\pi$ ne fossero subordinate sole $\infty^1$, o meno, si avrebbero in H infinite trasformazioni, per le quali sarebbero fissi tutti i punti del piano $\pi$ e non tutte le direzioni uscenti da P sulla varietà $M_3$. Noi dimostreremo ora che questo non può avvenire; e ne verrà perciò di conseguenza: 1° *che il gruppo* H *subordinerà in* $\pi$ *un gruppo proiettivo* $\infty^6$ o $\infty^5$

*avente il punto* P *come solo elemento unito;* 2° *che lo stesso gruppo* H *subordinerà su ciascuna retta del fascio* P (π), *e quindi anche su ciascuna curva* γ *della superficie* φ, *tutte le* $\infty^2$ *proiettività aventi in* P *un punto unito.* Le γ saranno pertanto curve razionali (e normali), e razionale sarà pure la superficie φ.

Supponiamo dunque che vi sia in H un sottogruppo continuo $H_0$ (almeno $\infty^1$, e necessariamente invariante entro H), le cui operazioni lascino fisso ogni punto del piano π; *dico che per queste stesse operazioni devono risultar fisse anche tutte le tangenti alla varietà* $M_3$ *nel punto* P. Infatti le operazioni del gruppo $H_0$ lasceranno fissi tutti i punti di ogni curva γ uscente da P (perchè sono tali tutti i punti della tangente in P a ciascuna di queste curve); *saranno dunque fissi rispetto a* $H_0$ *tutti i punti della superficie* φ *uscente da* P. — Di qui si trae che saranno pure fisse per $H_0$ tutte le $\infty^2$ superficie φ', analoghe a φ, uscenti dai punti di φ stessa, e quindi ancora le curve δ mutue intersezioni di queste superficie; sicchè $H_0$ *sarà un gruppo doppiamente intransitivo,* avente queste ($\infty^2$) curve δ come traiettorie fisse. — Infine, la superficie φ'' analoga a φ e φ', uscente da un punto generico della varietà $M_3$ (fuori di φ), pur non essendo fissa, dovrà tuttavia variare in modo da incontrare sempre la φ (che è luogo di punti uniti) secondo una medesima curva (luogo anche di punti uniti); essa dovrà dunque descrivere un sistema $\infty^1$ (e precisamente un fascio) contenente la stessa φ. *Di qui si trae che le* $\infty^2$ *curve* δ (ciascuna delle quali è luogo del punto corrispondente a una φ'' variabile) *dovranno tutte passare per* P. *Saranno dunque fisse per* $H_0$ *tutte le tangenti in* P *a queste* $\infty^2$ *curve;* e siccome $H_0$ è contenuto invariantivamente in H, così ogni operazione di H dovrà ancora trasformare in sè, se non ciascuna di queste tangenti, certo l'insieme di esse. Ora, nella stella $\infty^2$ delle tangenti in P alla varietà $M_3$, sono invarianti rispetto ad H solo l'intera stella, e il fascio di quelle tangenti che stanno in π: e una curva δ generica non può essere tangente a una retta del fascio P (π), perchè se no essa sarebbe anche, come le γ, luogo di punti uniti per l'intero gruppo $H_0$.

Le tangenti in P alle $\infty^2$ curve δ esauriranno dunque il sistema delle tangenti in P stesso alla varietà $M_3$; e perciò ogni

operazione del gruppo $H_0$ lascerà pure fisse tutte queste tangenti (1).

9. Le cose dette finora ci conducono a una rappresentazione birazionale semplicissima della superficie φ, invariante pel gruppo H, sul piano π ad essa tangente. Ogni punto di φ (o di π) diverso da P è infatti unito per $\infty^{k-5}$ operazioni di G — ossia di H —: e queste stesse operazioni lasciano anche fissa la curva γ di quella φ (la retta del fascio P (π)) passante per il punto considerato, quindi ancora *la* retta del fascio P (π) (*la* curva γ della superficie φ) tangente in P a questa curva (a questa retta), e *un* determinato punto di questa tangente (di questa curva γ), ossia del piano π (della superficie φ); punto che si assumerà come omologo al primo. La superficie φ risulta così riferita birazionalmente al piano π, in modo che alle curve γ corrispondono le rette del fascio P: e questa corrispondenza trasforma precisamente l'uno nell'altro i gruppi proiettivi subordinati da G (o da H) su quelle due superficie.

Consideriamo ora, sopra questa φ, il sistema delle linee intersezioni di essa colle rimanenti (analoghe) superficie φ; sistema che sarà al più $\infty^3$, e invariante rispetto al gruppo H. Quali linee corrisponderanno a queste nel piano π? Bisognerà cercare in π un sistema al più $\infty^3$ di linee (non passanti, in generale, per P) il quale sia invariante rispetto al gruppo H (che opera su P in modo almeno $\infty^5$): ciascuna di queste linee dovrà quindi essere invariante per almeno $\infty^2$ operazioni di H stesso, ossia per almeno $\infty^2$ trasformazioni proiettive di π, per le quali sia pure fisso il punto P. Tali linee, se irriducibili, non potranno dunque essere che rette: e, se si spezzassero, potrebbero tutt'al più spezzarsi in coppie di rette: caso anche da escludersi, perchè nel gruppo ($\infty^6$ o $\infty^5$) subordinato da H in π vi sono ancora infinite operazioni trasformanti l'una nel-

(1) Da queste considerazioni segue già che il sistema $\infty^3$ delle superficie φ è lineare — perchè contiene l'intero fascio individuato da due qualunque di esse —, purchè però vi siano nel gruppo G infinite trasformazioni che lascino fisso ogni punto del piano π considerato. Risulterà in seguito, dal fatto che il gruppo G deve essere $\infty^{10}$, che questa condizione è sempre soddisfatta.

l' altra due qualunque delle $\infty^1$ coppie di rette non passanti per P (sicchè non risulta invariante nessun sistema di dimensione $\leq 3$ di tali linee). E poichè nel piano $\pi$ vi sono soltanto $\infty^2$ rette, così concludiamo che la superficie $\varphi$ considerata è incontrata dalle rimanenti secondo sole $\infty^2$ linee diverse, formanti (come le rette corrispondenti nel piano $\pi$) una rete omaloidica.

10. — *Una qualunque superficie $\varphi$ è dunque incontrata dalle rimanenti secondo una rete omaloidica di curve.* Di qui segue immediatamente che tre $\varphi$ generiche hanno una sola intersezione variabile, e che perciò *le superficie $\varphi$ formano un sistema lineare omaloidico.*

Riferendo proiettivamente, in un modo qualsiasi, quest'ultimo sistema al sistema dei piani dello spazio $S_3$, potremo rappresentare birazionalmente la nostra $M_3$ (cfr. n° 5) sullo spazio, in modo che al gruppo G, e quindi al gruppo cremoniano proposto, corrisponda un gruppo proiettivo (di $S_3$). Concludiamo perciò:

*I gruppi cremoniani di questa categoria* II *si possono tutti ridurre, con un' opportuna trasformazione birazionale, a gruppi proiettivi.*

Rimane soltanto a vedere quali siano i gruppi proiettivi di $S_3$ soddisfacenti alle condizioni qui richieste (primitivi cioè, e tali che, fissando un punto, risulti fisso anche un piano, ma non una retta, per questo punto). Esclusi i gruppi con almeno un punto unito fisso, che sono certo imprimitivi: esclusi pure tutti quelli con una linea o una superficie invariante; sia che questa linea o superficie sia di ordine $\geq 2$, perchè per ogni punto imposto come unito si avrebbe un cono invariante (proiettante la linea, o tangente alla superficie) di ordine $\geq 2$; sia che si tratti invece di una retta (gruppo imprimitivo) o di un solo piano invariante (gruppi già incontrati nella categoria I); non rimangono, com'è noto, che due altri casi soltanto ([1]): il gruppo proiettivo totale $\infty^{15}$, e *il gruppo $\infty^{10}$ di un complesso lineare non speciale.* Di questi, il secondo soltanto soddisfa alle condizioni richieste (le $\infty^3$ rette del complesso essendo precisamente le linee $\gamma$ da noi considerate sulla varietà $M_3$: varietà

([1]) Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, p. 235.

che qui non è altro che lo stesso spazio $S_3$). Concludiamo pertanto;

*Ogni gruppo continuo di trasformazioni cremoniane dello spazio, il quale sia primitivo e tale che, imposto come fisso un punto generico, risulti pure fissa una giacitura uscente da questo punto, contiene necessariamente dieci parametri, e si può trasformare birazionalmente nel gruppo $\infty^{10}$ delle collineazioni che mutano in sè stesso un complesso lineare non speciale.*

Con un ragionamento un po' più lungo si potrebbe anche prescindere dall'uso del teorema sui gruppi proiettivi di $S_3$, del quale ci siamo valsi poc'anzi, facendo vedere direttamente che si giunge a un gruppo trasformante in sè una reciprocità nulla, e quindi un complesso lineare di rette. Per brevità non vi insistiamo.

## III.

11. — Per completare lo studio dei gruppi cremoniani continui primitivi ci rimane a considerare il caso di un gruppo, il quale, nell'intorno di un punto generico imposto come unito, subordini le $\infty^3$ trasformazioni proiettive che lasciano fisso un cono quadrico di direzioni uscenti dal punto stesso (caso 4° del n° 2).

Assunti nell'intorno di questo punto generico $P(x, y, z)$ i differenziali $dx, dy, dz$ come coordinate omogenee di una direzione variabile, il cono quadrico invariante verrà rappresentato da un'equazione omogenea di 2° grado negli stessi differenziali:

$$a_{11}\,dx^2 + a_{22}\,dy^2 + \ldots\ldots = 0 \tag{1}$$

i cui coefficienti $a_{ik}$ varieranno col punto P, e saranno perciò funzioni delle (sole) coordinate $x, y, z,$ tali che il determinante $|a_{ik}|$ non risulti identicamente nullo.

*La* (1) *è dunque una* EQUAZIONE DI MONGE [1], *che deve essere trasformata in sè dal gruppo cremoniano proposto.* Essa definisce infatti una varietà $\infty^1$ di elementi lineari (" *Linienele-*

[1] LIE, *Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 249.

*mente* „) dello spazio, la quale è invariante rispetto ad ogni operazione di questo gruppo.

Ora, ad ogni equazione di Monge, purchè non lineare nei differenziali $dx, dy, dz$ che in essa compaiono, corrisponde una certa equazione alle derivate parziali del 1° ordine (anche non lineare):

$$F(x, y, z, p, q) = 0)$$

$\left(\text{essendo } p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, la quale è soddisfatta da $\infty^4$ elementi superficiali („ *Flächenelemente* „) dello spazio, e precisamente da quegli elementi $x, y, z, p, q$ che per ogni punto $x, y, z$ inviluppano il cono definito dalla proposta equazione di Monge.

Alla nostra equazione (1) corrisponderebbe un' equazione alle derivate parziali (di 1° ordine e 2° grado), il cui primo membro sarebbe la funzione reciproca (o aggiunta) della forma quadratica che compare nella (1):

$$A_{11} p^2 + A_{22} q^2 + \ldots\ldots = 0 \tag{2}$$

È chiaro che *anche quest' equazione alle derivate parziali dovrà essere trasformata in sè dal gruppo proposto.*

Infine, è pure noto che ad ogni equazione alle derivate parziali (non lineare) sono collegate invariantivamente rispetto ad ogni trasformazione puntuale [1] certe $\infty^3$ curve dette *caratteristiche,* che sono particolari curve integrali della corrispondente equazione di Monge, nel nostro caso dunque dell'equazione (1). *Sarà dunque invariante rispetto al gruppo cremoniano proposto anche il complesso delle $\infty^3$ caratteristiche dell' equazione alle derivate parziali* (2). È appunto sull'esistenza di un complesso di linee invariante rispetto al gruppo proposto che riposano le varie considerazioni che ora svilupperemo.

Di queste $\infty^3$ curve ne passeranno $\infty^1$ per ogni punto dello spazio, e ciascuna di esse avrà in questo punto una direzione contenuta nel corrispondente cono (1); mentre, inversamente, ogni direzione contenuta in questo cono elementare apparterrà ad *una* caratteristica uscente da quel punto. — Veramente *a*

---

[1] Lie: op. ultima cit., p. 579.

*priori* non si potrebbe escludere che ciascuna direzione di un dato cono elementare appartenesse anche ad un numero $> 1$ di caratteristiche (descriventi però altrettante superficie separate uscenti dal punto vertice di quel cono, perchè se no nella serie $\infty^1$ delle stesse caratteristiche si avrebbe un'involuzione invariante, e non potrebbero perciò venir subordinate in essa che sole $\infty^1$ trasformazioni, e non già $\infty^3$). Tuttavia, partendo dall'osservazione che vi sono certo nel gruppo infinite trasformazioni che lasciano fissi tutti i punti di una caratteristica qualsiasi, e quindi anche quelli di ogni altra eventualmente tangente alla prima, si riesce facilmente ad escludere questo caso.

**12.** Immaginiamo di nuovo costruita una varietà razionale $M_3$ di uno spazio $S_r$, rappresentabile sopra $S_3$ in modo che al gruppo cremoniano proposto corrisponda su di essa un gruppo *proiettivo* G. Sopra questa varietà sarà invariante rispetto a G un complesso (sistema $\infty^3$) di linee $\gamma$, corrispondenti alle caratteristiche dell'equazione (2).

Fissato sulla $M_3$ un punto generico P, risulterà anche fisso il cono quadrico delle tangenti alle $\infty^1$ curve $\gamma$ passanti per questo punto; cono che è contenuto nello spazio $S_3$ ivi tangente alla varietà $M_3$. Sopra questo cono verrà subordinato un gruppo proiettivo, che dovrà permutarne le generatrici in tutti gli $\infty^3$ modi possibili, e sarà perciò *non integrabile*. Come tale, esso dovrà anche subordinare su ciascuna generatrice del cono, imposta come unita, almeno $\infty^1$ trasformazioni diverse (perchè così avviene in tutti i casi — che sono noti — di gruppi proiettivi non integrabili sopra un cono). Altrettante trasformazioni, col punto (generico) P come punto unito, si avranno quindi anche sulla linea $\gamma$ tangente a questa generatrice in P stesso; e perciò, complessivamente, su questa $\gamma$ verranno subordinate da G (al variare di P) almeno $\infty^2$ trasformazioni proiettive.

*Le linee* $\gamma$, e quindi *le caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali* (2), *sono dunque curve algebriche e razionali.*

Ciò premesso, ci converrà distinguere i due casi seguenti:

1° Il gruppo subordinato da G sopra una curva $\gamma$ è precisamente $\infty^2$, e ammette quindi sulla curva stessa *un* punto unito fisso A;

2° Questo stesso gruppo è invece $\infty^3$ (sicchè, imposta come fissa una curva $\gamma$, non risulterà ancora fisso nessun punto su di essa).

Cominceremo dal primo caso (cfr. ni 13-16), al quale sarà poi facile ricondurre il secondo (n° 17).

E, quanto al primo caso, osserviamo subito che *il punto* A *che noi supponiamo risultare fisso sopra una qualsiasi curva* $\gamma$ *non è un punto generico della varietà* $M_3$; e perciò, *per effetto delle diverse trasformazioni del gruppo* G, *esso non potrà assumere che al più* $\infty^2$ *posizioni diverse.* Infatti con tre sole condizioni noi possiamo ottenere che sia fissa una curva $\gamma$ col punto A che vi è contenuto; mentre invece per fissare un punto *generico* e una curva $\gamma$ qualsiasi passante per esso occorrono quattro condizioni.

Noi possiamo anzi supporre che il punto A assuma in tutto *precisamente* $\infty^2$ posizioni diverse (descriva cioè una certa superficie F), perchè a questo caso possiamo sempre ridurci trasformando opportunamente la varietà $M_3$.

Si considerino ad es. le $\infty^3$ superficie luoghi rispettivamente delle curve $\gamma$ uscenti dai singoli punti P della $M_3$ primitiva, e si prenda come nuova $M_3$ quella rappresentata dal minimo sistema lineare (certo invariante) che contiene tali superficie. (Questo sistema lineare è certo semplice, perchè, se appartenesse a un'involuzione (invariante, di ordine $>1$), i punti coniugati di un punto qualunque P in questa involuzione dovrebbero stare su una e quindi su ciascuna delle $\gamma$ uscenti da P stesso; sicchè su ciascuna di queste curve si avrebbe pure un'involuzione invariante, e non potrebbero perciò venirvi subordinate $\infty^2$ trasformazioni diverse). Sulla nuova $M_3$ tutte le sezioni iperpiane (o almeno $\infty^3$ fra queste, formanti una serie continua e non contenuta in un sistema lineare inferiore) dovranno contenere qualche punto A, sicchè di questi punti ve ne saranno almeno $\infty^1$. E, se ve ne fossero soltanto $\infty^1$ (aventi per luogo una curva), quindi sopra ogni sezione iperpiana solo un numero finito, bisognerebbe che le $\gamma$ uscenti da un dato punto P concorressero ancora in uno stesso punto A (di quella curva); e allora i punti P corrispondenti a uno stesso A formerebbero superficie costituenti un sistema d'imprimitività pel gruppo G. Concludiamo perciò che sulla $M_3$ così costruita i punti A avranno certo per luogo una *superficie.*

**13.** — Supponiamo dunque che vi sia nella $M_3$ una superficie F, invariante rispetto al gruppo G, e incontrata da ogni $\gamma$ in *un* punto (A). Le $\infty^1$ curve $\gamma$ uscenti da un punto generico P della varietà $M_3$ incontreranno rispettivamente la F negli $\infty^1$ punti di una curva $p$, la quale sarà invariante per tutte quelle trasformazioni di G che lasciano fermo P. Su questa curva $p$ verranno subordinate, come nella serie delle $\gamma$ uscenti da P, $\infty^3$ trasformazioni (proiettive) diverse; le $p$ sono dunque curve algebriche e razionali (normali). — Variando P, varierà la corrispondente curva $p$, e assumerà in tutto $\infty^3$ posizioni diverse (se no le curve o superficie luoghi di punti P corrispondenti a una stessa $p$ costituirebbero un sistema d'imprimitività pel gruppo G). *Il gruppo (certamente transitivo) subordinato da* G *sopra* F *dovrà trasformare in sè questo sistema* $\infty^3$ *di curve* p. — D'altra parte questo gruppo (proiettivo) subordinato su F è oloedricamente isomorfo (in senso gruppale) a G medesimo, e quindi, al pari di G, almeno $\infty^6$ (perchè in G non vi può essere che un numero finito di trasformazioni, le quali lascino fisso ogni punto di F, e quindi ogni linea $p$). Ricordando pertanto che un gruppo continuo di trasformazioni proiettive sopra una superficie algebrica è sempre equivalente a un gruppo proiettivo del piano, oppure sopra una quadrica di $S_3$, o sopra un cono razionale normale di ordine $n$ in $S_{n+1}$, non sarà difficile riconoscere quali casi potranno qui presentarsi.

È certo che il gruppo subordinato da G sopra F non può essere equivalente a un gruppo di omografie piane, perchè alle ($\infty^3$) curve $p$ dovrebbero corrispondere altrettante coniche, e un gruppo almeno $\infty^6$, quindi $\infty^6$ o $\infty^8$ di omografie piane non trasforma in sè nessun sistema $\infty^3$ di coniche (irriducibili).

Potrebbe invece questo gruppo ridursi al gruppo (continuo) $\infty^6$ delle trasformazioni proiettive di una quadrica di $S_3$; e si vede facilmente che alle curve $p$ dovrebbero allora corrispondere le sezioni piane (ossia le coniche) di questa quadrica.

Supponiamo infine che il gruppo proiettivo subordinato sopra F sia equivalente a un gruppo proiettivo sopra un cono $\Gamma^n$ di $S_{n+1}$ ($n > 2$); *dico che questo caso è possibile soltanto per* n$=$2. — Anzitutto alle curve $p$ su F dovranno corrispondere su $\Gamma^n$ curve razionali *normali*, dunque di ordine $n$ o $n+1$; anzi precisamente di ordine $n$ (vale a dire sezioni iperpiane del cono),

perchè se no sulle stesse curve non potrebbero venir subordinate che (al più) $\infty^2$ proiettività trasformanti in sè il cono $\Gamma^n$. Di più, il sistema di queste $\infty^3$ curve $C^n$ — ovvero dei relativi iperpiani $S_n$ — è un *sistema lineare;* ciò segue immediatamente dal fatto che nel gruppo, almeno $\infty^6$, da considerarsi su $\Gamma^n$ vi sono almeno $\infty^3$ omologie (col centro nel vertice del cono), le quali, applicate ad uno generico di quegli $S_n$, gli fanno descrivere un sistema lineare $\infty^3$, che dovrà necessariamente coincidere col sistema invariante considerato. — Infine, essendo invariante un sistema lineare $\infty^3$ di spazi $S_n$ in $S_{n+1}$, sarà pure invariante (per $n \geq 3$) lo spazio $S_{n-3}$ base del sistema, e quindi lo spazio $S_{n-2}$ che proietta questo dal vertice del cono $\Gamma^n$ (vertice che non sta in quell' $S_{n-3}$, se no tutte le $\infty^3$ curve $C^n$ si spezzerebbero in gruppi di $n$ generatrici). D'altra parte il nostro gruppo proiettivo su $\Gamma^n$ non può lasciar fisso nessuno spazio (di dimensione $\geq 1$) passante pel vertice di $\Gamma^n$ stesso (perchè se no esso, e quindi G, risulterebbero integrabili); sarà quindi $n=2$ come avevamo affermato da principio. E alle curve $p$ corrisponderanno precisamente le $\infty^3$ sezioni piane del cono quadrico $\Gamma^2$.

Concludiamo perciò che *il sistema delle curve* p *sopra* F *è in ogni caso un sistema lineare* $\infty^3$ *di grado due, trasformabile birazionalmente nel sistema delle sezioni piane di una quadrica o cono quadrico di* $S_3$. — Ricordando poi ancora che il gruppo G deve essere oloedricamente isomorfo al gruppo da esso subordinato sopra F, e quindi ancora a un gruppo proiettivo sopra una quadrica o cono quadrico di $S_3$, si può aggiungere che (limitatamente all'ipotesi 1ª del nº 12) *il gruppo* G *è necessariamente* $\infty^6$ o $\infty^7$, e ha in ciascuno di questi casi composizioni ben determinate.

**14.** — Ad ogni curva $p$ sulla superficie F corrisponde almeno un punto P della varietà $M_3$, tale che le $\gamma$ uscenti da questo punto incontrano F sopra quella $p$; ma potrebbe anche darsi che ad una stessa curva $p$ corrispondesse un numero finito $n>1$ di punti P. Ove ciò avvenga, ne risulterà definita sulla varietà $M_3$ un'involuzione di punti di ordine $n$, invariante rispetto al gruppo G, e tale che a due punti coniugati in essa corrisponderà sempre una stessa curva $p$ sopra F.

Alla considerazione di quest' involuzione si collega quella

delle superficie (che indicheremo con $\alpha$) luoghi delle $\infty^1$ curve $\gamma$ uscenti rispettivamente dai singoli punti di F. Fra queste superficie, complessivamente in numero di $\infty^2$, ve ne sono $\infty^1$ che passano per un punto qualunque P della varietà $M_3$: quelle, e quelle sole, che *escono* dai punti A della linea $p$ corrispondente al punto P considerato. Ora, se nella $M_3$ esiste effettivamente un'involuzione invariante $I_n$ del tipo dianzi considerato (essendo $n>1$), queste stesse $\infty^1$ superficie $\alpha$ passanti per P dovranno anche contenere gli $n-1$ punti coniugati di P nella detta involuzione (mentre invece nel caso $n=1$ non passerebbero per nessun altro punto variabile con P). *Il sistema $\infty^2$ delle superficie $\alpha$ apparterrà dunque all'evoluzione invariante $I_n$ (supposta esistente).*

Ci converrà esaminare separatamente i due casi di $n=1$ e $n>1$; e cominciamo dal primo.

15. — Nel caso $n=1$ abbiamo già detto che le superficie $\alpha$ passanti per un punto generico della varietà $M_3$ non passano in conseguenza per nessun altro punto variabile col primo. — Possiamo aggiungere che per due punti generici della $M_3$ passano *due* superficie $\alpha$ (uscenti rispettivamente dai punti A intersezioni delle due curve $p$ che corrispondono ai punti considerati). Il sistema ($\infty^2$) delle $\alpha$ è dunque quadratico, e perciò contenuto in *un* sistema lineare $\infty^3$, che sarà pure invariante rispetto a G. Infine questo sistema lineare $\infty^3$ è omaloidico, perchè tre superficie $\alpha$ generiche (e tanto basta) hanno una sola intersezione variabile: infatti alle loro intersezioni devono corrispondere sopra F altrettante curve $p$ distinte e passanti pei tre punti A da cui escono le stesse $\alpha$; e di tali curve $p$ non ve ne ha che una.

L'esistenza di questo sistema lineare omaloidico invariante permette di ridurre il gruppo G operante sulla nostra $M_3$, e quindi il gruppo cremoniano di $S_3$ a cui G si supponeva equivalente, a un gruppo proiettivo anche di $S_3$. Alle superficie $\alpha$ corrisponderanno $\infty^2$ piani formanti un inviluppo di 2ª classe; dunque il sistema dei piani tangenti a una quadrica, non degenere, o anche semplicemente degenere come inviluppo. Nel primo caso avremo *il gruppo proiettivo (continuo) $\infty^6$ di una quadrica non degenere;* nel secondo caso, un gruppo proiettivo

con una conica fissa, la quale può supporsi coincidente coll'assoluto dello spazio euclideo; si tratterà perciò o del *gruppo* $\infty^7$ *delle similitudini,* o del *gruppo* $\infty^6$ *dei movimenti euclidei.* — Nel primo caso la stessa quadrica fissa è la superficie F, luogo dei punti A; e le tangenti a questa quadrica sono le linee $\gamma$. Nel secondo caso la superficie F si è ridotta ad una curva — la conica fissa —; ma i due gruppi relativi possono considerarsi come ottenuti per proiezione stereografica da gruppi proiettivi sopra una quadrica di $S_4$, sulla quale si sia fissato il punto centro di proiezione: il cono di rette uscente da questo punto è allora la superficie F, e le $\infty^3$ rette della quadrica sono le linee $\gamma$.

Abbiamo trovati dunque tre gruppi tipici:

1° *Gruppo continuo* $\infty^6$ *delle trasformazioni proiettive di* $S_3$ *che lasciano fissa una quadrica non degenere* (e ciascuno dei suoi sistemi di generatrici), ovvero anche *gruppo* $\infty^6$ *dei movimenti non euclidei;*

2° *Gruppo* $\infty^7$ *delle similitudini;*

3° *Gruppo* $\infty^6$ *dei movimenti euclidei.*

16. — Supponiamo ora che vi sia sulla varietà $M_3$ un'involuzione invariante $I_n$ $(n > 2)$, i cui gruppi si compongano di punti corrispondenti a una stessa curva $p$ sopra F (cfr. n° 14). A quest'involuzione apparterranno allora tanto il sistema $\infty^2$ delle superficie $\alpha$, quanto il sistema lineare $\infty^3$ in cui il precedente (essendo d'indice *due*) sarà pur sempre contenuto. Questo sistema lineare $(\Sigma)$ non sarà dunque più omaloidico, ma permetterà di rappresentare l'involuzione $I_n$ sullo spazio $S_3$, e la varietà $M_3$ sopra questo $S_3$ *multiplo* ($n^{\text{plo}}$), in modo che al gruppo G corrisponda ancora, in questo spazio, uno dei tre gruppi proiettivi trovati al n° prec. — È facile anzi vedere che, di questi tre gruppi, non potrà qui presentarsi che il 1° (ossia il gruppo proiettivo con una quadrica fissa). Infatti il nostro $S_3$ multiplo deve necessariamente ammettere una *superficie* di diramazione di ordine $>1$, perchè se no alle rette di esso corrisponderebbero sulla $M_3$ curve riducibili [1], e in particolare alle rette di

[1] È noto infatti che, sopra una curva irriducibile, un'involuzione razionale di ordine $n > 1$ (priva di punti fissi) ammette sempre almeno due gruppi distinti con elementi multipli.

un piano curve (anche riducibili) di una superficie del sistema $\Sigma$, formanti sopra questa superficie un sistema lineare $\infty^2$; ed è noto che le curve di un sistema lineare non possono tutte spezzarsi in due o più parti variabili — come qui avverrebbe —, a meno che queste parti non formino un fascio — il che invece non sarebbe possibile —. Di più, questa stessa superficie di diramazione dovrà essere invariante rispetto al gruppo proiettivo ottenuto in $S_3$. Ora, dei tre gruppi incontrati al n° prec., il primo soltanto trasforma in sè una superficie di ordine $>1$ (e precisamente una quadrica): dovrà dunque certo presentarsi questo caso.

Da questo gruppo proiettivo $\infty^6$ di $S_3$ si può estrarre un sottogruppo semplice $\infty^3$, il quale lasci fisso un piano generico; vi sarà perciò in G un sottogruppo analogo, il quale lascerà fissa una superficie generica del sistema $\Sigma$, e, sopra questa, l'involuzione di ordine $n$ costituita dagli $\infty^2$ gruppi di $I_n$ che vi sono contenuti. D'altra parte i tipi di gruppi proiettivi semplici $\infty^3$ sopra una superficie sono tutti conosciuti; e, fra questi, il solo gruppo proiettivo di una quadrica (non degenere) con una conica fissa soddisfa alla duplice condizione (qui richiesta) di trasformare in sè un'involuzione di ordine $>1$ (e precisamente un'involuzione quadratica) e una rete di curve irriducibili (coniche) appartenente a questa involuzione (e corrispondente al sistema delle rette del piano rappresentativo). *Sarà dunque necessariamente* $n=2$. Infine, uno spazio $S_3$ *doppio* avente come superficie di diramazione una quadrica non degenere si può rappresentare sopra una $M_3^2$ di $S_4$, in modo che alle trasformazioni proiettive di esso che lasciano fissa la quadrica di diramazione corrispondano le trasformazioni proiettive di questa $M_3^2$ che lasciano fisso un punto dello spazio $S_4$ esterno alla varietà stessa (potendosi l'$S_3$ doppio considerare come proiezione della $M_3^2$ da quest'ultimo punto) (¹). Concludiamo perciò che i gruppi di questa nuova categoria (caso $n>1$ del n° 14) devono tutti ridursi a un unico tipo: al *gruppo $\infty^6$ delle trasformazioni proiettive di una quadrica di $S_4$, che lasciano fisso un punto di questo spazio esterno alla quadrica,* e quindi anche *una sezione iperpiana generica di questa*

(¹) Di questa rappresentazione è fatto uso anche in EF, § 18.

*quadrica* (determinata cioè da un $S_3$ ad essa non tangente). Questo gruppo $\infty^6$ soddisfa appunto alle varie condizioni imposte; e le coppie di punti della quadrica allineate sul polo della sezione iperpiana fissa formano un'involuzione quadratica invariante rispetto al gruppo medesimo, la quale si trova nelle condizioni richieste per la $I_n$.

Questo gruppo $\infty^6$ si può ricondurre, per mezzo di una proiezione stereografica e (eventualmente) di una trasformazione proiettiva, a un gruppo di trasformazioni conformi, rispetto alle quali dovrà essere invariante una sfera (reale o immaginaria, ma non di raggio nullo).

Troviamo dunque come 4° tipo di questa categoria III il *gruppo $\infty^6$ delle trasformazioni conformi che mutano in sè una sfera (non nulla).* Questo gruppo trasforma in sè l'involuzione razionale delle coppie di punti che, considerate come sfere nulle, appartengono ad un medesimo fascio contenente la sfera fissa.

**17.** — Passiamo ora ad occuparci di quei gruppi G che sopra ogni linea $\gamma$ subordinano tutte le possibili $\infty^3$ trasformazioni proiettive (caso 2° del n° 12).

Consideriamo entro G quel sottogruppo (continuo) H, di dimensione $k-3$, che si ottiene imponendo come fisso un punto generico P della varietà $M_3$. Questo sottogruppo trasformerà in sè stessa la superficie $\Pi$, luogo delle $\infty^1$ curve $\gamma$ uscenti da P. Da ogni punto di questa superficie esciranno pure $\infty^1$ curve $\gamma$, non contenute in generale in $\Pi$ stessa; e, variando quest'ultimo punto, varieranno tali curve, assumendo in tutto $\infty^3$ posizioni diverse, descrivendo cioè l'intero complesso delle $\gamma$ (sicchè ogni $\gamma$ avrà (almeno) un punto comune con quella superficie $\Pi$).

*Dico ora che questo sottogruppo* H *deve coincidere con uno dei gruppi già studiati precedentemente* (e riducibili ai tipi dei n[i] 15 e 16). Basterà perciò far vedere che il gruppo H subordina ancora nell'intorno di un nuovo punto generico R della varietà $M_3$ lo stesso gruppo proiettivo $\infty^3$ (con un cono quadrico elementare invariante) subordinatovi dall'intero gruppo G; in altri termini, che le $\infty^1$ curve $\gamma$ uscenti da R vengono permutate anche da H in tutti gli $\infty^3$ modi possibili. — Sopra ogni curva $\gamma$ verranno però subordinate da H sole $\infty^2$ proiettività, con un punto fisso A; e questo punto avrà per luogo la stessa superficie $\Pi$ contenente le $\gamma$ che escono da P.

Consideriamo perciò la superficie luogo delle $\infty^1$ $\gamma$ uscenti dal punto R, nonchè la curva $r$ intersezione di questa superficie colla $\Pi$: al variare di R questa curva descriverà sopra $\Pi$ un sistema al più $\infty^3$, invariante rispetto ad H.

Ora, la superficie $\Pi$ può riferirsi birazionalmente al cono quadrico delle tangenti in P alle $\infty^1$ curve $\gamma$ di cui essa è luogo, assumendo come omologhi due punti (rispett. di $\Pi$ e di questo cono) i quali risultino uniti per le medesime operazioni di H (corrispondenza analoga a quella considerata al n° 9 tra le superficie $\varphi$ e il piano $\pi$). In questo modo vengono a corrispondersi i gruppi (proiettivi, non integrabili) subordinati da H sopra quelle due superficie; e, dovendosi avere sul cono quadrico considerato un gruppo (proiettivo) non integrabile il quale operi in modo $\infty^2$ sopra ciascuna generatrice di esso, questo non potrà essere che il gruppo totale $\infty^7$, o il suo sottogruppo invariante $\infty^6$. In ambo i casi non esiste sul cono alcun sistema invariante di curve non passanti per P e di dimensione $<3$; e l'unico di dimensione $=3$ è quello delle sezioni piane. Le curve $r$ su $\Pi$ dovranno dunque corrispondere alle sezioni piane di questo cono; e su ciascuna di esse, quindi anche nella serie $\infty^1$ delle $\gamma$ uscenti da un punto R, verranno subordinate da H $\infty^3$ trasformazioni.

*Il sottogruppo* H *di* G *rientra dunque a sua volta in uno dei tipi già incontrati di questa categoria III.*

Quale sarà questo tipo? Poichè gli attuali punti A hanno per luogo una superficie $\Pi$ sulla quale viene subordinato un gruppo equivalente ad un gruppo proiettivo sopra un cono quadrico di $S_3$, dobbiamo trovarci nel 2° o 3° caso del n° 15; e diremo perciò:

*Il sottogruppo* H *di* G *è equivalente ad un gruppo proiettivo* ($\infty^6$ o $\infty^7$) *sopra una quadrica non degenere di* $S_4$, *sulla quale si sia fissato un punto* P. Le linee $\gamma$ sono le rette di questa quadrica; la superficie $\Pi$, il cono di rette uscente da P.

All'intero gruppo G corrisponderà sopra questa quadrica un gruppo di trasformazioni, le quali dovranno ancora mutare rette in rette, e coni di rette in coni di rette; dunque ancora un gruppo proiettivo. E questo gruppo, dovendo contenere tre parametri in più di H, sarà l'intero gruppo $\infty^{10}$ delle trasformazioni proiettive di quella quadrica: non un gruppo $\infty^9$, perchè

il gruppo proiettivo $\infty^{10}$ di una quadrica non degenere di $S_4$ non contiene sottogruppi $\infty^9$ ([1]).

È noto poi che questo gruppo $\infty^{10}$ si può ridurre a sua volta al gruppo di tutte le trasformazioni conformi di $S_3$. Troviamo pertanto come 5° ed ultimo tipo di questa categoria III *il gruppo $\infty^{10}$ di tutte le trasformazioni conformi* (che mutano cioè le sfere in sfere).

18. — Con ciò è completamente risoluta la questione posta al principio di questo lavoro; ed è (nuovamente) dimostrato che *ogni gruppo continuo primitivo di trasformazioni cremoniane dello spazio si può ridurre, con un'opportuna trasformazione cremoniana, a un gruppo di trasformazioni proiettive o conformi.* Più particolarmente, ogni gruppo siffatto è riducibile a uno dei *nove* gruppi seguenti, i quali sono tutti birazionalmente distinti fra loro:

*A.* Gruppi proiettivi non conformi:

1° *Gruppo totale* $\infty^{15}$;

2° *Gruppo lineare generale* $\infty^{12}$ (o *gruppo delle affinità*);

3° *Gruppo lineare speciale* $\infty^{11}$ (o *gruppo delle affinità equivalenti*);

4° *Gruppo* $\infty^{10}$ *delle trasformazioni proiettive che mutano in sè stesso un complesso lineare non speciale;*

5° *Gruppo* $\infty^6$ *delle trasformazioni proiettive che lasciano fissa una quadrica non degenere, e ciascuno dei due sistemi di generatrici su di essa* (equivalente al *gruppo dei movimenti di uno spazio* $S_3$ *non euclideo*);

*B.* Gruppi proiettivi e conformi ad un tempo, dunque gruppi di similitudini:

6° *Gruppo* $\infty^7$ *di tutte le similitudini;*

7° *Gruppo* $\infty^6$ *dei movimenti* (*euclidei*);

---

[1] Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. II, p. 455; vol. III, pp. 258 e seg. Questa proprietà del gruppo proiettivo $\infty^{10}$ di una $M_3^2$ non degenere di $S_4$ (o di un complesso lineare non speciale di $S_3$) può anche dimostrarsi geometricamente in modo semplice.

*C.* Gruppi conformi non proiettivi:

8° *Gruppo* $\infty^6$ *delle trasformazioni conformi che mutano in sè una sfera (senza scambiarne i due sistemi di generatrici immaginarie)*;

9° *Gruppo* $\infty^{10}$ *di tutte le trasformazioni conformi.*

Questi stessi tipi furono anche trovati dal sig. LIE nella classificazione dei gruppi continui primitivi di trasformazioni *puntuali*, colla sola differenza che il nostro tipo 8° coincide per lui col 5°, al quale esso può infatti ridursi con una trasformazione (2, 1) — ma non con una trasformazione birazionale —.

---

## Relazione sulla Memoria del Dott. BEPPO LEVI intitolata: *Sulla varietà delle corde di una curva algebrica.*

---

Nella congruenza di rette composta delle corde di una curva algebrica esistono delle rette che si appoggiano alla curva in un punto solo, anzi che in due. Sono rette siffatte, e vengon chiamate *corde improprie,* non solo le tangenti, ma anche altre rette uscenti dai punti multipli della curva. Ognuno di questi punti è origine d'infinite corde improprie, formanti dei fasci, alcuni dei quali corrispondono ai singoli rami completi della curva passanti pel punto, altri alle combinazioni di quei rami presi a due a due. Si posson cioè riguardare quelle corde come limiti di rette congiungenti due punti i quali si muovano convenientemente su un ramo o su due rami, avvicinandosi indefinitamente al punto singolare. Si può anche caratterizzare una corda impropria dicendo che: per projezione da un suo punto (se si è nello spazio ordinario; se no, da un suo spazio secante) si ottiene dalla curva data una curva piana, per la quale l'imagine del punto singolare della data produce un abbassamento del genere superiore a quello che si avrebbe con una projezione da un punto generico dello spazio. Oppure anche si può caratterizzare in modo analogo ricorrendo all'abbassamento della classe, od ai contatti tra rami parziali nella curva projezione.

Oggetto della Memoria del sig. Levi è appunto lo studio, sotto questi ed altri aspetti, delle corde improprie. Esso vien fatto con molta diligenza, servendosi tanto di strumenti analitici quanto dei sintetici; e profittando della larga conoscenza che l'Autore possiede della teoria delle singolarità superiori delle curve algebriche. La ricerca, anzi che limitarsi alle curve dello spazio ordinario, si svolge sempre in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, e raggiunge così la massima generalità. Non possiamo astenerci dall'accennare al dubbio che essa, qua e là, sia un po' più lunga del necessario; ed anche alla nostra impressione di una qualche deficienza in chiarezza e facilità di esposizione. Ma ciò nondimeno il lavoro, per la novità ed importanza dei suoi risultati, ci sembra pienamente degno di esser letto alla Classe, e poi accolto nei volumi accademici. Tali appunto sono le nostre proposte.

E. D'Ovidio.
C. Segre, *relatore*.

---

## Relazione intorno alla Memoria del Dott. Ermanno Giglio-Tos intitolata: *I trombociti degli Ittiopsidi e dei Sauropsidi.*

---

Il lavoro sopradetto, affidato al nostro esame, tratta delle questioni tuttora molto discusse che riguardano i trombociti e in particolar modo della struttura, della derivazione e dell'evoluzione di questi elementi morfologici del sangue nei Vertebrati Ittiopsidi e Sauropsidi.

L'A. dimostra, valendosi di un nuovo metodo di colorazione, che è sempre possibile distinguere in ogni stadio del loro sviluppo i trombociti dagli eritroblasti (elementi morfologici del sangue da molti confusi insieme per la rassomiglianza della loro forma), non solamente pei caratteri e per le proprietà del nucleo, ma anche per la struttura diversa del protoplasma del corpo cellulare.

L'A. dimostra pure: 1° che non si trovano mai forme di passaggio dei trombociti in eritroblasti ed in leucociti;

2° che i trombociti non contengono mai emoglobina e che hanno proprietà fisiologiche, fra le quali il fagocitismo, diverse da quelle degli eritroblasti;

3° che i trombociti sono da considerarsi come uno speciale elemento morfologico del sangue.

Da queste ricerche risulta che i *Vertebrati Cranioti* si possono dividere, secondo la struttura dei sopradetti elementi del sangue, in tre gruppi:

1° *Ciclostomi* nei quali essi sono rappresentati da leucociti in una fase del loro sviluppo.

2° *Ittiopsidi* e *Sauropsidi* in cui vi sono elementi fra loro equipollenti: i trombociti.

3° *Mammiferi* che presentano le piastrine.

I vostri commissarii propongono la lettura del lavoro del dott. E. Giglio-Tos alla Classe, e qualora questa lo approvi, la stampa nei volumi accademici.

G. Bizzozero.
L. Camerano, *relatore*.

---

*L'Accademico Segretario*
Andrea Naccari.

# CLASSE

DI

# SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

## Adunanza del 6 Marzo 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Socii: CLARETTA, Direttore della Classe, PEYRON, COGNETTI DE MARTIIS, BRUSA, PERRERO, e NANI Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della precedente seduta, in data 20 febbraio 1898.

Il Presidente dà lettura dell'indirizzo inviato a S. M. il RE dall'Ufficio di Presidenza dell'Accademia nella ricorrenza del 50° anniversario della promulgazione dello Statuto.

L'indirizzo è del seguente tenore:

SIRE,

Nel giorno in cui l'Italia unita commemora il cinquantesimo anniversario della proclamazione fatta dal Magnanimo Vostro Avo di quelle Libertà Costituzionali, che, mantenute con fede incrollabile dall'Eroico Padre Vostro, valsero a raccogliere in questa città di Torino i patrioti di tutte le regioni d'Italia e

furono base ai Plebisciti ed avviamento alla grande opera della Unità Nazionale,

La Reale Accademia delle Scienze, nata e cresciuta sotto gli auspicii dell'Augusta Vostra Casa,

Rinnova alla Maestà Vostra, erede delle virtù e delle tradizioni degli Avi Suoi, all'Augusta Vostra Consorte ed alla Reale Famiglia l'omaggio della sua inalterabile devozione.

Maestà,

In quest' occasione solenne, in cui il pensiero e il cuore degli Italiani corrono ai primordii del nostro Risorgimento, anche questa Accademia rammemora con orgoglio che il suo Socio e poi Presidente perpetuo conte Federigo Sclopis vergò quel memorabile Proclama, con cui Carlo Alberto con affetto di Padre e con lealtà di Re, fidando nelle forti istituzioni rappresentative e nei vincoli di indissolubile affetto fra Sovrano e Popolo, vaticinò l'avvenire della Nazione Italiana.

Quindi il Presidente annunzia il decesso, avvenuto in Lovanio, addì 23 febbraio u. scorso, del Socio corrispondente professore Pietro Willems, accennando alle alte sue benemerenze scientifiche.

Il Socio Segretario dà comunicazione di una lettera ministeriale con cui si annunzia che, con Decreto Reale del 20 gennaio 1898, è stata approvata la rielezione a Presidente dell'Accademia, per un secondo triennio, del Socio Giuseppe Carle.

Il Socio Segretario presenta un opuscolo del Socio corrispondente marchese de Nadaillac, intitolato: *Le royaume de Bénin.*

Quindi il Socio Claretta dà lettura della prima parte di una sua memoria che porta per titolo: *Sulle principali vicende della Cisterna d'Asti dal secolo XV al XVIII.*

Valendosi dei documenti dell'Archivio di Stato, nonchè delle varie pubblicazioni concernenti quel feudo, ma sovratutto

di un prezioso processo manoscritto del secolo XVII, esistente presso di lui, e che contiene diplomi, bolle e dispute forensi relative a quel feudo, egli comincia a stabilire cronologicamente il numero di quei feudatari. Ed in tal guisa gli è dato di rettificare varie imperfezioni sfuggite al benemerito prof. Casalis nel noto suo *Dizionario storico dei Regii Stati*.

---

*L'Accademico Segretario*
CESARE NANI.

Torino — VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

# CLASSE

DI

# SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

## Adunanza del 13 Marzo 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Cossa, Vice-Presidente dell'Accademia, Bizzozero, Direttore della Classe, D'Ovidio, Spezia, Camerano, Segre, Peano, Volterra, Jadanza, Foà, Guidi, Fileti e Naccari, Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente legge l'indirizzo che l'Ufficio di Presidenza inviò a Sua Maestà il Re nell'occasione del cinquantesimo anniversario della promulgazione dello Statuto (*) e la risposta avuta dall'aiutante del Re generale Ponzio-Vaglia.

Il Segretario comunica le lettere di ringraziamento inviate dai Signori Damour, Goebel, Groth, Penzig e Roux per la loro

(*) L'indirizzo è inserito nell'atto verbale della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche della seduta del 6 marzo 1898.

nomina a Soci corrispondenti e presenta parecchie pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia dal Prof. Penzig.

Vengono poi accolte per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° *Analisi della teoria dei vettori* del Socio Peano.

2° *Un nuovo focometro* del Socio Jadanza.

# LETTURE

## *Analisi della teoria dei vettori;*

Nota del Socio GIUSEPPE PEANO.

Per esporre la teoria dei vettori, e il calcolo geometrico, si sogliono presupporre cognizioni di Geometria più o meno vaste.

Mi propongo in questo lavoro di esaminare quali idee si incontrano nella teoria di vettori, e di classificarle in primitive, che si ottengono dall'osservazione dello spazio fisico, e in derivate di cui si dà la definizione; e di esaminare quali sono le proposizioni che si devono assumere come primitive, e quali se ne deducono in conseguenza, con puri processi logici, senza oltre ricorrere all'intuizione.

Così la teoria dei vettori risulta sviluppata senza presupporre alcuno studio geometrico precedente. E poichè con questa teoria si può trattare l'intera Geometria, ne deriva la possibilità teorica di sostituire alla Geometria elementare stessa, la teoria dei vettori.

In studii di questo genere è strumento pressochè indispensabile la logica matematica. Farò quindi uso dei segni logici $\epsilon$, $\supset$, $\cap$, $=$, $\sim$, $\exists$, $\bar{\iota}$, nel preciso significato che hanno nel *Formulaire de Mathématiques,* t. II, § 1, indicato con $F_2$ § 1 (*).

### Idee primitive.

Assumeremo due idee primitive. L'una è quella di " punto ", termine che abbreviamo in " pnt ".

La seconda idea primitiva è la relazione fra quattro punti $a, b, c, d$, che indichiamo colla scrittura

$$a - b = c - d,$$

e che si può interpretare, col linguaggio comune, come segue:

(*) Il segno di negazione $\sim$ ha la forma invalsa nelle pubblicazioni dell'Accademia.

" I segmenti *ab* e *cd* hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso „;
ovvero " La figura *abdc* è un parallelogrammo „,
ovvero " Con un moto di traslazione, si può portare *ab* a coincidere con *cd* „.

Assumendo come primitiva la relazione indicata, non ci tocca analizzare le espressioni corrispondenti del linguaggio ordinario; ma ci basta assumere, quali proposizioni primitive, quelle proprietà della relazione considerata, da cui dipendono tutte le altre.

Ammettiamo come proposizioni primitive, e le indichiamo con Pp, le seguenti:

$$a, b, c, d, e, f \varepsilon \text{pnt} . \supset .$$

1. $a - b = a - b$ Pp

2. $a - b = c - d . \supset . c - d = a - b$ Pp

3. $a - b = c - d . c - d = e - f . \supset . a - b = e - f.$ Pp

che esprimono le proprietà riflessiva, simmetrica, e transitiva del segno $=$.

Queste tre Pp hanno la forma di proposizioni di Logica ($F_2$ § 1 P81, 82, 83); ma esse esprimono fatti geometrici; ed è solo perchè esse sono verificate, che ci conviene indicare la relazione considerata fra i quattro punti sotto forma di eguaglianza.

Per riconoscere la verità delle Pp basta la semplice osservazione dello spazio fisico; questa è una condizione necessaria per le Pp, affinchè il nostro studio possa essere immediatamente utile.

Per riconoscere invece che esse sono indimostrabili, e indipendenti fra loro, si attribuisce alle idee primitive un'interpretazione differente in guisa che essendo verificate alcune di esse, non lo siano le altre.

Se, conservando a " pnt „ il suo significato, colla relazione $a - b = c - d$ intendo " i quattro punti giacciono in uno stesso piano „, sono soddisfatte le condizioni 1 e 2, e non la 3; la P3 esprime pertanto una proprietà della relazione considerata, che non è conseguenza delle 1 e 2.

Se con $a - b = c - d$ intendo " la distanza da $a$ a $b$ è maggiore, o eguale a quella da $b$ ad $a$ ", saranno verificate le P1 e 3, e non la 2.

Se con $a - b = c - d$ intendo " i quattro punti $a, b, c, d$ coincidono ", saranno soddisfatte le condizioni 2 e 3, e non la 1.

Le P1, 2, 3 sono tutte verificate, quando con $a - b = c - d$ s'intenda una relazione avente la forma, o riduttibile alla forma: " una funzione di $a$ e di $b$ è eguale alla stessa funzione di $c$ e di $d$ ".

Per distinguere la relazione considerata da tutte queste eguaglianze ci occorre un'altra Pp, che assumeremo sotto la forma:

4. $$a - b = c - d \,.\, \supset . \, a - c = b - d \qquad \text{Pp}$$

e che a causa della sua identità formale con una proposizione d'aritmetica si enuncia: " in una equidifferenza geometrica si possono alternare i medii ".

Che la P4 non sia conseguenza delle precedenti risulta dal fatto, che se con $a - b = c - d$ intendiamo " la distanza da $a$ a $b$ è eguale alla distanza da $c$ a $d$ ", " la retta $ab$ è parallela alla $cd$ ", ecc. Sono verificate le 1, 2, 3 e non la 4.

Dalle P2, 3, 4 si deduce:

5. $$\begin{aligned} a - b = c - d \,.\, &= . \, a - c = b - d \\ &.= . \, b - a = d - c \\ &.= . \, b - d = a - c \\ &.= . \, c - a = d - b \\ &.= . \, c - d = a - b \\ &.= . \, d - b = c - a \\ &.= . \, d - c = b - a \end{aligned}$$

cioè ogni equidifferenza geometrica si può mettere sotto 8 forme equivalenti. Per dimostrare ad es. la 2ª proposizione, da

$$a - b = c - d$$

alternando (P4) si ha:

$$a - c = b - d,$$

invertendo i membri (P2):

$$b - d = a - c$$

alternando (P4)

$$b - a = d - c;$$

e da questa con processo inverso si deduce la equidifferenza proposta.

Dalla P1, alternando (P4), si ha:

6. $$a - a = b - b,$$

cioè l'espressione $a - a$ non si altera, sostituendo al posto del punto $a$ un altro punto qualunque $b$. Il valore costante di $a - a$ si indicherà, come in algebra, col segno 0; che si può definire come segue:

7. $$0 = \overline{\iota}\, \overline{x \epsilon} \, (a \epsilon \mathrm{pnt} . \supset_a . x = a - a) \qquad \text{def.}$$

" 0 è il valore comune dei valori $x$ che può assumere l'espressione $a - a$, ove al posto di $a$ si metta un punto qualunque ".

La coincidenza di posizione di due punti $a$ e $b$, che si indica con $a = b$, si può collegare alle notazioni precedenti mediante la formola:

8. $$a = b . = . a - b = 0 \qquad \text{def.}$$

Ne risulta

9. $$a - c = b - c . \supset . a = b.$$

Invero, dall'Hp. alternando (P4) si ha $a - b = c - c$, che è $= 0$ per la P7; onde $a - b = 0$, e per la P8, si ha la tesi.

## Vettori.

La differenza $b - a$ di due punti dicesi " vettore ", abbreviato in " vtt ".

10. $$\mathrm{vtt} = \overline{x \epsilon} \, [\exists \overline{(a, b) \epsilon} \, (a, b \epsilon \mathrm{pnt} . x = b - a)]. \qquad \text{def.}$$

La definizione della somma d'un punto e d'un vettore si esprime in simboli come segue:

11. $a \,\varepsilon\, \mathrm{pnt} \,.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{vtt} \,.\supset .\, a + u = \bar{\iota}\, \mathrm{pnt}\, \overline{b\,\varepsilon}\, (b - a = u).$ def.

" Per somma del punto $a$ e del vettore $u$ si intende quel punto $b$ tale che $b - a = u$ „.

Di punti siffatti non ne può esistere che uno solo; poichè se $b - a = u$, e $c - a = u$, sarà $b - a = c - a$, onde (P9), $b = c$.

Che ne esista uno, è cosa evidente dall'intuizione geometrica. Ma questa esistenza non è conseguenza delle proposizioni scritte, poichè se per " pnt „ intendiamo i punti interni ad una sfera, saranno verificate le P1-4; ma non sempre, dati i punti interni alla sfera, $a$, $b$, $c$, il punto $d$ che soddisfa alla condizione $a - b = c - d$, sarà pure interno alla sfera. Ci occorre quindi esprimere quest'esistenza mediante la proposizione primitiva:

12. $a \,\varepsilon\, \mathrm{pnt} \,.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{vtt} \,.\supset .\, \exists\, \mathrm{pnt}\, \overline{b\,\varepsilon}\, (b - a = u).$ Pp

In conseguenza sono soddisfatte le condizioni per l'applicabilità della definizione P430 di $F_2$ §1, e si deduce:

13. $a \,\varepsilon\, \mathrm{pnt} \,.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{vtt} \,.\supset .\, a + u \,\varepsilon\, \mathrm{pnt}.$

" Ad un punto aggiungendo un vettore, si ha per risultato un punto „.

14. $a \,\varepsilon\, \mathrm{pnt} \,.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{vtt} \,.\supset .\, (a + u) - a = u.$

15. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{pnt} \,.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{vtt} \,.\supset :\, b - a = u \,.=.\, b = a + u.$

La seguente convenzione, identica in forma ad una algebrica, sopprime delle parentesi:

16. $a \,\varepsilon\, \mathrm{pnt} \,.\, u, v \,\varepsilon\, \mathrm{vtt} \,.\supset .\, a + u + v = (a + u) + v.$ def.

Fra le tante identità analoghe alle algebriche che si possono ottenere, sono per noi subito utili le seguenti:

17. $a \,\varepsilon\, \mathrm{pnt} \,.\, u, v \,\varepsilon\, \mathrm{vtt} \,.\supset .\, a + u + v = a + v + u.$

Infatti dalla P14 si ha

$$(a + v) - a = v,$$

e leggendo $a + u$ al posto di $a$,

$$(a + u + v) - (a + u) = v,$$

onde (P3)

$$(a + u + v) - (a + u) = (a + v) - a$$

alterno (P4)

$$(a + u + v) - (a + v) = (a + u) - a,$$

e per la P14:

$$= u.$$

trasporto il secondo termine (P15), ed ho la tesi.

18. $a, b \,\epsilon\, \text{pnt} \,.\, u \,\epsilon\, \text{vett} \,.\, \text{Ɔ} \,.\, (a + u) - (b + u) = a - b.$

Infatti dalla P14 si ha $u = (a + u) - a = (b + u) - b$; alterno i medii ed ho la tesi.

19. $a, b \,\epsilon\, \text{pnt} \,.\, u, v \,\epsilon\, \text{vtt} \,.\, \text{Ɔ} \,.\, (a + u + v) - a = (b + u + v) - b.$

Infatti dalla P18 si ha

$$(a + u) - (b + u) = a - b \tag{1}$$

e leggendovi $a + u$, $b + u$ e $v$ al posto di $a, b, u$, si ha

$$(a + u + v) - (b + u + v) = (a + u) - (b + u), \tag{2}$$

da (1) (2) si ha:

$$(a + u + v) - (b + u + v) = a - b$$

alterno i medii, ed ho la tesi.

Adunque il vettore $(a + u + v) - a$ non si altera se al posto del punto $a$ si mette un altro punto qualunque $b$. Esso

si chiama la somma dei due vettori $u$ e $v$; e si definisce simbolicamente come segue:

20. $u, v \epsilon \mathrm{vtt} . \supset . u + v = \overline{\iota x \epsilon} [a \epsilon \mathrm{pnt} . \supset_a . x = ((a+u)+v) - a]$ def.

" Per somma dei due vettori $u$ e $v$ si intende il valor costante dell'espressione $a+u+v-a$, qualunque si sia il punto $a$ ". Risulta dalla definizione:

21. $u, v \epsilon \mathrm{vtt} . \supset . u + v \epsilon \mathrm{vtt}.$

22. $u, v \epsilon \mathrm{vtt} . a \epsilon \mathrm{pnt} . \supset . u + v = (a + u + v) - a$

e trasportando un termine

23. $u, v \epsilon \mathrm{vtt} . a \epsilon \mathrm{pnt} . \supset . a + u + v = a + (u + v).$

Il primo membro di questa eguaglianza sta per $(a + u) + v$ (P16); quindi questa somma ha la proprietà associativa.

24. $u, v \epsilon \mathrm{vtt} . \supset . u + v = v + u,$

che esprime la proprietà commutativa della somma di due vettori. Infatti, dalla P17, tenendo conto della 23, essendo $a$ un punto, si ha

$$a + (u + v) = a + (v + u),$$

e sottraendo $a$ (P14), si ha il teorema.

25. $u, v, w \epsilon \mathrm{vtt} . \supset . u + (v + w) = (u + v) + w,$

che esprime la proprietà associativa della somma di vettori. Infatti, sia $a$ un punto; dalla P23, che esprime la proprietà associativa della somma d'un punto con due vettori, si ha:

$$a + [(u + v) + w] = [a + (u + v)] + w = [(a + u) + v] \\ + w = (a + u) + (v + w) = a + [u + (v + w)]$$

e sottraendo $a$ dal primo e dall'ultimo membro di questa serie di eguaglianze si ha la nostra P.

Essendo $u$ un vtt, con $-u$ si intende il vettore $u$ cambiato di verso; si può definire come segue:

26. $a, b \,\epsilon\, \text{pnt} \,.\, \mathfrak{I} \,.\, -(a-b) = b - a.$ def.

Per differenza di due vettori $u - v$ si intende la somma del primo col secondo cambiato di verso:

27. $u, v \,\epsilon\, \text{vtt} \,.\, \mathfrak{I} \,.\, u - v = u + (-v).$ def.

Si ha:

28. $u \,\epsilon\, \text{vtt} \,.\, \mathfrak{I} \,.\, -u \,\epsilon\, \text{vtt}.$

$$u - u = 0$$

$$-(-u) = u.$$

29. $u \,\epsilon\, \text{vtt} \,.\, \mathfrak{I} \,.\, -u = \bar{\iota}\, \text{vtt}\, \overline{x \,\epsilon}\, (u + x = 0).$

“ Essendo $u$ un vettore, $-u$ è quel vettore $x$ tale che $u + x = 0$ „. Questa proposizione si potrebbe assumere per definizione.

## Prodotto d'un vettore per un numero.

Dovendo occuparci di numeri interi, e fratti, positivi e negativi, bisogna supporne nota la teoria ($F_2$ § 2), ed i simboli relativi, che sono:

N = (numero intero positivo)
n = (numero intero)
r = (numero razionale),

e in seguito

Q = (numero reale positivo)
q = (numero reale),

e i segni di operazioni sui numeri $+, -, \times, /$.

Per definire il prodotto d'un intero $a$ per un vettore $u$, basta porre queste eguaglianze:

30. $u \,\epsilon\, \text{vtt} \,.\, \mathfrak{I} \,.\, 0u = 0$ def.

31. $u \,\epsilon\, \text{vtt} \,.\, a \,\epsilon\, \text{n} \,.\, \mathfrak{I} \,.\, (a+1)\, u = au + u.$ def.

Dalla seconda, ove si faccia $a = 0$, e tenendo conto della prima, si ha $1u = u$.

Fatto nella seconda $a = 1$, e tenendo conto del risultato ora ottenuto, si ha $2u = u + u$; e così $3u = u + u + u$, ecc.; cioè se $a$ è un N, $au$ è la somma di $a$ vettori eguali ad $u$. Facendo nella stessa $a = -1$, e tenendo conto della prima, si ha $0 = (-1)u + u$, onde $(-1)u = -u$; $(-2)u = -2u$, ecc. Così ne risulta il significato di $au$, qualunque si sia l'intero $a$, cioè:

32. $u \, \epsilon \, \mathrm{vtt} \, . \, a \, \epsilon \, \mathrm{n} \, . \, \supset . \, au \, \epsilon \, \mathrm{vtt}.$

Colla scrittura $ua$, non ancora definita, ci conviene indicare lo stesso $au$, cioè porremo:

32'. $u \, \epsilon \, \mathrm{vtt} \, . \, a \, \epsilon \, \mathrm{n} \, . \supset . \, ua = au.$ def.

33. $u \, \epsilon \, \mathrm{vtt} \, . \, a, b \, \epsilon \, \mathrm{n} \, . \supset . \, (a + b)\, u = au + bu.$

Questa formula esprime che il prodotto d'un numero per un vettore ha la proprietà distributiva rispetto al fattore numerico. Essa si è assunta, per definizione (P30) per $b = 1$. Suppostala riconosciuta per un certo valore di $b$, si avrà:

$$[a + (b + 1)]\, u = [(a + b) + 1]\, u, \quad \text{dall'Aritmetica}$$
$$= (a + b)\, u + u, \quad \text{per la P31}$$
$$= au + bu + u, \quad \text{per l'ipotesi,}$$
$$= au + (bu + u) \quad \text{per l'associatività della somma, P25,}$$
$$= au + (b + 1)\, u \quad \text{per la def. P31;}$$

cioè essa sarà ancora vera per $b + 1$. Viceversa, se è vera per $b + 1$, risulta dalle formule scritte, che è pure vera per $b$; dunque essa è vera per ogni valore intero, positivo o nullo o negativo, di $b$.

34. $a \, \epsilon \, \mathrm{n} \, . \, u, v \, \epsilon \, \mathrm{vtt} \, . \supset . \, a(u + v) = au + av.$

Questo teorema dice che il prodotto d'un numero per un

vettore ha pure la proprietà distributiva rispetto al fattore vettoriale. Per dimostrarla, si osservi, che per la def. P30, essa è verificata per $a = 0$. Suppostala verificata per un certo valore di $a$, sarà:

$$(a + 1)(u + v) = a(u + v) + (u + v) \quad \text{per la def. P31}$$
$$= au + av + u + v \quad \text{per ipotesi,}$$
$$= au + u + av + v \quad \text{perchè la somma è commutativa (P24)}$$
$$= (a + 1)u + (a + 1)v \quad \text{per la def. P31;}$$

cioè essa sarà pure verificata per $a + 1$; e dalle formule scritte si ha pure che, se essa è verificata per $a + 1$, sarà pure verificata pel numero precedente $a$. Dunque essa è vera qualunque sia l'intero $a$.

Riconosciuta la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma di due termini, lo si estende alla somma di 3, 4 ... termini. Sarà quindi

$$(a_1 + a_2 + \ldots) u = a_1 u + a_2 u + \ldots,$$

e supposte le $a$ tutte eguali, ed in numero di $b$, si avrà (per $b$ positivo)

35. $a, b \,\epsilon\, \mathrm{n} \,.\, u \,\epsilon\, \mathrm{vtt} \,.\, \supset \,.\, (ba)\, u = b\,(au)$

proprietà associativa del prodotto di due numeri e d'un vettore; e che si riconosce dalle cose dette vera qualunque sia il segno di $b$.

Se un vettore è nullo, moltiplicandolo per un numero qualunque si ha per risultato 0.

Viceversa, si ha:

36. $a \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\, u \,\epsilon\, \mathrm{vtt} \,.\, au = 0 \,.\, \supset \,.\, u = 0,$ Pp.

come si riconosce dall'intuizione geometrica. Ma non potendo noi dedurla dalle proposizioni precedenti, con processi di logica pura, ci occorre assumerla come proposizione primitiva.

Che la P36 non sia conseguenza delle precedenti, risulta da ciò che se per " pnt „ intendo i punti d'una circonferenza,

e all' equidifferenza $a - b = c - d$ attribuisco il significato " l'arco $ab$ si può portare a coincidere con $cd$ con un moto rotatorio attorno al centro „ cioè " gli archi $ab$ e $cd$ sono eguali, e dello stesso verso „, sono verificate tutte le Pp finora introdotte, P1, 2, 3, 4, 12. ma non la P36; poichè in questa interpretazione, un vettore rappresenta una rotazione; lo 0 rappresenta l'identità; e una rotazione ripetuta può produrre l'identità.

Ne deriva:

36'. $a \in \mathrm{N} . u, v \in \mathrm{vtt} . au = av . \supset . u = v.$

Invero

$$\mathrm{Hp} . \supset . au - av = 0.$$
$$\text{„} . \mathrm{P34} . \supset . a(u - v) = 0.$$
$$\text{„} . \mathrm{P36} . \supset . \mathrm{Ths}.$$

Dividere un vettore $u$ per il numero intero positivo $a$, o come preferiamo di dire per non introdurre forme nuove di operazione, moltiplicarlo per $/a$, cioè pel reciproco di $a$, significa trovare quel vettore $v$, che moltiplicato per $a$ dà $u$:

37. $u \in \mathrm{vtt} . a \in \mathrm{N} . \supset . u/a = \bar{\iota}\, \mathrm{vtt}\, \overline{v \in}\, (av = u).$ def.

Affinchè questa definizione sia applicabile, bisogna che siano soddisfatte le condizioni sotto cui si può usare il segno $\bar{\iota}$ ($F_2$ § 1 P430); cioè che esistano vettori $v$ che soddisfino alla condizione $av = u$; e che ne esista uno solo. Questa ultima condizione è conseguenza della P36'; poichè se fosse $av = u$ e $av' = u$, sarebbe $av = av'$, onde $v = v'$.

Che ne esista uno, risulta dall'intuizione; ma non è conseguenza logica delle cose dette.

Invero, quanto precede è vero se per " pnt „ intendiamo i numeri interi " n „, e non sempre il rapporto di due interi è un intero.

Lo affermeremo colla seguente proposizione primitiva:

38. $u \in \mathrm{vtt} . a \in \mathrm{N} . \supset . \exists\, \mathrm{vtt}\, \overline{v \in}\, (av = u).$ Pp.

Ne risulta

39. $u \in \mathrm{vtt} . a \in \mathrm{N} . \supset . u/a \in \mathrm{vtt}.$

$$(u/a) \times a = u.$$

Dalle cose dette, essendo $b$ un intero (n), ed $a$ un intero positivo (N); ha significato la scrittura $(u \times b)/a$. Questo vettore dipende dai due numeri $a$ e $b$; ma noi vedremo subito che esso è funzione del solo rapporto $b/a$. Dicesi che un ente, funzione dei numeri $a$ e $b$, è funzione del numero razionale $b/a$, quando sostituendo ad $a$ e a $b$ due numeri $c$ e $d$, tali che $d/c = b/a$, il valore di quell'ente non varia. Cioè si ha:

40. $a, c \varepsilon \mathrm{N} . b, d \varepsilon \mathrm{n} . b/a = d/c . u \varepsilon \mathrm{vtt} . \supset . (ub)/a = (ud)/c.$

Infatti la Ths, a causa della P36′, è conseguenza di

$$[(ub)/a](ac) = [(ud)/c](ac).$$

Questa, per la P35, equivale a

$$\{[(ub)/a]a\}c = \{[(ud)/c]c\}a,$$

che, per la P39, vale

$$(ub)c = (ud)a,$$

e per la P35

$$u(bc) = u(da),$$

che è vera, poichè, per le Hyp fatte

$$bc = da.$$

Il rapporto $b/a$, ove $b \varepsilon \mathrm{n}$, ed $a \varepsilon \mathrm{N}$, rappresenta ogni numero razionale r. Quindi porremo:

41. $u \varepsilon \mathrm{vtt} . x \varepsilon \mathrm{r} . \supset .$

$$xu = \bar{\iota}\, v \varepsilon [a \varepsilon \mathrm{N} . b \varepsilon \mathrm{n} . b/a = x . \supset_{a,b} . v = ub/a].$$

" Essendo $u$ un vettore, ed $x$ un numero razionale, positivo o nullo o negativo, per $xu$ si intende il valore che ha sempre l'espressione $ub/a$, ove $a$ è un intero positivo e $b$ un intero qualunque tali che il loro rapporto $b/a$ eguagli il razionale $x$ ".

Il prodotto d'un razionale per un vettore ha la proprietà distributiva rispetto ad ambi i fattori:

42. $x \in \mathrm{r} \,.\, u, v \in \mathrm{vtt} \,.\, \supset .\, x(u+v) = xu + xv$

43. $x, y \in \mathrm{r} \,.\, u \in \mathrm{vtt} \,.\, \supset .\, (x+y)\, u = xu + yu$,

e il prodotto di due fattori razionali per un vettore ha la proprietà associativa:

44. $x, y \in \mathrm{r} \,.\, u \in \mathrm{vtt} \,.\, \supset .\, x(yu) = (xy)u$,

la cui dimostrazione è conseguenza delle proprietà P33, 34, 35. Si ha pure che il prodotto d'un numero per un vettore è nullo solo quando si annulla un fattore:

45. $x \in \mathrm{r} \,.\, u \in \mathrm{vtt} \,.\, xu = 0 \,.\, \supset .\, x = 0 \,.\, \cup .\, u = 0$.

La definizione del prodotto d'un numero irrazionale per un vettore, in questo istante presenta gravi difficoltà. Lo definiremo simbolicamente solo dopo introdotte le idee di distanza e di limite.

## Somme di punti.

Dicesi somma di punti, o forma geometrica di prima specie, abbreviato in $F_1$, un insieme di punti $a_1, a_2, \ldots a_m$, con altrettanti numeri (razionali) $x_1\, x_2 \ldots x_m$ e si rappresenta con $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_m a_m$.

In miei lavori precedenti si è fatto dipendere la definizione dell'eguaglianza di due forme dal concetto di tetraedro (*), concetto certo elementare, ma non ancora ridotto ad idee intuitive. Potremo far dipendere questa eguaglianza dalla teoria dei vettori, i quali ne sono caso particolare, nel modo seguente:

" Due forme di 1ª specie, $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_m a_m$ e $y_1 b_1 + y_2 b_2 + \ldots + y_n b_n$ diconsi eguali, se, comunque si scelga il punto $o$, si ha che la somma dei vettori che vanno da $o$ ai punti della prima forma, moltiplicati questi vettori pei rispettivi coefficienti. è eguale alla corrispondente somma pella seconda forma:

---

(*) *Calcolo geometrico*, a. 1888. Lo stesso procedimento è seguito nelle *Leçons de Cinématique* del Koenigs, a. 1897, p. 423-8.

46. $m, n \epsilon N . x_1, \ldots x_m \epsilon r . a_1, \ldots a_m \epsilon pnt . y_1, \ldots y_n \epsilon r .$
$b_1, \ldots b_n \epsilon pnt . \supset \therefore x_1 a_1 + \ldots + x_m a_m = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n . =:$
$o \epsilon pnt . \supset_o . x_1(a_1 - o) + \ldots + x_m(a_m - o) = y_1(b_1 - o)$
$+ \ldots + y_n(b_n - o).$ def.

Dicesi massa d'una somma di punti la somma dei coefficienti dei punti, e si indica col segno d'operazione ω:

47. $m \epsilon N . x_1, \ldots x_m \epsilon r . a_1, \ldots a_m \epsilon pnt . \supset .$
$\omega (x_1 a_1 + \ldots + x_m a_m) = x_1 + \ldots + x_m.$ def.

Se da una somma di punti $s$ si sottrae un punto arbitrario $o$ con coefficiente la massa del sistema, si ottiene un vettore:

48. $s \epsilon F_1 . o \epsilon pnt . \supset . s - (\omega s) o \epsilon vtt.$

Infatti sia $s = x_1 a_1 + \ldots + x_m a_m$, ove queste lettere hanno il significato noto. Sarà $s - (\omega s) o = x_1 a_1 + \ldots + x_m a_m - (x_1 + \ldots + x_m) o = x_1(a_1 - o) + \ldots + x_m(a_m - o)$; ora la somma di più vettori $a_1 - o, \ldots, a_m - o$, moltiplicati per $x_1 \ldots x_m$, dà un vettore.

In conseguenza, se la massa di $s$ è nulla, $s$ si riduce ad un vettore:

49. $s \epsilon F_1 . \omega s = 0 . \supset . s \epsilon vtt.$

Se invece la massa non è nulla, posto

$$g = o + [s - (\omega s) o]/(\omega s)$$

sarà $g$ un punto, ed $s = (\omega s) g$:

50. $s \epsilon F_1 . \omega s \sim = 0 . \supset . \exists pnt \overline{g \epsilon [s = (\omega s) g]};$

cioè, data una somma di punti, con massa non nulla, essa si può ridurre ad un punto unico $g$ con massa la somma delle masse del sistema. Questo punto dicesi BARICENTRO dei punti dati, colle rispettive masse; e si può indicare con $g = s/\omega s$.

## Prodotto interno di due vettori.

Nelle pagine precedenti siamo partiti da due idee primitive; l'una è quella di " pnt ", e l'altra è la relazione fra quattro punti espressa in forma di equidifferenza. Queste due idee si sono determinate mediante 7 Pp, che sono le 1, 2, 3, 4, 12, 36 e 38.

Si è definito successivamente lo 0 (P7), il " vettore " (P10), la somma d'un punto e d'un vettore (P11), la somma di due vettori (P20), e la loro differenza (P27), il prodotto d'un vettore per un numero razionale (P30, 31, 37, 41); e infine la somma di più punti con coefficienti interi, o razionali (P46).

Queste somme hanno le proprietà delle somme algebriche; e il calcolo geometrico che ne risulta è formalmente identico al calcolo algebrico. Questa coincidenza è prodotta dal fatto che si è indicata sotto forma di equidifferenza la relazione fondamentale fra i quattro punti, e con opportune definizioni si sono estese alla geometria delle identità algebriche. Si avrebbe avuto un calcolo geometrico ancora identico all'algebrico, se la relazione fra i quattro punti si fosse scritta sotto forma di proporzione $a/b = c/d$; in tal caso i segni

$$0\ (P7),\ a + u\ (P11),\ u + v\ (P20),\ - u\ (P26),\ ua\ (P30, \ldots 41),$$
$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n\ (P46)$$

dovrebbero essere rispettivamente sostituiti con

$$1,\ a \times u,\ u \times v,\ /u,\ u^a,\ a_1^{x_1} a_2^{x_2} \ldots a_n^{x_n}.$$

Se invece di indicare il vettore di estremi $a$ e $b$ con $b - a$, come fece H. Grassmann, e qualche volta anche Hamilton, lo si indica con $ab$, si avrà un calcolo geometrico di forma diversa dall'algebrico. Ad es. la formula $(a - b) + (b - c) = a - c$ si presenterebbe sotto la forma $ab + bc = ac$.

Colle operazioni finora introdotte si possono esprimere relazioni e funzioni di punti. È facile il vedere che ogni funzione siffatta non si altera passando dalla figura considerata ad una sua affine. In conseguenza colle operazioni precedenti non po-

tremo parlare della distanza di due punti, del valore degli angoli, e in generale di nessuna delle proprietà metriche delle figure. Per parlare di queste proprietà è necessario introdurre una nuova idea primitiva. In Geometria elementare l'idea primitiva introdotta è quella di moto, da cui si deduce l' eguaglianza dei segmenti, degli angoli, e le operazioni somma e differenza, seni, coseni, ecc. Mediante questi concetti si suol definire nel calcolo geometrico, il prodotto interno di due vettori $u$ e $v$, che indicheremo con $u|v$, seguendo Grassmann, e che si legge " $u$ indice $v$ ", come " il prodotto delle loro lunghezze pel coseno dell'angolo compreso ".

Non volendosi parlare di coseni, si può definire come segue:

" Il prodotto di due vettori paralleli e dello stesso senso vale il prodotto delle loro lunghezze. Il prodotto di due vettori di senso contrario vale il prodotto delle loro lunghezze preso col segno —. Il prodotto di due vettori non paralleli vale il prodotto del primo per la proiezione ortogonale del secondo sulla direzione del primo ".

Volendo esprimere questa definizione coi simboli ideografici, ci occorre analizzare i termini " lunghezza d'un vettore, o distanza di due punti ", " proiezione d'un vettore " ecc.; il che importerebbe a ricostrurre la Geometria. Tanto fa assumere l'espressione $u|v$ come idea primitiva, determinandola mediante le sue proprietà fondamentali, e deducendone la Geometria metrica.

Noi ammetteremo pertanto che:

51. $u, v \in \mathrm{vtt} \,.\, \supset .\, u|v \in \mathrm{q}$ . Pp.

52. " $\supset .\, u|v = v|u$ Pp.

53. $u, v, w \in \mathrm{vtt} \,.\, \supset .\, (u + v)|w = u|w + v|w$ Pp.

54. $u \in \mathrm{vtt} \,.\, u \sim = 0 \,.\, \supset .\, u|u \in \mathrm{Q}$. Pp.

" Il prodotto interno di due vettori è un numero reale; esso ha la proprietà commutativa, e la distributiva rispetto alla somma. Il prodotto d'un vettore non nullo per sè stesso è un numero positivo ".

Dalla proprietà distributiva, espressa dalla P53, si deduce:

Si ponga $v = 0$. Si avrà $u|w = u|w + 0|w$, onde $0|w = 0$, e scambiando lettere:

(1). $$0 | u = 0.$$

Applicando più volte la P53, e detti $u_1 \ldots u_n$ dei vettori, si ha

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)\, v = u_1\, v + u_2\, v + \ldots + u_n\, v,$$

e supposti tutti gli $u$ eguali:

(2). $$n \epsilon \mathrm{N} \,.\, \supset .\, (nu)|v = n\,(u|v).$$

Nella P53 pongo $-u$ al posto di $v$, si ha

$$0|w = u|w + (-u)|w,$$

e tenendo conto della (1), e cambiando lettere:

(3). $$(-u)|v = -(u|v).$$

(4). $$n \epsilon \mathrm{N} \,.\, \supset .\, (-nu)|v = -n(u|v).$$

Invero il primo membro di questa eguaglianza, per la (3), vale $-[(nu)|v]$, e questo, per la (2), vale il 2° membro. Le (1) (2) (3) (4) si compendiano in

(5). $$a \epsilon \mathrm{n} \,.\, \supset .\, (au)|v = a\,(u|v).$$

Nella (2) al posto di $u$ leggasi $\frac{1}{n} u$. Si avrà $u|v = n\left(\frac{u}{n}|v\right)$, onde

(6). $$n \epsilon \mathrm{N} \,.\, \supset .\, \left(\frac{1}{n}\, u\right)|v = \frac{1}{n}\,(u|v).$$

Nella P(5), al posto di $u$ leggo $\frac{1}{n}\, u$, e trasformo l' ultimo membro colla formula ora scritta:

(7). $$n \epsilon \mathrm{N} \,.\, a \epsilon \mathrm{n} \,.\, \supset .\, \left(\frac{a}{n}\, u\right)|v = \frac{a}{n}\,(u|v).$$

Ma $\frac{a}{n}$, ove $n$ è un intero positivo, ed $a$ un intero qualunque, rappresenta ogni numero razionale. Onde si ha infine il teorema che comprende tutte le formule ora scritte:

55. $u, v \in \text{vtt} . x \in \text{r} . \supset . (xu)|v = x(u|v)$

che esprime la proprietà associativa del prodotto d'un fattore razionale e di due fattori vettoriali.

Sussistendo le proprietà commutativa ed associativa (P52 e 53), sussistono pure tutte le formule algebriche di secondo grado, le quali siano interpretabili fra vettori.

56. $u \in \text{vtt} . \supset . u^2 = u|u$ def.

cioè diremo quadrato d'un vettore il prodotto interno del vettore per sè stesso. Grassmann sottolineava l'esponente 2; ma si può adottare la scrittura più semplice senza ambiguità. Dalla P54 si ha che $u^2$ è una quantità positiva, o nulla se è nullo $u$. Porremo per definizione:

57. $u \in \text{vtt} . \supset . \text{mod}\, u = \sqrt{(u^2)}$. def.

Il segno " modulo di $u$ „ corrisponde alle frasi " lunghezza o grandezza del vettore $u$ „, " distanza degli estremi del vettore $u$, questa distanza essendo misurata con una fissata unità di misura „.

Si ricava

58. $u \in \text{vtt} . \supset . \text{mod}\, u = 0 . = . u = 0$.

59. „ $\text{mod}\,(-u) = \text{mod}\, u$

60. $u \in \text{vtt} . x \in \text{r} . \supset . \text{mod}\,(xu) = \text{mod}\, x \,\text{mod}\, u$.

Infatti, per dimostrare quest'ultima, si ha

$$\text{mod}\,(xu) = \sqrt{[(xu)^2]} = \sqrt{(x^2u^2)} = \sqrt{x^2}\sqrt{u^2} = \text{mod}\, x \,\text{mod}\, u.$$

61. $u, v \in \text{vtt} . \supset . \text{mod}\,(u|v) \leq \text{mod}\, u \,\text{mod}\, v$.

Questa formula, differente delle formule algebriche, esige dimostrazione speciale.

Essendo $x$ un r, per la P54 si ha:

$$(xu + v)^2 \geq 0.$$

Sviluppando si ha:

$$x^2 u^2 + 2x\, u|v + v^2 \geq 0$$

$$\left(x \operatorname{mod} u + \frac{u|v}{\operatorname{mod} u}\right)^2 + v^2 - \left(\frac{u|v}{\operatorname{mod} u}\right)^2 \geq 0.$$

Ora il primo termine si può rendere tanto piccolo quanto si vuole prendendo convenientemente il razionale $x$; è quindi necessario, perchè sia soddisfatta questa diseguaglianza, che sia

$$v^2 - \left(\frac{u|v}{\operatorname{mod} u}\right)^2 \geq 0,$$

cioè

$$(\operatorname{mod} u)^2 (\operatorname{mod} v)^2 \geq (u|v)^2,$$

che equivale alla proposizione a dimostrarsi. In questa dimostrazione si è supposto implicitamente che il fattore mod $u$, per cui si è diviso, fosse diverso da zero. Se mod $u = 0$, la proposizione è evidentemente vera.

62. $u, v \,\epsilon\, \text{vtt} \,.\, \supset .\, \operatorname{mod}(u + v) \leq \operatorname{mod} u + \operatorname{mod} v.$

“ Il modulo d'una somma di vettori non supera la somma dei moduli „. Essa equivale alla proposizione di Geometria:

“ In un triangolo un lato è minore della somma degli altri due „,

proposizione dimostrata in Euclide, e assunta come postulato da Legendre. Noi la possiamo derivare dalle nostre premesse. Invero si ha:

$$(u + v)^2 = u^2 + 2u|v + v^2$$

ed essendo

$$u|v \leq \operatorname{mod}(u|v) \leq \operatorname{mod} u \operatorname{mod} v.$$

si avrà:

$$[\mathrm{mod}\,(u+v)]^2 \leq (\mathrm{mod}\,u)^2 + 2\,\mathrm{mod}\,u\,\mathrm{mod}\,v + (\mathrm{mod}\,v)^2,$$

ed estraendo le radici quadrate si ha la formula P62.

Per definire il prodotto d'un numero irrazionale per un vettore, ricorreremo alla teoria dei limiti. Tutto quanto è detto nelle mie " Lezioni di analisi infinitesimale „, a. 1893, § 279-288, sui limiti dei numeri complessi d'ordine qualunque, sussiste inalterato parlando di punti invece che di numeri complessi; anzi in vista di questa applicazione se ne è fabbricata la nomenclatura. Ma qui bastano le definizioni.

Supporremo noti i simboli di logica K', ed f; e i segni di analisi D (classe derivata), e " lim „ davanti ad una funzione numerica.

63. $u \,\epsilon\, \mathrm{K'}\,\mathrm{q} \,.\, x_0 \,\epsilon\, \mathrm{D}\,u \,.\, f \,\epsilon\, \mathrm{vtt}\,\mathrm{f}\,u \,.\, a \,\epsilon\, \mathrm{vtt} \,.\, \supset :$

$a = \lim_{x,u,x_0} fx \,.=.\, \lim_{x,u,x_0} \mathrm{mod}\,(fx - a) = 0.$ def.

64. $u \,\epsilon\, \mathrm{K'}\,\mathrm{q} \,.\, x_0 \,\epsilon\, \mathrm{D}\,u \,.\, f \,\epsilon\, \mathrm{pnt}\,\mathrm{f}u \,.\, \supset :$ idem. def.

" Sia $u$ un gruppo di numeri reali, $x_0$ un numero della classe derivata di $u$, cioè a cui i numeri del sistema $u$ si possono avvicinare indefinitamente; $f$ sia il segno d'un vettore funzione definita nella classe $u$; e sia $a$ un vettore determinato. Allora dicesi che $a$ è il limite del vettore $fx$, ove $x$, variando nel gruppo $u$, tende ad $x_0$, quando il limite del modulo di $fx - a$ è lo zero. Lo stesso dicesi pure se $fx$ è un punto funzione di $x$, ed $a$ un punto fisso „.

Per prodotto d'un numero irrazionale $x_0$ per un vettore $u$ intendiamo il limite del prodotto d'un numero razionale $x$ per $u$, ove $x$ tenda ad $x_0$:

65. $x_0 \,\epsilon\, \mathrm{q} \sim \mathrm{r} \,.\, u \,\epsilon\, \mathrm{vtt} \,.\, \supset .\, x_0\, u = \lim_{x,\mathrm{r},x_0} (xu).$ def.

Bisogna ammettere che questo limite esista:

66. $x_0 \,\epsilon\, \mathrm{q} \sim \mathrm{r} \,.\, u \,\epsilon\, \mathrm{vtt} \,.\, \supset .\, x_0\, u \,\epsilon\, \mathrm{vtt}$ Pp.

il che non è conseguenza delle Pp precedenti; poichè esse sus-

sistono tutte se al posto di “ pnt „ leggiamo “ r „, attribuendo ai segni d'operazione il significato che hanno in aritmetica; e non è verificata quest'ultima.

Sussistono in conseguenza tutte le identità coincidenti formalmente con identità algebriche, e che sono interpretabili colle convenzioni geometriche finora fatte.

Essendo $i$ un vettore non nullo, q$i$ significa “ vettore parallelo ad $i$ „. Fra essi è compreso il vettore 0; poichè basta moltiplicare $i$ per 0.

Ma esistono vettori non paralleli ad $i$:

67. $i \,\epsilon\, \mathrm{vtt} \sim \iota 0 \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{vtt} \sim (\mathrm{q}\, i).$ Pp.

Sia $j$ un vtt non parallelo ad $i$; q$i$ + q$j$ rappresenta il sistema dei vettori della forma $xi + yj$, ove $x$ ed $y$ sono dei q. Quindi

$$\mathrm{q}i + \mathrm{q}j = \text{“ vettore complanare con } i \text{ ed } j \text{ „.}$$

Ma questi non formano ancora l'insieme dei vettori; cioè

68. $i \,\epsilon\, \mathrm{vtt} \sim \iota 0 \,.\, j \,\epsilon\, \mathrm{vtt} \sim (\mathrm{q}i) \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{vtt} \sim (\mathrm{q}i + \mathrm{q}j).$ Pp.

“ Dato un vettore $i$ non nullo, ed un vettore $j$ non parallelo ad $i$, esistono vettori non complanari con $i$ ed $j$ „. Detto $k$ un vettore siffatto, q$i$ + q$j$ + q$k$ rappresenta tutti i vettori della forma $xi + yj + zk$, qualunque siano i numeri reali $x, y, z$. Ora tutti i vettori sono di tale forma, cioè:

69. $i \,\epsilon\, \mathrm{vtt} \sim \iota 0 \,.\, j \,\epsilon\, \mathrm{vtt} \sim (\mathrm{q}i) \,.\, k \,\epsilon\, \mathrm{vtt} \sim (\mathrm{q}i + \mathrm{q}j) \,.\supset.$

$\mathrm{vtt} = \mathrm{q}i + \mathrm{q}i + \mathrm{q}k.$ Pp.

Questa proposizione spesso si enuncia sotto la forma “ lo spazio fisico è a tre dimensioni „.

I tre postulati esistenziali ora scritti sono necessarii in alcuni casi. Che essi non siano conseguenza dei precedenti risulta da ciò che se noi consideriamo i soli vettori paralleli ad $i$, non è verificata la P67; se consideriamo i soli vettori complanari con $i$ ed $j$, non è verificata la P68; e se invece di vettori

parlassimo di $q_1$ (numeri complessi del 4° ordine), non sarebbe verificata la P69.

70. Hyp P69 . $x, y, z \epsilon q . xi + yj + zk = 0 . \supset . x = 0 . y = 0 . z = 0$.

Infatti se $z \sim = 0$, dividendo l'equazione $xi + yj + zk = 0$ per $z$, si ricava $k = mi + nj$, ove $m$ e $n$ sono q, (e precisamente $m = - x/z$, $n = - y/z$), dunque $k$ sarà complanare con $i$ ed $j$, contrariamente alle Hyp. Dunque $z = 0$.

Allora l'equazione diventa $xi + yj = 0$. Se $y \sim = 0$, dividendo per $y$, si deduce $j \epsilon q i$, contrariamente all'Hyp. Dunque $y = 0$.

L'equazione diventa $xi = 0$. Se $x \sim = 0$, si deduce $i = 0$, contrariamente all'Hp. Dunque $x = 0$.

71. Hyp P69 . $x, y, z, x', y', z' \epsilon q . xi + yj + zk =$

$$x'i + y'j + z'k . \supset . x = x' . y = y' . z = z'.$$

Infatti, dall'Hyp si deduce $(x - x')i + (y - y')j + (z - z')k = 0$, onde, per la P70, $x - x' = 0$, $y - y' = 0$, $z - z' = 0$, che è la Ths.

Ridotto un vettore $u$ alla forma $xi + yj + zk$, i numeri $x, y, z$ diconsi le " coordinate „ del vettore $u$; qualche volta i vettori $xi, yj, zk$ diconsi le " componenti „ del vettore $u$.

Essendo $p$ un punto, diconsi coordinate del punto $p$ le coordinate del vettore $p - o$, ove $o$ è un punto fisso. detto " origine „.

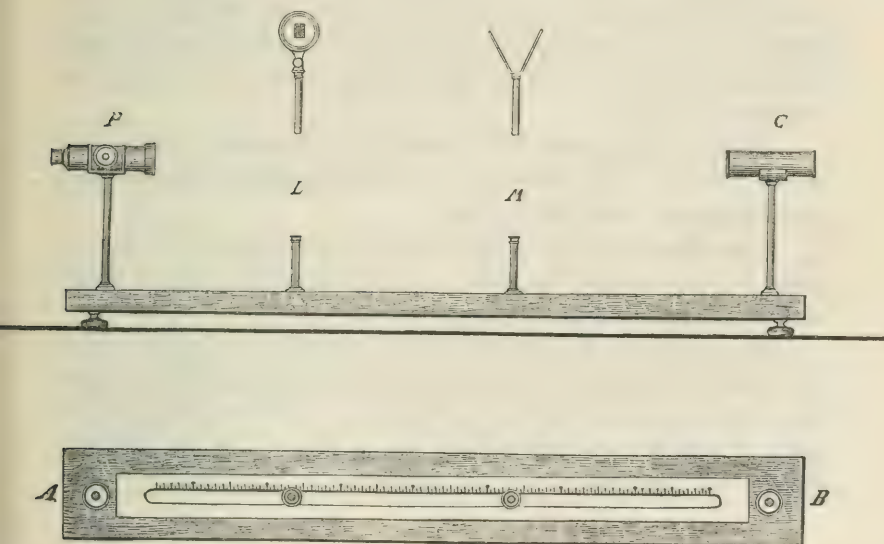
Definite le coordinate, sono stabilite le basi della geometria analitica.

Mi limito qui a dire come, colle idee precedenti, senza introdurre alcuna idea primitiva nuova, sia possibile definire il volume ed il senso d'un tetraedro. concetto fondamentale nel calcolo geometrico; ma mi riservo di sviluppare questa teoria in un altro lavoro.

# *Un nuovo Focometro;*

Nota del Socio NICODEMO JADANZA;

## Descrizione del focometro.

La figura qui annessa rappresenta il nuovo focometro in proiezione verticale ed in proiezione orizzontale:

A B è un basamento in legno costituito da una tavola solida, nella cui faccia superiore trovasi una lastra di acciaio incavata nel mezzo e graduata in millimetri da una parte. La numerazione è doppia da sinistra a destra e da destra a sinistra e va da *zero* ad *ottantacinque centimetri*.

P è un *plesiotelescopio*, ossia un cannocchiale mediante il quale si possono guardare oggetti lontani e vicini. Esso è mo-

bile sul suo sostegno tanto nel senso verticale, quanto nel senso azimutale.

C è un collimatore, ossia un cannocchiale astronomico senza oculare, avente cioè soltanto la lente obbiettiva, al secondo fuoco della quale trovasi un reticolo consistente in una lastrina di vetro con delle incisioni tracciate su di essa.

L ed M sono due sostegni che possono scorrere longitudinalmente lungo la scanalatura della lastra di acciaio e portano alla base un indice che segna i numeri sulla riga millimetrata.

Uno di essi porta un pezzo a V che serve a tenere la lente di cui si vuol misurare la distanza focale, l'altro porta un diaframma di cartone con delle linee tracciate su di esso.

Il diaframma ed il pezzo a V sono mobili e possono essere posti indifferentemente sull'uno o sull'altro dei sostegni L ed M. Questi alla loro volta possono allungarsi o accorciarsi in modo da lasciare libera la visuale del plesiotelescopio P verso il collimatore C.

Prima di adoperare il focometro è necessario assicurarsi che il reticolo del collimatore sia esattamente al fuoco della corrispondente lente obbiettiva.

Per ottenere ciò si collimi col plesiotelescopio ad un oggetto a grandissima distanza (p. e. ad una stella). Indi si guardi attraverso l'obbiettivo del collimatore.

Se si vedono distintamente le incisioni del reticolo è segno che questo si trova al secondo fuoco del corrispondente obbiettivo. Se le incisioni non si vedono o si vedono male, si sposterà il reticolo del collimatore fino a che si vedano distintamente. Ciò ottenuto, l'uso del focometro è il seguente.

## Modo di adoperare il focometro.

a) *Misura della distanza focale di una lente convergente.*

Si ponga la lente sul sostegno a V e si avvicini questo al collimatore C fino a che l'indice che trovasi alla base della colonnetta segni *zero* sulla riga sottoposta. Dopo ciò si disponga il plesiotelescopio a guardare in direzione del collimatore e si alzi o si abbassi il sostegno della lente fino a che il suo centro

ottico si trovi presso a poco sulla direzione comune degli assi del plesiotelescopio e del collimatore. Movendo il sistema oculare del plesiotelescopio arriverà l'istante in cui si vedrà nitida la immagine dei fili del reticolo del collimatore.

Si sposti il sostegno che contiene il diaframma di cartone e si allontani dall'obbiettivo del plesiotelescopio fino a che con questo (senza spostare in alcun modo il sistema oculare) si distinguano nettamente le linee del diaframma.

Il numero segnato sulla riga sottoposta dall' indice che trovasi al piede della colonnetta del diaframma indicherà in millimetri *la distanza focale della lente.*

b) *Misura della distanza focale di una lente divergente.*

Si ponga la lente sul sostegno a V e si avvicini questo al plesiotelescopio P fino a che l'indice che trovasi alla base della colonnetta segni *zero* sulla riga sottoposta. Dopo ciò si disponga il plesiotelescopio a guardare in direzione del collimatore attraverso la lente divergente. Si muova il sistema oculare del plesiotelescopio fino a vedere distinta la immagine dei fili del reticolo del collimatore.

Tolta la lente, si muova il sostegno che contiene il diaframma di cartone e si allontani dall' obbiettivo del plesiotelescopio fino a che con questo (senza spostare in alcun modo il suo sistema oculare) si distinguano le linee del diaframma.

Il numero segnato sulla riga sottoposta dall'indice che trovasi al piede della colonnetta del diaframma indicherà in millimetri *la distanza focale della lente.*

NB. La lente obbiettiva del collimatore ha il medesimo diametro e la medesima distanza focale di quella del plesiotelescopio.

## Modo di tener conto dello spessore della lente.

Siccome il sostegno che porta la lente è a forma di V con delle scanalature lungo i lati (dalla parte interna), così i numeri letti sulla riga millimetrata rappresentano la distanza tra il fuoco della lente ed il piano comune alle due facce di essa

quando la lente è *biconvessa* o *piano-convessa*. Le regole precedenti quindi valgono soltanto per le lenti *infinitamente sottili.*

Per le lenti più comuni, il cui spessore non è trascurabile, valgono le norme seguenti. Lo spessore è indicato con $\Delta$ e può essere sempre misurato con un *compasso di spessore;* i numeri letti sulla riga sono indicati con N.

1° *Lente piano-convessa.*

Quando la faccia curva della lente è rivolta al collimatore, la distanza focale $\varphi$ della lente sarà data da:

$$\varphi = N_1 + \frac{2}{3}\Delta.$$

Quando la faccia piana della lente è rivolta al collimatore:

$$\varphi = N_2 - \Delta$$

e quindi

$$\varphi = \frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{\Delta}{6}.$$

2° *Lente biconvessa isoscele*

$$\varphi = N - \frac{\Delta}{6}.$$

3° *Lente biconvessa qualunque.*

Si misuri due volte la distanza focale della lente, cioè portando ora una faccia ora l'altra faccia dinanzi al collimatore.

La distanza focale definitiva si avrà con più che sufficiente approssimazione mediante la formola

$$\varphi = \frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{\Delta}{6}.$$

4° *Lente biconcava isoscele*

$$\varphi = N + \frac{\Delta}{6}.$$

5° *Lente piano-concava.*

(Si ammette che il piano che passa pel mezzo dello spessore coincida col piano del sostegno a V).

Se la faccia piana è rivolta all'obbiettivo del plesiotelescopio:

$$\varphi = N_1 - \frac{\Delta}{6}.$$

Se la faccia curva è rivolta all'obbiettivo del plesiotelescopio:

$$\varphi = N_2 + \frac{\Delta}{2}$$

e quindi

$$\varphi = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{\Delta}{6}.$$

Torino, Marzo 1898.

*NB.* — Il signor D. Collo meccanico dell'Osservatorio di Torino ha già costruito in modo inappuntabile il focometro descritto precedentemente.

---

*L'Accademico Segretario*
Andrea Naccari.

# CLASSE

DI

# SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

## Adunanza del 20 Marzo 1898.

PRESIDENZA DEL PROF. BERNARDINO PEYRON
SOCIO ANZIANO.

Sono presenti i Socii: Brusa, Perrero e Nani Segretario.

Il Socio Segretario dà lettura dell'atto verbale della precedente seduta (6 Marzo 1898), che viene approvato.

Legge quindi una lettera del Reggente il Ministero della Real Casa, che, a nome di Sua Maestà il Re, ringrazia l'Accademia dell'indirizzo mandato nella ricorrenza del 50° anniversario della promulgazione dello Statuto;

e presenta, 1° un volume: *Poesie e lettere inedite di Silvio Pellico,* Roma, 1898; inviato in dono dal Presidente della Camera dei Deputati;

2° un opuscolo: *La leggenda di S.ta Elisabetta d'Ungheria in dialetto savonese della metà del secolo XV*, Genova, 1898; offerto in omaggio dal Socio corrispondente Vittorio Poggi.

*L'Accademico Segretario*
Cesare Nani.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

# CLASSE

DI

# SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

## Adunanza del 27 Marzo 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ALFONSO COSSA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

---

Sono presenti i Soci: Bizzozero, Direttore della Classe, D'Ovidio, Spezia, Camerano, Segre, Volterra, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti e Naccari Segretario.

Viene letto ed approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Segretario comunica le lettere di ringraziamento inviate dai professori Schwendener e Gemmellaro per la loro nomina a corrispondenti.

Vengono accolte per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° *Sull'integrazione di una classe di equazioni dinamiche*, del Socio Volterra,

2° *Le speculazioni di Giovanni Benedetti sul moto dei gravi*, del Dott. Giovanni Vailati, presentata dal Socio Volterra.

# LETTURE

## *Sulla integrazione di una classe di equazioni dinamiche;*

Nota del Socio VITO VOLTERRA.

In una Nota precedente avente il titolo: *Sopra una classe di equazioni dinamiche* (*), ho stabilito le equazioni differenziali dei *moti spontanei a caratteristiche indipendenti.*

Ci varremo ora dei resultati ivi trovati, per approfondire l'esame dei moti stessi. Studieremo dapprima il caso dei moti del secondo ordine, cioè di quei moti che dipendono da due sole caratteristiche e mostreremo come queste si ottengono in funzione del tempo mediante funzioni esponenziali. Prenderemo poi ad esaminare un sistema *non holonomo* che può assumersi come il sistema tipico del secondo ordine e per questo sistema studieremo completamente l'andamento del moto, rilevando le particolarità che si osservano nel caso dei moti permanenti, e distinguendo il caso della stabilità da quello della instabilità.

In due paragrafi successivi tratteremo dei moti d'ordine $\nu$, quando esistono $\nu - 2$ integrali lineari o $\nu - 3$ integrali lineari ed uno quadratico. In questo caso giovandoci di un resultato che abbiamo stabilito alcuni anni fa (**), mostreremo che allorquando la equazione determinante ha radici disuguali, le caratteristiche sono funzioni ellittiche del tempo.

Finalmente nell'ultimo paragrafo, applicando una geniale osservazione del Poincaré, già impiegata con successo dal Picard (***) e dal Painlevé (****) in alcune questioni meccaniche, otterremo nel caso il più generale, le caratteristiche espresse mediante serie di funzioni del tempo, valide per tutti i valori del

(*) Seduta del 27 Febbraio 1898.

(**) Seduta del 31 Marzo 1895.

(***) Picard, *Traité d'analyse,* T. III, chapitre X.

(****) Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm,* page 577.

tempo, i cui coefficienti si ricavano mediante operazioni razionali dalle costanti note delle equazioni differenziali e dai valori iniziali delle caratteristiche.

Il problema della determinazione analitica delle caratteristiche in funzione del tempo, viene così completamente risoluto.

## § 1. — Moti spontanei a caratteristiche indipendenti del secondo ordine.

**1.** — Nel caso dei sistemi del secondo ordine le equazioni generali (Nota citata, § 7, form. (E')) divengono

$$p'_1 = g_{12}^{(1)} p_2 p_1 + g_{12}^{(2)} p_2^2$$

$$p'_2 = g_{21}^{(2)} p_1 p_2 + g_{21}^{(1)} p_1^2$$

ovvero, ponendo

$$g_{12}^{(1)} = -\alpha, \qquad g_{12}^{(2)} = -\beta$$

avremo

$$(1) \qquad \begin{cases} p'_1 = -p_2(\alpha p_1 + \beta p_2) \\ p'_2 = \phantom{-}p_1(\alpha p_1 + \beta p_2). \end{cases}$$

**2.** — Mostriamo la effettiva esistenza di sistemi a caratteristiche indipendenti del secondo ordine, a cui corrispondono valori arbitrarii per le costanti $\alpha$ e $\beta$. Per ogni sistema di valori di queste quantità ne esistono infiniti. Noi in particolare ne esamineremo uno speciale che considereremo come tipico e che ci darà un' idea materiale dell' andamento del moto corrispondente.

Prendiamo un sistema di assi $x_1, x_2, x_3$ tali che i coseni degli angoli che essi formano originariamente con gli assi coordinati $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ siano rappresentati dalla seguente tabella:

(2)

| | $\xi_1$ , | $\xi_2$ , | $\xi_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\alpha_1$ , | $\alpha_2$ , | $\alpha_3$ |
| $x_2$ | $\beta_1$ , | $\beta_2$ , | $\beta_3$ |
| $x_3$ | $\gamma_1$ , | $\gamma_2$ , | $\gamma_3$ |

Se ruotiamo gli assi $x_1, x_2, x_3$ di un angolo $\theta$ intorno alla parallela a $\xi_1$ condotta per la loro origine, i coseni stessi diverranno

| | $\xi_1$, | $\xi_2$, | $\xi_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\xi_{11}$, | $\xi_{21}$, | $\xi_{31}$ |
| $x_2$ | $\xi_{12}$, | $\xi_{22}$, | $\xi_{32}$ |
| $x_3$ | $\xi_{13}$, | $\xi_{23}$, | $\xi_{33}$ |

in cui

$$\xi_{11} = \alpha_1, \quad \xi_{21} = \alpha_2 \cos\theta - \alpha_3 \operatorname{sen}\theta, \quad \xi_{31} = \alpha_3 \cos\theta + \alpha_2 \operatorname{sen}\theta$$

$$\xi_{12} = \beta_1, \quad \xi_{22} = \beta_2 \cos\theta - \beta_3 \operatorname{sen}\theta, \quad \xi_{32} = \beta_3 \cos\theta + \beta_2 \operatorname{sen}\theta$$

$$\xi_{13} = \gamma_1, \quad \xi_{23} = \gamma_2 \cos\theta - \gamma_3 \operatorname{sen}\theta, \quad \xi_{33} = \gamma_3 \cos\theta + \gamma_2 \operatorname{sen}\theta.$$

Denotiamo con $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ le coordinate dell'origine degli assi $x_1, x_2, x_3$ e poniamo

$$\theta = D\xi_1 \tag{3}$$

in cui D denota una costante. Avremo allora che ad ogni punto dello spazio preso come origine degli assi $x_1, x_2, x_3$ corrisponderà una orientazione degli assi stessi.

Per ottenere queste diverse orientazioni osserviamo che gli assi $x_1, x_2, x_3$ le cui origini appartengono ad uno stesso piano parallelo a $\xi_2 \xi_3$ sono paralleli fra loro e se le origini sono scelte sul piano coordinato $\xi_2 \xi_3$ la loro comune orientazione corrisponde a quella primitiva rappresentata dalla tabella (2). Immaginiamo dunque condotto per ogni punto di questo piano coordinato gli assi $x_1, x_2, x_3$ nella orientazione primitiva, quindi facciamo muovere il piano stesso di un movimento a vite attorno all'asse $\xi_1$ in modo che il passo della vite sia $\frac{2\pi}{D}$. Se il piano trascinerà nel suo moto gli assi $x_1, x_2, x_3$ supposti condotti per ogni punto di esso e ammettendoli rigidamente collegati al piano stesso, questi prenderanno le orientazioni corrispondenti alle varie posizioni che assumono le loro origini.

3. — Per ciò che abbiamo ora veduto, ad ogni punto A dello spazio corrisponde un piano $x_1 x_2$ passante per A che denoteremo con $\sigma_A$. Supponiamo che si abbia un punto mobile, tale che in ogni posizione che occupa nello spazio, esso non possa muoversi che tangenzialmente al piano $\sigma_A$ corrispondente al punto stesso. Il sistema sarà *non holonomo* (*) e l'equazione del vincolo sarà

$$\xi_{13}\, d\xi_1 + \xi_{23}\, d\xi_2 + \xi_{33}\, d\xi_3 = 0.$$

Potremo dunque porre

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi'_1 = \xi_{11}\, p_1 + \xi_{12}\, p_2 \\ \xi'_2 = \xi_{21}\, p_1 + \xi_{22}\, p_2 \\ \xi'_3 = \xi_{31}\, p_1 + \xi_{32}\, p_2 \end{cases}$$

ove $p_1$ e $p_2$ sono le caratteristiche del moto.

Supponendo la massa del punto eguale ad 1, la sua forza viva sarà

$$T = \frac{1}{2}\,(p_1^2 + p_2^2).$$

Per calcolare i coefficienti $g_{12}^{(1)}$, $g_{12}^{(2)}$ faremo uso delle formule (Vedi Nota citata, § 1).

$$\begin{aligned} g_{12}^{(1)} = {} & \xi_{11}\left(\xi_{11}\frac{\partial \xi_{12}}{\partial \xi_1} + \xi_{21}\frac{\partial \xi_{22}}{\partial \xi_1} + \xi_{31}\frac{\partial \xi_{32}}{\partial \xi_1}\right) + \\ & + \xi_{21}\left(\xi_{11}\frac{\partial \xi_{12}}{\partial \xi_2} + \xi_{21}\frac{\partial \xi_{22}}{\partial \xi_2} + \xi_{31}\frac{\partial \xi_{32}}{\partial \xi_2}\right) + \\ & + \xi_{31}\left(\xi_{11}\frac{\partial \xi_{12}}{\partial \xi_3} + \xi_{21}\frac{\partial \xi_{22}}{\partial \xi_3} + \xi_{31}\frac{\partial \xi_{32}}{\partial \xi_3}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{12}^{(2)} = {} & \xi_{12}\left(\xi_{11}\frac{\partial \xi_{12}}{\partial \xi_1} + \xi_{21}\frac{\partial \xi_{22}}{\partial \xi_1} + \xi_{31}\frac{\partial \xi_{32}}{\partial \xi_1}\right) + \\ & + \xi_{22}\left(\xi_{11}\frac{\partial \xi_{12}}{\partial \xi_2} + \xi_{21}\frac{\partial \xi_{22}}{\partial \xi_2} + \xi_{31}\frac{\partial \xi_{32}}{\partial \xi_2}\right) + \\ & + \xi_{32}\left(\xi_{11}\frac{\partial \xi_{12}}{\partial \xi_3} + \xi_{21}\frac{\partial \xi_{22}}{\partial \xi_3} + \xi_{31}\frac{\partial \xi_{32}}{\partial \xi_3}\right) \end{aligned}$$

---

(*) Infatti

$$\xi_{13}\left(\frac{\partial \xi_{23}}{\partial \xi_3} - \frac{\partial \xi_{33}}{\partial \xi_2}\right) + \xi_{23}\left(\frac{\partial \xi_{33}}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \xi_{13}}{\partial \xi_3}\right) + \xi_{33}\left(\frac{\partial \xi_{13}}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \xi_{23}}{\partial \xi_1}\right) = (1 - \gamma'_1)\, D \gtrless 0.$$

e otterremo

$$g_{12}^{(1)} = \alpha_1 \left( \xi_{21} \frac{\partial \xi_{22}}{\partial \theta} + \xi_{31} \frac{\partial \xi_{32}}{\partial \theta} \right) \frac{d\theta}{d\xi_1} = \alpha_1 (\xi_{31} \xi_{22} - \xi_{21} \xi_{32}) D = - D\alpha_1 \gamma_1$$

$$g_{12}^{(2)} = \beta_1 \left( \xi_{21} \frac{\partial \xi_{22}}{\partial \theta} + \xi_{31} \frac{\partial \xi_{32}}{\partial \theta} \right) \frac{d\theta}{d\xi_1} = \beta_1 (\xi_{31} \xi_{22} - \xi_{21} \xi_{32}) D = - D\beta_1 \gamma_1$$

quindi

$$\alpha = D\alpha_1 \sqrt{1 - \alpha_1^2 - \beta_1^2}, \qquad \beta = D\beta_1 \sqrt{1 - \alpha_1^2 - \beta_1^2}.$$

Poichè D, $\alpha_1$, $\beta_1$ sono arbitrarie (purchè queste due ultime quantità abbiano la somma dei quadrati minore di 1), così potremo far sì che $\alpha$ e $\beta$ abbiano valori arbitrarii.

In tutto ciò che segue noi supporremo di prendere D, $\gamma_1$, e il radicale $\sqrt{1 - \gamma_1^2}$ sempre *positivi.*

Riassumendo ciò che abbiamo fin qui trovato, possiamo dire che *il moto di un punto di coordinate* $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ *non soggetto ad alcuna forza e i cui vincoli sono rappresentabili mediante la equazione*

$$\xi_{13}\, d\xi_1 + \xi_{23}\, d\xi_2 + \xi_{33}\, d\xi_3 = 0$$

*costituisce il tipo dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti del 2° ordine i più generali.*

4. — Per un punto qualunque A dello spazio conduciamo il piano $\sigma_A$ corrispondente ed il piano parallelo al piano coordinato $\xi_2 \xi_3$. La loro intersezione $l_A$ formerà cogli assi $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ angoli i cui coseni saranno rispettivamente

$$\text{(A)} \qquad 0, \quad \frac{\pm \xi_{33}}{\sqrt{1-\gamma_1^2}}, \quad \frac{\mp \xi_{23}}{\sqrt{1-\gamma_1^2}}.$$

Prenderemo come direzione positiva di $l_A$ quella i cui coseni corrispondono ai segni superiori.

Ad ogni punto A dello spazio corrisponde una retta $l_A$, ed evidentemente tutte le $l_A$ relative a punti equidistanti dal piano $\xi_2 \xi_3$ sono parallele ed hanno lo stesso verso.

Se prendiamo due punti A, B le cui distanze dal piano $\xi_2\,\xi_3$ differiscono per $\epsilon$, avremo che l'angolo

$$\widehat{l_A\, l_B} = D\epsilon,$$

quindi se $\epsilon = (2h+1)\frac{\pi}{D}$, ($h$ essendo intero) le rette $l_A$ e $l_B$ saranno parallele e avranno verso opposto, mentre se $\epsilon = \frac{2h\pi}{D}$, esse saranno parallele e dello stesso verso.

Le rette $l_A$, al pari dei piani $\sigma_A$ hanno una notevole importanza in tutta la questione del moto.

## § 2. — Integrazione delle equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti del secondo ordine.

1\. — Riprendiamo le equazioni generali (1).

Esse ammettono l'integrale delle forze vive

$$p_1^2 + p_2^2 = \text{cost} = C^2.$$

Posto

$$p_1 = C\cos\varphi, \qquad p_2 = C\,\text{sen}\,\varphi, \qquad C > 0$$

$$\alpha = -A\,\text{sen}\,\varphi_0, \qquad \beta = A\cos\varphi_0, \qquad A = \left|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right| = D\gamma_1\sqrt{1-\gamma_1^2}$$

le (1) si ridurrannno alla sola equazione

$$\varphi' = AC\,\text{sen}\,(\varphi - \varphi_0)$$

e integrando

$$AC\,(t-t_0) = \log \text{tg}\,\frac{1}{2}\,(\varphi-\varphi_0)$$

$t_0$ essendo una costante arbitraria. Quindi

$$tg\,\frac{1}{2}\,(\varphi-\varphi_0) = e^{AC(t-t_0)}$$

$$\cos\varphi = -\frac{\cos\varphi_0\,\text{senh}\,AC(t-t_0) + \text{sen}\,\varphi_0}{\cosh AC(t-t_0)}$$

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{-\text{sen}\,\varphi_0\,\text{senh}\,AC\,(t-t_0) + \cos\varphi_0}{\cosh AC\,(t-t_0)}$$

e finalmente

$$(5)\qquad \begin{cases} p_1 = -\dfrac{C}{A}\dfrac{\beta\,\mathrm{senh}\,AC(t-t_0)-\alpha}{\cosh AC(t-t_0)} \\[2ex] p_2 = \dfrac{C}{A}\dfrac{\alpha\,\mathrm{senh}\,AC(t-t_0)+\beta}{\cosh AC(t-t_0)}. \end{cases}$$

Abbiamo così le formule risolutive per tutti i moti del secondo ordine.

2. — Passiamo ai moti del secondo ordine *permanenti*.

Otterremo le equazioni (Cfr. Nota citata, § 7)

$$p_2(\alpha p_1 + \beta p_2) = 0$$

$$p_1(\alpha p_1 + \beta p_2) = 0$$

quindi

$$\alpha p_1 + \beta p_2 = 0$$

ovvero denotando con $\lambda$ una quantità costante

$$(6)\qquad p_1 = -\lambda\beta, \qquad p_2 = \lambda\alpha.$$

Si hanno così tutti i moti permanenti del secondo ordine.

Per ricavare queste formule dalle formule generali (5) basterà in queste fare $t_0 = \pm\infty$.

Se facciamo $t_0 = +\infty$, avremo

$$\lim_{t_0=\infty} \frac{C}{A}\frac{\mathrm{senh}\,AC(t-t_0)}{\cosh AC(t-t_0)} = -\frac{C}{A}$$

invece facendo $t_0 = -\infty$ si avrà

$$\lim_{t_0=-\infty} \frac{C}{A}\frac{\mathrm{senh}\,AC(t-t_0)}{\cosh AC(t-t_0)} = \frac{C}{A}.$$

Quindi nel primo caso si trova

$$p_1 = -\lambda\beta, \qquad p_2 = \lambda\alpha, \qquad \lambda = -\frac{C}{A} < 0,$$

e nel secondo caso

$$p_1 = -\lambda\beta, \qquad p_2 = \lambda\alpha, \qquad \lambda = \frac{C}{A} > 0.$$

Mostreremo ora che le formule (6) corrispondono ai moti permanenti stabili quando si abbia $\lambda > 0$, e a moti permanenti instabili quando sia $\lambda < 0$.

**3.** — A tal fine dimostreremo il teorema seguente:

*Ogni moto spontaneo a caratteristiche indipendenti del secondo ordine tende indefinitamente a divenire un moto permanente individuato dalle formole:*

$$p_1 = -\frac{C}{A}\beta, \qquad p_2 = \frac{C}{A}\alpha.$$

Infatti dalle (5) segue

$$\lim_{t=\infty} p_1 = -\frac{C}{A}\beta, \qquad \lim_{t=\infty} p_2 = \frac{C}{A}\alpha.$$

È facile di qui dedurne che, dato un moto stazionario corrispondente a $\lambda$ positivo, sarà sempre possibile perturbarlo in modo che $p_1$ e $p_2$ differiscano durante tutto il moto, dai valori costanti che queste quantità hanno nel moto stazionario, meno di numeri tanto piccoli quanto si vuole; e perciò basterà che le alterazioni fatte subire inizialmente ai valori di $p_1$ e $p_2$ siano inferiori ad un dato limite. Al contrario se consideriamo un moto stazionario corrispondente a $\lambda$ negativo, la detta proprietà non si verificherà, perchè per quanto poco si alterino in un istante qualunque i valori di $p_1$ e di $p_2$, purchè non si mantengano proporzionali a $-\beta$ e ad $\alpha$, il moto cesserà di essere stazionario ed i valori di $p_1$ e $p_2$ tenderanno indefinitamente verso $-\frac{C}{A}\beta$ e $\frac{C}{A}\alpha$.

Questa diversa proprietà che si verifica per i moti stazionarii secondochè $\lambda$ è positivo o negativo, costituisce appunto ciò che assumeremo come *proprietà caratteristica delle loro stabilità ed instabilità* (*).

---

(*) Nella Nota che seguirà la presente daremo la definizione di stabilità ed instabilità dei moti stazionarii nel caso generale ed essa sarà informata allo stesso concetto (Cfr. intanto *Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii*, " Annali di Mat. ", vol. XXIII).

4. — Possiamo facilmente studiare l'andamento di un moto in prossimità di ridursi ad un moto stabile.

Perciò poniamo nelle (1)

$$p_1 = -\lambda\beta + \omega_1, \qquad p_2 = \lambda\alpha + \omega_2 \qquad (\lambda > 0)$$

e consideriamo $\omega_1$ e $\omega_2$ come piccolissimi, in modo da poterne trascurare le potenze superiori alla prima per rapporto a queste quantità.

Le (1) diverranno allora

$$\omega'_1 = -\lambda\alpha(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)$$

$$\omega'_2 = -\lambda\beta(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)$$

e ponendo

$$\omega_1 = \psi_1 e^{\varrho t}, \qquad \omega_2 = \psi_2 e^{\varrho t},$$

avremo

$$\psi_1(\lambda\alpha^2 + \rho) + \psi_2(\lambda\alpha\beta) = 0$$

$$\psi_1(\lambda\alpha\beta) + \psi_2(\lambda\beta^2 + \rho) = 0$$

d'onde

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha^2 + \rho, & \lambda\alpha\beta \\ \lambda\alpha\beta, & \lambda\beta^2 + \rho \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\rho^2 + \lambda\rho(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

da cui segue

$$\rho = \begin{cases} 0 \\ -\lambda(\alpha^2 + \beta^2) = -\lambda A^2 \end{cases}$$

quindi trascurando la radice nulla

$$\omega_1 = K\alpha e^{-\lambda A^2 t}, \qquad \omega_2 = K\beta e^{-\lambda A^2 t}$$

essendo K una costante arbitraria.

## § 3. — Caso tipico dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti del secondo ordine.

1. — Riprendiamo in esame quel sistema il cui moto nel § 1 abbiamo assunto come il tipo dei moti spontanei del se-

condo ordine a caratteristiche indipendenti, e mostriamo come si possa compiere la integrazione ed ottenere un'immagine dell'andamento del moto stesso.

2. — Dalle (3) e (4) segue

$$\theta' = D\xi'_1 = D(\alpha_1 p_1 + \beta_1 p_2). \tag{7}$$

Cominciamo dapprima a supporre che il moto sia permanente. Dalle (6) si dedurrà

$$\theta' = 0$$

onde $\theta =$ cost. E le (4) diverranno

$$\xi'_1 = 0$$
$$\xi'_2 = \lambda D \gamma_1 \xi_{33}$$
$$\xi'_3 = - \lambda D \gamma_1 \xi_{23}$$

e integrando

$$\xi_1 - \xi_1^0 = 0\,, \quad \xi_2 - \xi_2^0 = \lambda D \gamma_1 \xi_{33} t, \quad \xi_3 - \xi_3^0 = - \lambda D \gamma_1 \xi_{23} t$$

ove $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ rappresentano le coordinate della posizione A occupata dal mobile al tempo $t = 0$. Il moto è dunque uniforme ed avviene sopra una retta $l_A$.

Esso avrà luogo nel verso positivo o in quello negativo, secondochè $\lambda$ è positivo o negativo.

Possiamo dunque concludere:

*I moti permanenti stabili sono moti uniformi nel verso positivo delle $l_A$ e i moti permanenti instabili sono quelli nel verso negativo delle rette stesse.*

3. — Supponiamo che il moto non sia permanente, allora tenendo conto delle (5) si deduce dalla (7)

$$\theta' = \frac{AC}{\gamma_1 \cosh AC(t - t_0)}\,.$$

Con una quadratura avremo dunque $\theta$ in funzione del tempo: quindi mediante tre nuove quadrature otterremo per mezzo delle (4) $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ espresse pure in funzione del tempo.

4. — Risparmiamoci però queste operazioni e riconosciamo l'andamento del moto nella maniera seguente:

Denotiamo con $g$ l'angolo che in ogni istante la direzione del moto del punto forma colla direzione positiva della retta $l_A$ che passa pel punto A occupato nell'istante stesso dal mobile. Avremo (Vedi (A))

$$\cos g = \frac{\xi'_2}{\sqrt{\xi'^2_1+\xi'^2_2+\xi'^2_3}} \frac{\xi_{33}}{\sqrt{1-\gamma^2_1}} - \frac{\xi'_3}{\sqrt{\xi'^2_1+\xi'^2_2+\xi'^2_3}} \frac{\xi_{23}}{\sqrt{1-\gamma^2_1}} =$$

$$= \frac{(\xi_{21}\xi_{33}-\xi_{31}\xi_{23})p_1+(\xi_{22}\xi_{23}-\xi_{32}\xi_{33})p_2}{\sqrt{p^2_1+p^2_2}\sqrt{1-\gamma^2_1}} = \frac{\alpha_1 p_2 - \beta_1 p_1}{\sqrt{p^2_1+p^2_2}\sqrt{1-\gamma^2_1}}$$

e applicando le (5)

$$\cos g = \frac{\operatorname{senh} AC(t-t_0)}{\cosh AC(t-t_0)}$$

e quindi

$$\operatorname{sen} g = \frac{1}{\cosh AC(t-t_0)} . \tag{8}$$

Da queste formole si deduce

$$dg = -\frac{AC\,dt}{\cosh AC(t-t_0)} = -\gamma_1 d\theta$$

onde integrando

$$\theta - \theta_0 = -\frac{1}{\gamma_1}(g-g_0)$$

chiamando $\theta_0$ e $g_0$ i valori di $\theta$ e $g$ al tempo $t=0$.

Ne segue

$$\xi_1 - \xi_1^0 = \frac{1}{D\gamma_1}(g_0-g). \tag{9}$$

5. — Serviamoci ora delle due formule trovate (8) e (9). La prima mostra che *l'angolo $g$ va indefinitamente decrescendo,* la seconda dà la proiezione sull'asse $\xi_1$ del cammino percorso dal punto mobile. *Il limite verso cui tenderà questa proiezione col crescere indefinito del tempo sarà*

$$\frac{g_0}{D\gamma_1} .$$

6. — La minima distanza fra l'asse $z$ e la retta $l_A$ su cui si trova il punto mobile al tempo $t$, sarà (Vedi (A))

$$r = \frac{\xi_{23}\xi_2 + \xi_{33}\xi_3}{\sqrt{1-\gamma_1^2}}$$

quindi

$$r' = \frac{\xi_{23}\xi'_2 + \xi_{33}\xi'_3 + \xi_2\xi'_{23} + \xi_3\xi'_{33}}{\sqrt{1-\gamma_1^2}}$$

e con facili calcoli

$$r' = -\frac{\gamma_1^2}{A}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_1^2}}(\xi_{23}\xi_3 - \xi_{33}\xi_2)\frac{d\theta}{dt}$$

onde integrando

$$r - r_0 = -\frac{\gamma_1^2}{A}(\theta - \theta_0) + \int_0^t \frac{\xi_{23}\xi_3 - \xi_{33}\xi_2}{\sqrt{1-\gamma_1^2}} \cdot \frac{AC}{\gamma_1} \frac{1}{\cosh AC(t-t_0)} dt$$

essendo $r_0$ il valore di $r$ per $t = 0$.

Osserviamo ora che $\xi_{23}$ e $\xi_{33}$ sono minori di 1 e $|\xi'_2|$ e $|\xi'_3$ sono quantità sempre inferiori ad un valore finito. Potremo dunque porre

$$\frac{\xi_{23}\xi_3 - \xi_{33}\xi_2}{\sqrt{1-\gamma_1^2}} \frac{AC}{\gamma_1} = Mt$$

essendo M una quantità inferiore ad un numero finito.

Ne segue che

$$\int_0^t Mt \frac{1}{\cosh AC(t-t_0)} dt \tag{10}$$

sarà sempre inferiore ad un numero finito qualunque sia il valore di $t$.

Potremo dunque concludere che *il punto mobile non potrà mai raggiungere delle rette $l_A$ che distano dall'asse $z$ al di là di un certo limite.* Evidentemente col crescere indefinito di $t_0$ l'integrale (10) e quindi $r - r_0$ decresceranno indefinitamente.

7. — Dalle fatte considerazioni si possono dedurre facilmente altre proprietà, oltre quelle già stabilite (§ 2), relative alle perturbazioni dei moti permanenti stabili ed instabili. Così nel caso dei moti stabili, purchè la perturbazione iniziale sia

inferiore ad un limite convenientemente scelto, il moto perturbato subirà durante tutto il tempo una deviazione dalla direzione del moto permanente, inferiore ad un numero tanto piccolo quanto si vuole, e il moto avrà luogo secondo una traiettoria che si avvicina indefinitamente ad una retta $l_\lambda$ la cui distanza dalla traiettoria del moto non perturbato sarà inferiore ad un numero piccolo ad arbitrio.

Infine nel caso di un moto instabile le dette particolarità pel moto perturbato non si verificheranno.

## § 4. — Moti spontanei a caratteristiche indipendenti d'ordine $\nu$ con $\nu - 2$ integrali lineari.

**1.** — Se il moto è di ordine $\nu$ e si conoscono $\nu - 2$ integrali lineari indipendenti, le equazioni differenziali si riconducono alla forma (Vedi Nota citata, § 8, Equaz. (H'))

$$(11) \qquad \begin{cases} z'_1 = z_2(M_{12}^{(1)} z_1 + M_{12}^{(2)} z_2 + N_{12}) \\ z'_2 = z_1(M_{21}^{(1)} z_1 + M_{21}^{(2)} z_2 + N_{21}) \end{cases}$$

quindi ponendo

$$M_{12}^{(1)} = -\alpha, \qquad M_{12}^{(2)} = -\beta, \qquad N_{12} = -\gamma$$

avremo

$$z'_1 = -z_2(\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma)$$

$$z'_2 = z_1(\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma).$$

**2.** — Ci limiteremo a mostrare come il sistema si riconduca alle quadrature, giacchè l'effettivo calcolo non presenta alcuna difficoltà analitica.

Dall'integrale delle forze vive segue

$$z_1^2 + z_2^2 = \text{cost} = C^2$$

onde potremo porre

$$z_1 = C\cos\varphi, \qquad z_2 = C\,\text{sen}\,\varphi$$

onde le (11) si ridurranno alla sola equazione

$$\varphi' = C(\alpha\cos\varphi + \beta\,\text{sen}\,\varphi) + \gamma$$

e ponendo

$$\alpha = - A \operatorname{sen} \varphi_0, \qquad \beta = A \cos \varphi_0, \qquad A = \left| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right|$$

avremo

$$\theta' = CA \operatorname{sen} (\varphi - \varphi_0) + \gamma$$

d'onde

$$t - t_0 = \int \frac{d\varphi}{CA \operatorname{sen} (\varphi - \varphi_0) + \gamma}$$

denotando con $t_0$ una costante arbitraria.

Possiamo quindi concludere: *Se si conoscono* $\nu - 2$ *integrali lineari, le* $\nu$ *caratteristiche si esprimeranno mediante funzioni trigonometriche o esponenziali del tempo.*

È notevole osservare che il presentarsi delle une o delle altre funzioni dipenderà dall'essere $C^2 A^2 - \gamma^2$ minore o maggiore di zero; *l'andamento del moto resulterà quindi di natura del tutto diversa secondo il segno del binomio* $C^2 A^2 - \gamma^2$.

## § 5. — Moti spontanei a caratteristiche indipendenti d'ordine $\nu$ con $\nu - 3$ integrali lineari ed un integrale quadratico.

1. — Se per un sistema d'ordine $\nu$ si conoscono $\nu - 3$ integrali indipendenti di primo grado ed uno di secondo grado e se questo ha l'equazione caratteristica con radici semplici, potremo scrivere le equazioni del moto sotto la forma (Vedi Nota citata, § 10)

$$p'_1 = e_{123} \frac{d(T, F)}{d(p_2, p_3)}$$

$$p'_2 = e_{231} \frac{d(T, F)}{d(p_3, p_1)}$$

$$p'_3 = e_{312} \frac{d(T, F)}{d(p_1, p_2)}$$

in cui

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_r \sum_1^3{}_s E_{rs} p_r p_s + \text{cost}$$

$$F = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_r \sum_1^3{}_s \Lambda_{rs} p_r p_s + \Sigma_i \Lambda_i p_i$$

o anche scrivendo

$$f_1 = \frac{1}{2} \sum_1^3 {}_r \sum_1^3 {}_s E_{rs} p_r p_s , \qquad f_2 = e_{123} F ,$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(p_2, p_3)}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(p_3, p_1)}$$

$$\frac{dp_3}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(p_1, p_2)} .$$

2. — Tenendo presente un resultato che abbiamo stabilito nella Nota: *Sopra un sistema di equazioni differenziali* (*), possiamo concludere che gl'integrali delle equazioni precedenti sono funzioni ellittiche di $t$, quindi poichè le $\nu$ caratteristiche sono funzioni lineari delle $p_1, p_2, p_3$, così avremo il teorema: *Allorchè si conoscono* $\nu - 3$ *integrali lineari ed un integrale quadratico la cui equazione caratteristica ha radici diseguali, le* $\nu$ *caratteristiche si potranno esprimere come funzioni ellittiche del tempo.*

Per la effettiva determinazione delle funzioni incognite rimandiamo alla Nota che abbiamo ora citata.

## § 6. — Teorema generale sulla integrazione per serie delle equazioni del moto spontaneo di un sistema a caratteristiche indipendenti.

1. — Cominciamo dallo stabilire il seguente

Lemma I. *Se*

$$| a_{sk}^{(r)} | < A$$

*e i valori* $p_i^0$ *delle* $p_i$ *per* $t = t_0$ *sono tali che*

$$| p_i^0 | \leq P$$

*gl'integrali delle equazioni differenziali*

$$(12) \qquad p'_s = \sum_1^\nu {}_r \sum_1^\nu {}_k a_{sk}^{(r)} p_r p_k \qquad (s = 1, 2 \ldots \nu)$$

(*) " Atti della R. Accademia di Torino „, 1895.

*sono funzioni analitiche olomorfe nel piano della variabile complessa $t$ entro il cerchio di raggio*

$$r = \frac{1}{4\nu^2 P}$$

*avente per centro il punto $t = t_0$.*

Infatti osserviamo che i secondi membri delle (12) sono funzioni olomorfe per tutti i valori delle $p_i$ tali che

$$|p_i - p_i^0| < b$$

essendo $b$ un numero qualsiasi. I valori che assumono i moduli dei secondi membri, mentre le $p_i$ soddisfano alle diseguaglianze precedenti saranno evidentemente inferiori a

$$M = \nu^2 A (P + b)^2.$$

Teniamo ora conto che i secondi membri delle (12) sono indipendenti da $t$, quindi per un ben noto teorema (*) avremo che gl'integrali $p_i$ saranno funzioni olomorfe della variabile complessa $t$ entro un cerchio di raggio

$$\frac{b}{M} = \frac{b}{\nu^2 A (P + b)^2}.$$

Il valore massimo di questo rapporto si avrà per $b = P$, onde potremo assumere come raggio del cerchio entro cui le $p_i$ sono olomorfe

$$r = \frac{1}{4\nu^2 AP}.$$

2. — Lemma II. *Se i numeri reali $p_1^0, p_2^0 \dots p_\nu^0$ sono i valori di $p_1, p_2 \dots p_\nu$ per il valore reale $t = t_0$, gl'integrali delle* (12) *saranno funzioni olomorfe in tutta la striscia indefinita del piano complesso $t$ compresa fra le due parallele all'asse reale distanti da questo di*

$$\frac{1}{4\nu^2 A \sqrt{{p_1^0}^2 + {p_2^0}^2 + \dots + {p_\nu^0}^2}}.$$

(*) Picard, *Traité d'analyse*, T. II, pag. 312.

Infatti siccome le (12) ammettono l'integrale

$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_\nu^2 = \text{cost},$$

così per ogni valore reale di $t$, avremo

$$|p_i| \leq \sqrt{p_1^{0^2} + p_2^{0^2} + \ldots + p_\nu^{0^2}}$$

onde applicando il lemma precedente, si avrà, facendo percorrere a $t$ tutto l'asse reale, che le $p_i$ si manterranno olomorfe entro tutti i cerchi aventi il centro sull'asse reale e aventi il raggio eguale a

$$r = \frac{1}{4\nu^2 A \sqrt{p_1^{0^2} + p_2^{0^2} + \ldots + p_\nu^{0^2}}}$$

il che dimostra la proposizione.

3. — Dai due lemmi stabiliti si deduce mediante una osservazione del Poincaré che le $p_i$ saranno sviluppabili in serie ordinate per le potenze di

$$z = \frac{e^{\frac{\pi t}{2r}} - 1}{e^{\frac{\pi t}{2r}} + 1}$$

e lo sviluppo sarà valido per tutti i valori di $t$ fra $-\infty$ e $+\infty$; da cui segue il teorema:

*Se la forza viva iniziale, nel moto spontaneo di un sistema a caratteristiche indipendenti d'ordine* $\nu$ *è* $\frac{1}{2}T_0$, *le caratteristiche potranno esprimersi in funzione del tempo mediante serie di potenze di*

$$z = \frac{e^{2\pi\nu^2 A\sqrt{T_0}t} - 1}{e^{2\pi\nu^2 A\sqrt{T_0}t} + 1}$$

*essendo* A *una quantità più grande delle* $|a_{sk}^{(r)}|$.

*I coefficienti si calcoleranno con operazioni razionali da eseguirsi sui valori iniziali delle* $p_i$ *e sui coefficienti* $a_{sk}^{(r)}$.

Questo teorema mostra che la questione della determinazione effettiva delle caratteristiche per ogni valore del tempo è completamente risoluta.

# *Le speculazioni di Giovanni Benedetti sul moto dei gravi;*

Nota del Dott. GIOVANNI VAILATI.

> Benedetti dont le nom est à peine prononcé aujourd'hui en Italie doît être placé au premier rang des savants du XVI^me siècle.
>
> (LIBRI, *Hist. des sciences mathém. en Italie*, IV, 31).

§ 1°.

Tra quelli che più efficacemente cooperarono a preparare e render possibile quella gran rivoluzione scientifica che è segnata dalla scoperta delle leggi fondamentali del moto, Giovanni Benedetti (nato a Venezia nel 1530, morto a Torino nel 1590) occupa un posto affatto speciale.

La parte da lui avuta nella prima elaborazione delle teorie e dei concetti che stanno a base della dinamica moderna, rappresenta un contributo di natura totalmente diversa da quello che, alla costituzione della nuova scienza, portarono gli altri predecessori immediati di Galileo.

Il suo merito non consiste nell'avere, come Leonardo da Vinci, allargato in nuove direzioni il campo delle ricerche sperimentali, o nell'avere, come Tartaglia, intuita l'importanza teorica e iniziata l'indagine scientifica dei nuovi fatti, sconosciuti agli antichi, che l'introduzione delle armi da fuoco aveva messo a disposizione dei nuovi investigatori, ma bensì nell'avere, forse per il primo, avuto chiara coscienza, oltre che dell'insufficienza radicale e dei difetti irrimediabili delle teorie universalmente accettate sull'autorità di Aristotele, anche della direzione in cui si doveva procedere, e in cui si è più tardi effettivamente proceduto, per foggiarne altre migliori e degne di esser messe al posto di quelle.

Se allo sviluppo delle teorie scientifiche è applicabile quella osservazione che il Comte fa a proposito delle vicende delle istituzioni politiche e sociali, che cioè non si riesce mai a distruggere veramente se non quello che si riesce a surrogare e a sostituire con qualche cosa che soddisfi ad analoghi bisogni e ad analoghe esigenze, il Benedetti merita di esser collocato tra quelli che maggiormente contribuirono ad abbattere gli ostacoli opposti al progresso della scienza, dalla servile accettazione delle teorie e dei postulati della fisica peripatetica.

Della vita del Benedetti pochissime notizie ci sono rimaste. Nel *Tractatus Astrologicus* (Venetiis, 1552) del suo contemporaneo Luca Gaurico, si trova, sotto la figura genetliaca che lo riguarda, riportato il seguente cenno biografico (pag. 73):

" Johannes Baptista de Benedictis in urbe Veneta natus " et educatus a suo genitore, hispano, philosopho et physico, " antequam XVIII$^{m}$ aetatis suae expleret annum evasit philo- " sophus, musicus atque mathematicus. Et hanc coelestem figuram " ipsemet supputavit „.

La prima opera da lui pubblicata è una raccolta di problemi geometrici risoluti coll'aiuto d'una sola apertura di compasso. Essa porta il titolo:

*De resolutione omnium Euclidis problematum aliorumque, una tantummodo circini apertura* (Venetiis, 1553).

Risulta dalla prefazione che l'autore fu istradato allo studio della Geometria da Nicolò Tartaglia e che, pur essendosi dedicato con grande amore fin da ragazzo a ricerche scientifiche, egli non seguì alcun corso di publici studî (1).

La detta prefazione, che è scritta in forma di lettera all'abate Gabriele di Guzman, contiene pure un lungo passo che

---

(1) *Scientiis eam* [*vitam*] *placuit a teneris unguiculis consecrare atque huc hucusque progressus sum, Deo duce, sine monitore praeceptoreque ullo, nullum gymnasium unquam, nullamque scholam frequentari neque haec studia quod vulgus solet, sed (absit verbo arrogantia)* [*nec*] *pro tempore in scholis transacto eruditionem aestimare ac septennario finito finem studiis imponere, sed dum vivo illa prosequi. Id igitur quidquid est, tenue licet sit, uti alias quoque scientias, marte meo consecutus sum, nemine praeeunte. Caeterum, quia cuique quod suum est reddi debet, nam pium et iustum est, Nicolaus Tartaleas mihi quattuor primos libros Euclidis solos legit, reliqua omnia, privato labore et studio investigavi; volenti namque scire nihil est difficile* (Prefat.).

testifica come già fin d'allora il Benedetti avesse avuto occasione di occuparsi di ricerche sul moto dei gravi.

Le considerazioni che precedono e seguono tale passo, ci indicano espressamente quali fossero le ragioni che spinsero il Benedetti ad esporre sommariamente ivi il risultato di tali sue ricerche, non ostante la loro completa eterogeneità con quelle alla cui esposizione l'intero libro è dedicato (1).

Agli studi intrapresi e continuati dal Benedetti sul moto dei gravi (e anche ad opuscoli pubblicati da lui su questo argomento) è pure fatta allusione nella prefazione, all'opera sulla costruzione degli orologi solari, da lui pubblicata vent'anni più tardi (2) a Torino, ove nel frattempo era venuto a stabilirsi e

---

(1) *Olim cum una essemus magno me opere orasti obsecratusque es aliqua de motibus naturalibus, speculatione sollicita conscriberem, idem, quantum est possibile, Mathematicis demonstrationibus muniens. Iusta cum obnixe precatus sis, libens humeros tanto supposui oneri. Igitur mense Septembri transacto, ruri existens, ne tumultus urbani amicorumque frequentia (quibus ubi res vocat operam dare inhonestum indecorumque sit) animum in diversa traherent, commisi animum altissimis speculationibus Philosophiae naturalis, Mathematicae et aliis id genus scientiis et, ne in vacuum currerem mensque fine suo frustraretur et petitioni tuae satis fieret, tres libros (Domino ita cooperante) composui. Unum opus continens demonstrationes multorum secretorum naturalium et Mathematicorum; hunc edere brevi tempore mens non est, cum in dies aliquid illi adhuc quae deerant accedit; de secundo opere non dico, nam hoc, si fors ita tulerit, sub praelum dari et brevi etiam poterit. Tertium coram cernis, tuo nomine consecratum. In primo autem volumine, quod a me efflagitasti conclusi. Caeterum quin animus non est id evulgare ob rationes assignatas, quantum brevibus resolvam. Haec libentius ad te privatim scripsissem quam publice evulgassem nisi (quod saepius accidere videmus) interceptionem literarum timuissem, ne, ille, quisquis tandem fuisset, et nomine suo aut alicuius suorum, in lucem hanc demonstrationem edidisset et ego oleum et operam perdidissem, prout multis aliis nostroque saeculo accidit. Est siquidem genus quoddam hominum, fucos vocant, qui praedicari magnique fieri gaudent sed labores fugiunt, gloriam maximo et labore et sudore alieno partam per fas nefasque in sese transmoventes; eam ob causam coactus sum ea ita ut cernis edere, nimirum cum volumen, de quo dixi, evulgandi nunc animum non sit, in quo multa alia maiora his contineantur.*

(2) L'opera porta il titolo: *De gnomonum umbrarumque solarium usu liber; ad Sereniss. Emanuelem Philibertum Allobr. et Subalp. Ducem invictiss. Augustae Taurinorum 1574, apud haeredes Nicolai Bevilaquae.*

A Torino egli pubblicò pure i seguenti due opuscoli:

1) *Consideratione di Gio. Battista Benedetti filosofo del Serenissimo Duca di Savoia, d'intorno al discorso della grandezza della terra e dell'acqua*

dove rimase per la rimanente parte della sua vita al servizio del Duca di Savoia.

Ivi egli si sfoga in amare invettive contro un tal Taisnerius, che a quanto pare aveva qualche anno prima riprodotto integralmente, pubblicandolo come roba sua, un trattatello sulle " proporzioni dei moti locali ", pubblicato dal Benedetti a Venezia anteriormente al 1554:

Johannes Taisnerius Hannonius opusculum nostrum demonstrationis motuum localium contra Aristotelem et alios philosophos, jamdiu a nobis editum et iterum impressum Venetiis anno salutis 1554, ita integrum sibi desumpsit ut nihil praeter auctoris nomen immutaverit (1).

L'opera principale del Benedetti è quella che porta il titolo: *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber* (1585) da lui pubblicata a Torino (2) cinque anni prima della sua morte.

---

*dell'Eccellent. Sig. Antonio Berga filosofo nella Università di Torino* (presso gli eredi Bevilacqua, 1579).

2) *Lettera per modo di discorso all'Illustre Sig. Bernardo Trotto intorno ad alcune nuove riprensioni ed emendationi contro alli calculatori delle effemeridi* (Ibid., 1581).

(1) *Quid enim mutavisset*, prosegue il Benedetti, *qui nec percipere poterat quae in ea disputatione continerentur, homo vanus, ab omni mathematica facultate alienus, qui merito propter crassissimam ignorantiam verebatur ne, vel aliqua syllaba sublata vel addita, totius tractationis inficeretur substantia. Credidit, ut opinor, me jam vita functum, qui furti nunquam argui posse confidit, et non intellexit suam temeritatem, qui se ipsum mille argumentis qualis esset prodidit.* Sulla vita di questo impudente falsario confr. Bayle (*Dictionnaire historique*, all'art. Taisnerius).

Dal Bayle sono attinte le notizie sul Benedetti date da David Clement nella sua *Bibliothèque curieuse, historique et critique des livres difficiles à trouver* (Göttingen 1752, art. Benedetti, pag. 130). Il Clement dopo aver osservato che: *M.r Bayle est le premier qui ait fait connaître cet auteur*, aggiunge: *Je ne sais comment notre auteur* [*Benedetti*] *a pu rester si caché après avoir écrit diverses traités qui devoient attirer sur lui quelque réputation dans la république des lettres. Giacomo Alberici n'en dit pas un mot dans son catalogue Degli illustri italiani veneziani. G. H. Vossius n'en parle pas dans son traité De Scientiis mathematicis. M.r le chevalier de Wolf n'a pas trouvé à propos de le nommer dans sa Commentatio de praecipuis scriptis mathematicis, ni I. Fredr. Weidlerus dans son Historia Astronomica etc.*

(2) La lettera dedicatoria comincia: *Carolo Emanueli, Sabaudiae duci etc.*,

Essa è divisa in sei parti, due delle quali (cioè la terza: *De Mechanicis* e la quarta: *Disputationes de quibusdam placitis Aristotelicis*) sono dedicate ad esporre, sotto la loro forma più matura ed elaborata, le idee dell'autore sulla meccanica.

Io mi propongo di riunire qui, distribuendole nell' ordine più atto a dare un chiaro e preciso concetto della loro portata, quelle tra le idee esposte in esse, o sparse negli altri scritti del Benedetti, che mi sembrano atte a caratterizzare lo stadio di sviluppo della dinamica rappresentato dalle sue speculazioni e a metter in luce i punti d'attacco di queste, da una parte con quelle dei filosofi e " fisiologi „ greci, e dall'altra colle vedute in seguito adottate da Galileo e dai suoi successori (1).

## § 2°.

Le prime ricerche del Benedetti, su questioni relative al moto dei corpi, si riferiscono all'analisi delle circostanze da cui

---

*Agitur nonusdecimus annus ex quo, literis serenissimi patris tui Celsitudinis arcessitus, ex urbe Parmensi, in hanc me civitatem* (Torino) *contuli. Is advenientem tam humane excepit, tanta deinde liberalitate fuit complexus ... ut sub ejus ditione quod superesset vitae agere constituerem.*

(1) I primi a segnalare alla debita attenzione degli studiosi di Storia della meccanica, i preziosi dati che le opere del Benedetti contengono per la determinazione delle fasi embrionali di sviluppo della dinamica moderna, furono il Libri (*Histoire des sciences mathématiques*, Paris, 1838, t. III) e lo Whewell (*History of inductive Sciences*, London, III edit., 1851, vol. II, pag. 17, 18). I suoi meriti furono, in seguito, riconosciuti dalla maggior parte degli autori che si occuparono di quel periodo di storia della meccanica che precede immediatamente le scoperte di Galileo: per es. dal Poggendorf (*Geschichte der Physik*, 1879), dal Dühring (*Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik*, 1874), e tra gli italiani in primo luogo dal Caverni nella sua *Storia del metodo sperimentale in Italia* (1890...). Nessuno di questi mi sembra tuttavia aver basato i suoi apprezzamenti su un esame tanto profondo e competente degli scritti del Benedetti, come il Wohlwill, nel suo diligentissimo saggio sulla scoperta della legge d'inerzia (*Die Entdeckung des Beharrungs Gesetzes*) pubblicato nella " Zeitschrift für Völkerpsychologie und Sprachwissenschaft „, Bd. 14, 15 (1883-4). Val la pena di porre in contrasto il giudizio di quest'ultimo, che non esita a qualificare il Benedetti come " *der bedeutendste* „ tra i predecessori immediati di Galileo, colle espressioni di poca stima pel Benedetti che si trovano negli scritti dei suoi contemporanei, per es. nella " Cronaca dei matematici „ di B. Baldi (Ed. Boncompagni, pag. 140).

dipende il diverso modo di comportarsi di gravi, che scendono liberamente attraverso a mezzi di differente densità.

L'opinione, enunciata da Aristotele (1), che due gravi eguali di peso e di forma che cadono, partendo dalla quiete, in due diversi mezzi, si muovano in ogni istante con velocità inversamente proporzionali alla densità dei mezzi in cui discendono, è dal Benedetti dichiarata erronea e combattuta facendo appello, da una parte ai principî stabiliti da Archimede nei suoi scritti sull'idrostatica e dall'altra alla proposizione, assunta dal Benedetti come postulato fondamentale, che, a parità di ogni altra condizione, le velocità assunte in eguali intervalli di tempo da un grave che scenda rispettivamente in due mezzi di differente densità, sono proporzionali agli sforzi che sarebbe necessario applicare al grave stesso per sostenerlo, quando sia immerso nell'uno e nell'altro dei detti mezzi (velocitatem motus naturalis alicuius corporis gravis in diversis mediis, proportionatam esse ponderibus eiusdem corporis in iisdem mediis) *Speculat.*, pag. 169.

È importante notare la sostanziale identità di questo postulato con quello, riferentesi al rapporto delle velocità assunte in dati intervalli di tempo da un grave che scenda lungo due piani diversamente inclinati, che si trova enunciato nel frammento *de ponderibus* attribuito a Jordano Nemorario, secondo il quale le dette velocità stanno tra loro nello stesso rapporto degli sforzi che sarebbe necessario applicare al grave per sostenerlo, quando sia posato in quiete sull'uno e sull'altro dei piani considerati (2).

Il principio che trova espressione in ciascuno dei suddetti postulati, costituisce forse la prima proposizione, esattamente vera e quantitativamente definita, che sia stata enunciata come

---

(1) Aristot., *Physica*, IV, 8.

(2) *Graviora secundum situm velocius descendere.* Si noti che questa frase non cessa di esprimere una proposizione vera (sebbene affatto diversa da quella sopra indicata) anche se col " *velocius descendere* " s'intenda alludere alle *discese virtuali* del grave, in corrispondenza a un suo dato spostamento sull'uno e sull'altro dei piani inclinati in questione. Cfr. a tal proposito la la mia Nota: *Sul principio dei lavori virtuali da Aristotele ad Erone d'Alessandria* (" Atti Accademia delle Scienze di Torino ", vol. XXXII).

una legge del moto (nel senso dato da Newton a questa denominazione).

Mentre tale principio si può considerare come coincidente con quella legge fondamentale della dinamica, che figura come la seconda nella classica esposizione di Newton (1), l'applicazione che di esso fa il Benedetti ci fornisce il primo esempio di riduzione d'una questione di dinamica a una questione di statica, e costituisce in certo modo nella Storia della Meccanica il primo anello d'una catena, l'altro estremo della quale è rappresentato dal principio di d'Alembert.

L'argomento di cui si serve il Benedetti per dimostrare la falsità della sopracitata opinione d'Aristotile, consiste nell'osservare come le spinte all'insu che il grave, immerso rispettivamente nell'uno e nell'altro, dei mezzi considerati, subisce in virtù del principio d'Archimede, non sono tali da permettere che, in generale, tra il " peso " che gli rimane in un caso e quello che gli rimane nell' altro sussista quella proporzionalità inversa alla densità dei due mezzi che, in virtù del postulato sopra enunciato, è richiesta perchè tra la densità dei due mezzi e le velocità assunte in un dato intervallo di tempo, dal grave che discenda in essi, abbia luogo la relazione che Aristotile afferma:

Si pondus totale alicuius corporis gravis significatum erit ab AI, quo corpore posito in aliquo medio [quod] minus denso quam ipsum sit (quia in medio se densiore si poneretur, non grave esset sed leve, quemadmodum Archimedes ostendit) illud medium subtrahat partem EI, unde pars AE eiusdem corporis libera maneat, et posito deinde eodem corpore in aliquo alio medio densiore, minus tamen densum quam ipsum sit corpus, hoc medium subtrahat partem UI dicti ponderis, unde pars AU

(1) *Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul et semel, sive gradatim et successive, impressa fuerit* (Newton, *Principia, Introduct.*). Essa è così parafrasata dal Cotes, nella prefazione alla 2ª edizione (1713): *Spatia rectilinea quae, a corporibus e quiete demissis, dato tempore describuntur, ubi a viribus quibuscunque urgentur, proportionalia sunt ipsis viribus.*

eiusdem corporis remanebit: Dico proportionem velocitatis eiusdem corporis per medium minus densum, ad velocitatem eiusdem per medium magis densum, futuram ut AE ad AU, ut est etiam rationi consonum magis quam si dicamus huiusmodi velocitates esse ut UI ad EI, cum velocitates a virtutibus moventibus solum (cum figura una eademque in quantitate qualitate situque erit) proportionentur (Ibid., 170).

Nè il Benedetti omette di domandarsi se possa esistere qualche caso particolare in cui la legge formulata da Aristotile conduca a risultati conformi al vero, ed egli osserva che, perchè ciò avvenga, occorre e basta che la densità del corpo cadente sia eguale alla somma delle densità dei due mezzi attraverso ai quali cade:

Possibile est in rerum natura corpus aliquod huiusmodi densitate praeditum reperiri, ut velocitas eius motus naturalis per aerem, velocitati per aquam ita proportionata existat, ut est densitas aquae, densitati aeris. Densitas aquae notetur exempli gratia per UI, et ea quae aeris est per EI, et pondus alicuius corporis in aere per EA, et pondus eiusdem corporis in aqua per UA, ita tamen quod eadem proportio sit EA ad UA ut UI ad EI; unde, per ultimam suppositionem praecedentis capitis (id est proportionem velocitatum unius corporis per diversa media eandem esse cum ea quae est ponderum dicti corporis in iisdem mediis), proportio velocitatis praedicti corporis per aerem, proportioni eiusdem corporis per aquam erit ut EA ad UA ergo ut UI ad EI (Ibid.).

## § 3°.

L'esempio testè citato, che non è del resto il solo nel quale il Benedetti istituisca confronti tra le velocità di gravi che scendano rispettivamente nell'aria e nell'acqua, ci fornisce pure una prova sicura di un altro fatto che ha notevole importanza storica. Esso ci testifica che il Benedetti considerava l'aria come

un corpo pesante e capace, per ciò appunto, di comunicare ai corpi in essa situati una spinta verso l'alto, analoga a quella che subiscono i corpi immersi in un liquido.

A lui va attribuito il merito d'aver preceduto Galileo nel sostenere questa idea di fronte a quella della maggior parte dei fisici suoi contemporanei, pei quali la distinzione assoluta tra corpi " pesanti „ e corpi " leggeri „, costituiva ancora un dogma indiscutibile.

Occorre tuttavia tener presente che il Benedetti, in ciò, più che un novatore o introduttore di concetti originali, va considerato come un restauratore di teorie già note ai filosofi greci (1).

A lui non poteva esser ignoto quel passo di Simplicio, nel Commento al *de Caelo* di Aristotile, nel quale l'opinione che per spiegare il modo di comportarsi dei corpi, che come il fumo o il fuoco si sollevano spontaneamente nell'aria, non fosse necessario ricorrere all'ipotesi d'una speciale tendenza in essi a salire, omologa a quella che altri corpi hanno a discendere, e che essi pure discenderebbero se ciò potesse avvenire senza che nello stesso tempo venisse spostato un volume d' aria rappresentante un peso maggiore, è attribuita ai fisici della scuola di Democrito:

Οἱ περὶ Δημόκριτον οἴονται πάντα μὲν ἔχειν βάρος, τῷ δὲ ἔλαττον ἔχειν βάρος τὸ πῦρ ἐκθλιβόμενον ὑπὸ τῶν λαμβανόντων ἄνω φέρεσθαι καὶ διὰ τοῦτο κοῦφον δοκεῖν (SIMPLICI, *Comm. in Aristot. de Caelo*, Berlin, 1894, Ed. Heiberg, 712, 8).

Risulta di più da un altro passo di Simplicio, come a queste stesse idee, perfettamente coincidenti colle nostre e con quelle del Benedetti, e assolutamente opposte a quelle che i fisici contemporanei di quest'ultimo appoggiavano all'autorità d'Aristotile, era già giunto quello, degli immediati discepoli e successori di

(1) Lo stesso si dica delle sue osservazioni sulle cause dei venti (*Divers. specul.*, pp. 417). Cfr. l'opinione attribuita ad Anassagora da Diogene Laerzio (II, 4): Ἀνέμους γίνεσθαι λεπτυνομένου τοῦ ἀέρος ὑπὸ τοῦ ἡλίου. Maggiore originalità spetta invece forse alla spiegazione che il Benedetti dà del modo d'agire del torchio idraulico (*Speculat.*, pag. 287-8), benchè in essa si ricorra ai principi dell' idrostatica d'Archimede. Sarebbe interessante sapere se l'opera del Benedetti venne a cognizione di Stevin e di Pascal.

Aristotile stesso, che si dedicò in modo speciale a ricerche sui fenomeni naturali, cioè Stratone di Lampsaco, sopranominato il " fisico „: ταύτης δὲ γεγόνασι τῆς δόξης [ὅτι τῇ ὑπ' ἀλλήλων ἐκθλίψει βιαζόμενα τὰ κοῦφα κινεῖται] Στράτων τε καὶ Ἐπίκουρος (1), πᾶν σῶμα βαρύτητα ἔχειν νομίζοντες καὶ πρὸς τὸ μέσον φέρεσθαι, τῷ δὲ τὰ βαρύτερα ὑφιζάνειν τὰ ἧττον βαρέα ὑπ' ἐκείνων ἐκθλίβεσθαι βίᾳ πρὸς τὸ ἄνω, ὥστε, εἴ τις ὑφείλῃ τὴν γῆν, ἐλθεῖν ἂν τὸ ὕδωρ εἰς τὸ κέντρον, καὶ εἴ τις τὸ ὕδωρ τὸν ἀέρα, καὶ εἰ τὸν ἀέρα τὸ πῦρ (Simplicii *in Aristotelis de Caelo commentaria,* Ed. Heiberg, 267-8).

Del che troviamo conferma anche in un altro passo conservatoci da Stobeo, nel quale si riporta come Stratone affermasse che " tutti i corpi sono per natura pesanti e che quelli che, come per es. il fuoco, sono più leggeri del mezzo che li avvolge, tendono a portarsi alla superficie (ἐπιπολάζειν) a causa della pressione che tale mezzo esercita su di essi, come avviene di un nocciolo lubrico che si spinga verso l'alto premendolo fortemente tra le dita (ἐκπυρηνιζόμενον) „.

Allo stesso modo il Benedetti, combattendo l'opinione, sostenuta dagli aristotelici, che il Sole " attiri „ i vapori col suo calore, dice: Sol nil aliud facit quam calefacere, cuius caloris ratione ea materia rarefit et, ob rarefactionem levior facta, ascendit, non quia sursum a sole feratur (*Divers. speculat.*, pag. 194).

---

(1) Cfr. pure Lucretius (*De rerum natura,* II, 185 . . .):

*Nunc locus est ut opinor in illis quoque rebus*
*Confirmare tibi, nullam rem posse sua vi*
*Corpoream sursum ferri sursumque meare.*
*Ne tibi dent in eo flammarum corpora fraudem.*
. . . . . . . . . . . . .
*Nec cum subsiliunt ignes ad tecta domorum*
*Et celeri flamma degustant tigna trabesque*
*Sponte sua facere id sine vi subeunte putandum est.*
. . . . . . . . . . . . . . .
*Nonne vides etiam quanta vi tigna trabesque*
*Respuat humor aquae?* . . . . .
. . . . . . . . . . . .
*Sic igitur debent flammae quoque posse per auras*
*Aeris expressae sursum succedere quamquam*
*Pondera, quantum in se est, deversus ducere pugnent.*

## § 4°.

Ma alle ricerche suesposte relative alle velocità assunte da uno stesso grave, che discenda in mezzi di differente densità, non si arresta il Benedetti. Egli ne fa seguire ad esse altre, riguardanti il modo di comportarsi di gravi, differenti di forma e di peso, che discendano in un mezzo di densità data.

Egli afferma anzitutto, basandosi sugli stessi principî di cui s'è parlato antecedentemente, che il rapporto tra le velocità, assunte in eguali intervalli di tempo, da due gravi composti di diverse quantità della stessa materia, allorquando scendano in mezzi di differente densità, si mantiene costante: Quod duo corpora inaequalia eiusdem materiae, in diversis mediis, eandem velocitatis proportionem retinebunt (pag. 173).

Di qui è condotto ad adottare, in opposizione alla credenza fino a lui dominante, quell'opinione che parecchi anni più tardi Galileo riaffermava, qualificandola ancora come " nuova e remota dal verosimile „ (*Dialoghi di due scienze nuove,* ed. Alberi, vol. XIII, 77), che cioè il peso non abbia alcuna parte, nel caso considerato, alla determinazione delle velocità colle quali i gravi cadono.

L'opinione basata sull'autorità d'Aristotile, che, a parità di ogni altra circostanza, i gravi tendano a cadere, in un mezzo di data densità, con velocità in ogni istante proporzionali ai loro pesi, è certamente troppo contraria alle più ovvie esperienze e troppo atta a portare conseguenze assurde, perchè si possa credere che essa non abbia assai prima del Benedetti trovati contradditori e confutatori.

Non varrebbe quindi quasi la pena di citare il seguente passo, tratto da un'opera pubblicata solo quarant'anni prima di quella del Benedetti (*Questioni dell'Alchimia*, di Benedetto Varchi, 1554), dal quale risulta come da altri fisici a lui anteriori, essa fosse già stata rigettata come non conforme all'esperienza:

" E sebbene il costume dei filosofi moderni, è di creder
" sempre e non provar mai tutto quello che si trova scritto

" nei buoni autori, non è però che non fusse e più sicuro e
" più dilettevole fare altrimenti e discendere qualche volta al-
" l'esperienza, in alcuna cosa come, verbi gratia, nel movimento
" delle cose gravi, nella qual cosa Aristotile e tutti gli altri
" filosofi, senza mai dubitarne, hanno creduto e affermato che,
" quanto una cosa sia più grave, tanto piuttosto discenda,
" il che la prova manifesta non esser vero. E se io non temessi
" d'allontanarmi troppo dalla proposta materia, mi distenderei
" più lungamente in provar questa opinione, della quale ho tro-
" vato alcuni altri e massimamente il Rev. Padre non men dotto
" filosofo che buon teologo Fra Francesco Beato metafisico di
" Pisa e Messer Luca Ghini medico semplicista „ (V. la citazione nel *Libri-Histoire des sciences mathématiques,* III, 200).

Ma altrettanto non si può dire dell' opinione che consiste, non solo nel negare la proporzionalità delle velocità ai pesi, ma nell'*affermare la completa indipendenza* delle velocità dei gravi dal peso loro.

La prima enunciazione di questa legge fondamentale, per quella parte almeno che riguarda il confronto tra gravi costituiti da diverse quantità di eguale materia. spetta incontestabilmente al Benedetti, ed è importante notare come le ragioni che egli adduce per provarla, coincidono perfettamente con quelle dalle quali Galileo, un quarto di secolo più tardi, asserì esser stato condotto alla stessa scoperta (1). Ecco le parole del Benedetti:

Quod in vacuo corpora eiusdem materiae aequali velocitate moverentur.

Quod supradicta corpora in vacuo naturaliter pari velocitate moverentur, hac ratione assero: Sint enim duo corpora O et G omogenea, et G sit dimidia pars ipsius O. Sint alia quoque duo corpora A et E, omogenea primis, quorum quodlibet aequale sit ipsi G, et imaginatione comprehendamus ambo posita in extremitatibus alicuius lineae, cuius medium sit I. Clarum erit tantum pondus ha-

(1) Su questo soggetto, ho già avuto occasione di esporre qualche considerazione, nel mio recente saggio: *Sul metodo deduttivo come strumento di ricerca* (Torino, Roux, 1898), pag. 14-5.

biturum punctum I quantum centrum ipsius O, quod I, virtute corporis A et E, in vacuo eadem velocitate moveretur qua centrum ipsius O. Cum autem disjuncta essent dicta corpora A et E a dicta linea, non ideo aliquo modo suam velocitatem mutarent, quorum quodlibet esset quoque tam velox quam est G. Igitur G tam velox esset quam O (1).

Da analoghe considerazioni è portato il Benedetti ad ammettere che, anche in un mezzo denso e resistente, corpi di diverso peso e di egual materia si muovono con ugual velocità, ogniqualvolta le resistenze e le spinte che essi subiscono dal mezzo siano proporzionali ai loro pesi (Corpora licet inaequalia eiusdem materiae et figurae, si resistentias habuerint ponderibus proportionales, aequaliter movebuntur. Quia pondum I tam velox esset ut centrum ipsius O, cum a tanto pondere I motus esset quanto centrum ipsius O . — . et corpora A, E tam separata quam coniuncta eandem velocitatem retinerent (Ibid.).

## § 5°.

Ma se nelle questioni che si riferiscono al confronto tra il modo di comportarsi di gravi di differente peso, ma di ugual densità, il Benedetti arriva a conclusioni perfettamente corrette e determinate, lo stesso non si può dire di quelle che si riferiscono alle velocità di gravi costituiti di materie diverse e di

---

(1) *Divers. speculat.*, pag. 174-5. Si noti che già nell'altro suo scritto: *De resolutione etc.* pubblicato trent'anni prima a Venezia (1553), si trova enunciata la proposizione: “ Si fuerint duo corpora ejusdem formae, ejus-“ demque speciei, *aequalia invicem vel inaequalia*, per aequale spatium in “ eodem medio in eodem tempore ferentur „ (Praefat.).

differente peso specifico. Se si eccettuano alcune osservazioni (1) che hanno valore, sopratutto in quanto sono dirette a far constatare la falsità di determinati principî od opinioni, sostenute dai partigiani della fisica aristotelica, egli non solo non arriva ad alcuna nuova conclusione, ma non evita neppure di cadere in errori non meno gravi di quelli che combatte.

Tra questi il più fondamentale, e al quale tutti gli altri si riattaccano, è quello che consiste nell'affermare che anche per corpi di differente densità, le velocità assunte, in egual intervallo di tempo, da due di essi, di egual volume e figura, che cadano attraverso a uno stesso mezzo, stiano tra loro nello stesso rapporto degli sforzi necessarî per sostenere i detti gravi, quando si immergano nel mezzo considerato (proportionem velocitatum duorum corporum heterogeneorum, sed similium figura et magnitudine aequalia, aequalem esse proportioni ponderum ipsorum (*Divers. speculat.*, pag. 170).

Sebbene non sia prudente (secondo l'acuta osservazione del Batteux, che chi si occupa di studî critici sulla storia delle scienze non dovrebbe mai perdere di vista) attribuire, ad autori non moderni, quelle che a noi sembrano conclusioni immediate delle premesse che essi enunciano, o premesse necessarie delle conclusioni a cui essi giungono, pure mi sembra difficile imaginare che il suddetto ed altri errori analoghi del Benedetti, su questo soggetto, possano provenire da altra causa che dalla credenza (da lui veramente non mai enunciata in modo esplicito) che, a parità di altre condizioni, le velocità di due gravi cadenti, stiano tra loro in ogni istante, nello stesso rapporto dei loro pesi specifici. L'attribuire tali errori all'assenza d'un concetto ben definito della " massa „ e dei suoi rapporti col peso, è certamente il modo più naturale, se non di spiegarli, almeno di caratterizzarli e qualificarli (2).

---

(1) Per esempio la seguente: *Maior est proportio ponderis corporis densioris ad pondus corporis minus densi, in mediis densioribus, quam sit eorumdem corporum in medio minus denso.*

*Sequitur proportionem velocitatum duorum corporum heterogeneorum eandem non esse per diversa media, quod sequeretur si Aristotelis opinionem, 8 cap. lib. 4 Physicorum, reciperemus* (175-6).

(2) La dipendenza tra la " massa „ e la " quantità di materia „ è già

§ 6°.

Passerò ora a considerare il contributo portato dal Benedetti alla trattazione scientifica di un'altra classe di questioni, delle quali egli pel primo ha tentato una spiegazione, basata su ciò che ora si chiama la " legge d'inerzia ".

Comincerò col citare un passo, nel quale il Benedetti riconosce chiaramente nella tendenza che manifestano le parti d'un corpo, che ruoti rapidamente intorno ad un asse, ad allontanarsi dal detto asse, un semplice caso particolare della persistente tendenza che hanno tutti i corpi in moto a proseguire il cammino secondo la tangente alla loro trajettoria.

Parlando della tensione che sente la mano di chi volga in giro una frombola, e dell'accrescersi di tale tensione coll'aumentare della velocità dell' oggetto così messo in moto, egli osserva:

Quanto magis crescit impetus in corpore, causatus ab augmento velocitatis gyri ipsius, tanto magis oportet ut sentiat se trahi manus a dicto corpore mediante fune, quia, quanto maior impetus motus corpori ipsi est impressus, tanto magis dictum corpus *ad rectum iter peragendum inclinatur,* unde, ut recta incedat, tanto maiore quoque vi trahit (*Speculat.*, pag. 161).

E altrove sullo stesso soggetto (pag. 287): quodvis grave corpus, aut per *naturam* aut per *vim* motum, *rectitudinem itineris naturaliter* appetit. Quod clare cognoscere possumus projicendo lapides funda et circumducentes brachium, nam funes tanto maius pondus acquirunt et manus tanto magis onerant quanto velocius volvitur funda et incitatur motus quod ab appetitu naturali insito ei corpori per lineam rectam progrediendi procedit (pag. 287).

---

riconosciuta da Aristotile, ma solo per quanto riguarda il confronto tra corpi di egual materia: ἐν τῷ ἴσῳ χρόνῳ, ἡ ἴση δύναμις τὸ ἥμισυ διπλασίαν κινήσει (*Physica*, VII, 5).

Di ritornare su questo stesso concetto gli dànno pure occasione le considerazioni che svolge a proposito del moto d'un disco orizzontale girevole intorno al suo centro:

Quaelibet pars corporea quae a se movetur impetu, eidem a qualibet extrinseca virtute movente impresso, habet *naturalem inclinationem ad rectum iter, non autem curvum,* unde, si a dicta rota particula aliqua suae circumferentiae disjungetur, absque dubio *per aliquod temporis spatium* pars separata *recto itinere* ferretur per aerem, ut, exemplo a fundis quibus jaciuntur lapides sumpto, cognoscere possumus in quibus impetus motus impressi, naturali quadam propensione, rectum iter peragit, cum evibratus lapis *per lineam rectam contiguam gyro quem primo faciebat in punto quo dimissus fuit,* rectum iter instituat, ut rationi consentaneum est (1).

Giova osservare che mentre ci sono stati conservati parecchi passi, tratti da opere perdute di filosofi greci, nei quali la propensione delle parti d'un corpo rotante a staccarsi o come essi dicevano ad " emigrare „ (ἀποχωρεῖν) allontanandosi dal centro o dall'asse di rotazione, è riconosciuta come atta a render ragione di determinati effetti dei moti rapidi di rotazione, pure in nessuno di essi si riscontra la menoma traccia di tentativi diretti a stabilirne la causa o a riconnetterla, come fa il Benedetti, a qualche altra proprietà più generale del movimento.

E così mentre alla considerazione di tale tendenza si fa continuamente ricorso nelle teorie dei pensatori greci sull'origine del mondo, e specialmente in quelle di Anassimandro e di Anassagora, che spiegavano mediante l'ipotesi d'un movimento vorticoso iniziale, il separarsi e l'ordinarsi degli elementi eterogenei costituenti il caos primitivo, pure essi sembrano non

(1) *Eadem quoque ratione fit ut, quanto maiore est aliqua rota, tanto maiorem quoque impetum et impressionem motus eius circumferentiae partes recipiant, unde saepe evenit ut, dum eam sistere volumus, id cum labore et cum difficultate agamus, quia quanto maior est diameter unius circuli tanto minus curva est eiusdem circumferentia..... Unde earumdem partium dictae circumferentiae motus ad inclinationem sibi a natura tributam, quae est incedendi per lineam rectam, magis accedit* (159).

essersi mai dimandati, a quale causa dovesse alla sua volta essere attribuita tale efficacia " segregatrice ", posseduta da movimenti di rotazione (1). Essi la considerano come un effetto naturale di tali moti, o un loro carattere specifico, primordiale. Per adoperare il linguaggio moderno, essa costituiva per loro una delle leggi fondamentali del moto, qualche cosa cioè che, piuttosto che richiedere delle spiegazioni, era suscettibile di fornirne.

A nessuno di essi insomma si presentò mai, come al Benedetti, l'idea che tale proprietà non fosse che una semplice conseguenza di un'altra proprietà assai più generale dei corpi in moto, della tendenza cioè che essi in ogni istante manifestano, a proseguire il loro moto in direzione costante.

Ciò non ha tuttavia impedito a quelli tra i filosofi greci che si spinsero più avanti nello studio dei fenomeni naturali, di applicare correttamente tale proprietà dei moti rotatori, da essi ammessa come un dato sperimentale non ulteriormente analizzabile, alla spiegazione di altri fenomeni meccanici più complicati. Alcuni di essi giunsero perfino a conclusioni che costituiscono certamente qualche cosa di più che un vago presentimento delle idee moderne sulla causa dei moti celesti.

In un interessante passo del *De coelo* di Aristotile è attribuita ad Empedocle l'opinione che gli astri non " cadano ", non ostante il loro peso, per la stessa ragione per cui non si versa l'acqua contenuta in un secchio che sia volto in giro rapidamente a modo di fionda (2).

Un'opinione analoga è pure attribuita ad Anassagora, del quale si racconta che a proposito di un meteorite, abbia espresso la sua credenza che tutto il cielo fosse ripieno di simili massi, e che questi e insieme ad essi anche gli astri cadrebbero, se alla loro caduta non si opponesse il rapido moto di rotazione dal quale essi sono animati (3).

---

(1) Nella teoria cosmogonica esposta nel *Timeo* di Platone, si fa uso a questo proposito del paragone del ventilabro. Cfr. anche Diels, *Doxographi graeci*, 408.

(2) Cfr. Plutarco, *De facie in orbe lunae:* τῇ μὲν σελήνῃ βοήθεια πρὸς τὸ μὴ πεσεῖν, ἡ κίνησις αὐτή.

(3) Jacobi, in una sua opera giovanile sulla storia della scienza greca (*Untersuchungen über das mathematische Wissen der Griechen*), si ferma a

§ 7°.

Ma non è solo di quella parte della legge d' inerzia che attribuisce ai corpi in moto la tendenza a proseguire il loro corso in direzione costante, che il Benedetti ha fatto uso come d'un principio atto a render ragione di fenomeni meccanici, che prima di lui erano ritenuti come " naturali „ e non bisognevoli di spiegazione.

Più importanti ancora sono le applicazioni da lui fatte dell' altra parte della stessa legge, riguardante la persistenza della velocità (1) comunque acquistata da un mobile, quando anche cessino d'agire le cause che l'hanno determinata, ed egli è il primo che abbia ricorso a questo principio per spiegare il fatto dell'accelerarsi del moto d'un corpo che sia soggetto alla continua azione d'una forza costante.

Prima di considerare l'applicazione che egli fa di questo principio al caso di gravi cadenti, citerò un passo nel quale egli lo applica per rendersi ragione dell'aumento della velocità angolare della frombola di giro in giro, a parità di impulsi a essa successivamente comunicati dalla mano (160): Vera ratio cur multo longius corpus aliquod grave impellatur funda quam manu, inde oritur quod, circumvolvendo fundam, maior impressio impetus motus fit in corpore gravi quam fieret manu, quod, corpus, liberatum deinde

---

considerare questa *tiefen Naturbetrachtung des Anaxagoras von dem wir nicht ohne Staunen vernehmen dass der Mond, wenn seine Schwungkraft aufhörte, zur Erde fallen würde wie der Stein in der Schleuder.* Questo passo è citato dallo Humboldt (*Kosmos*, B. III, 348), dall' opera ancora inedita di Jacobi.

(1) Tale persistenza della velocità (contrariamente a ciò che avvenne della " forza centrifuga „) era dagli antichi considerata più come un *fatto* di spiegare che non come un *principio* da adoperare alla spiegazione di altri fatti. I tentativi di Aristotile di darne ragione mediante considerazioni relative all'azione del mezzo (dicendo, cioè, che il corpo vien continuamente spinto innanzi dall'urto dell'aria che subentra dietro di lui), sono dovuti agli stessi bisogni mentali che spingono i fisici moderni ad evitare l'ipotesi delle " forze a distanza „. Cfr. Aristot., *Physica*, VIII, 10: πῶς κινεῖται ἔνια συνεχῶς, μὴ ἁπτομένου τοῦ κινήσαντος, οἷον τὰ ῥιπτόμενα.

cum fuerit a funda, natura duce iter suum, a puncto a quo prosiliit, per lineam contiguam gyro quem postremo faciebat, suscipit. Dubitandumque non est quin dicta funda maior impetus motus dicto corpori imprimi possit, cum ex multis circumactibus maior semper impetus dicto corpori accedat.

È a questo stesso accumularsi di effetti, dovuti alla continua azione di una stessa forza, che agisca prima su un corpo in riposo e poi successivamente su questo stesso corpo, già per se stesso moventesi a causa della persistenza degli effetti dovuti all'antecedente azione della forza stessa, che egli attribuisce il continuo incremento della velocità d'un grave cadente: " motus rectus dictus naturalis suam semper velocitatem adauget *ob continuam impressionem quam recipit a causa perpetuo coniuncta cum ipso corpore* quae est propensio illa naturalis eundi breviori quadam via ad locum suum " (pag. 195) (1).

La conformità stessa del punto di vista al quale si colloca il Benedetti in queste sue considerazioni, con quello dal quale noi pure siamo abituati a collocarci, in causa appunto dei successivi progressi della scienza nella direzione da lui pel primo indicata, può indurci a far troppo scarso valutamento del grado d'originalità e d'importanza che ad esse va attribuito.

Nulla può servir meglio a evitare questo pericolo quanto il porre di fronte la risposta che, come abbiamo visto, il Benedetti dà alla domanda: " perchè un grave cadendo aumenta di velocità ", con quella che alla stessa domanda è data negli scritti di quelli tra i suoi predecessori immediati, le cui ricerche relative al moto dei gravi hanno portato maggior contributo al progresso della scienza.

Basti dire che il Tartaglia non sa offrire del fatto dell'accelerarsi dei gravi altra spiegazione che la seguente:

---

(1) Il primo tentativo di applicare queste considerazioni alla deduzione della *legge* d'accelerazione dei gravi (alla cui scoperta Galileo giunse per via affatto diversa) è dovuto al Gassendi (*De motu impresso a motore translato*, pag. 66-73, Parigi, 1642). Newton attribuisce erroneamente tale deduzione a Galileo. Cfr. a questo proposito l'articolo già citato dal Wohlwill (" Zeitschr. für Volkerpsychologie u. Sprachwissenschaft ", B. 15, p. 357).

" Questo medesimo [accelerarsi] se verifica ancora in ca-
" dauno che vada verso un loco desiato, che quanto più se va
" approssimando al detto loco tanto più se va alegrando et più
" se sforza de caminare, como appare in un peregrino che venga
" d'alcun loco lontano che quando è propinquo al suo paese se
" sforza naturalmente al caminare a più potere, tanto più quanto
" più vien da lontani paesi; però il grave fa il medemo, an-
" dando verso il proprio nido che è il centro del mondo, et
" quanto più vien di lontano in esso centro tanto più a quello
" andaria veloce „ (Tartaglia, *Nova scientia,* in principio).

E analogamente, parlando della diminuzione di velocità che subisce un corpo lànciato verticalmente in su:

" Questo medesimo se verifica in cadauno che sia violen-
" temente menato verso a un luoco da esso odiato che quanto
" più se va approssimando al detto luoco tanto più se va at-
" tristando in la mente e più cerca de andar tardigando „.

A chiarire ancor meglio il contrasto tra queste idee e quelle del Benedetti, le cui opere sono state scritte meno d'un quarto di secolo dopo quella del Tartaglia, da cui ho tratto il brano sopracitato, riporterò ancora il seguente passo del Benedetti, ove il concetto che l'aumento di velocità del grave cadente sia da attribuire alla continuata azione del peso e all'accumularsi della velocità che da esso gli vien comunicata nei successivi intervalli di tempo, risulta espressa ancor più distintamente:

Impetuositas in motibus rectis naturalibus continuo crescit, cum corpus perpetuo in se causam moventem, idest propensionem eundi ad locum ei a natura assignatum, habeat. Aristoteles (*De Coelo,* I, 8) dicere non deberet quod, quanto propius accedit ad terminum *ad quem,* tanto magis sit velox, sed potius, quanto longius distat a termino *a quo*, tanto velocius existit, quia tanto maior fit semper impressio, quanto magis movetur naturaliter corpus, et continuo novum impetum recipit, cum in se motus causam contineat, quae est inclinatio ad locum suum eundi (pag. 184).

§ 8°.

Di questo modo di spiegare il crescere della velocità dei gravi cadenti, il quale pure ci sembra il più atto a presentarsi spontaneamente, non si trova traccia in alcun autore antico o moderno anteriore al Benedetti. E ciò è tanto più notevole in quantochè non mancano testimonianze attendibili che ci vietano di credere che il Benedetti sia stato il primo a proporsi tale questione come un problema da risolvere.

Mentre infatti per Aristotile il crescere della velocità d'un grave cadente, col suo avvicinarsi al punto al quale tende, era considerato come un semplice fatto di cui gli sarebbe sembrato tanto poco ragionevole il domandarsi il perchè, come sembra ora, per esempio, il domandarsi perchè sussista la legge d'inerzia, il suo commentatore Simplicio ci ha conservato un brano di un'opera, sfortunatamente perduta, del più grande astronomo greco, Ipparco (del 2° secolo a. C.), portante il titolo: *Delle cose che cadono per effetto del loro peso* (Περὶ τῶν διὰ βαρύτητα κάτω φερομένων), nella quale egli, dopo essersi appunto proposta la suddetta questione, ricorre per risolverla ad un' ipotesi che coincide perfettamente con quella alla quale 17 secoli più tardi Galileo fu condotto, e che si trova esposta nei suoi *Sermones de motu gravium*, 1592 (Ediz. Alberi, I, 1-80) e riprodotta poi nel *Dialogo di due scienze nuove* (1638).

Per Ipparco il caso più semplice da considerare, da chi si accinga ad analizzare il modo d' agire del peso come causa di movimento, è quello d'un grave lanciato verticalmente all'insù, ed egli si rappresenta il variare della sua velocità come il risultato dell'azione simultanea di due tendenze contrarie, delle quali l'una (il peso), se agisse da sola farebbe muovere il grave di moto equabile verso il basso, l'altra invece, cioè la spinta comunicata al corpo nell'atto di lanciarlo, tenderebbe a far muovere il corpo stesso dal basso all'alto con velocità decrescente (1). Il punto nel quale il grave cessa di salire e co-

(1) Di questo concetto del graduale “ esaurirsi „ dell'impulso comunicato al mobile da una forza, quando questa abbia cessato di agire su lui, dovuto all'insufficiente analisi dei dati dell'osservazione diretta e alla difficoltà che presenta la “ deduzione „ degli effetti delle resistenze, si ritrova ancora traccia in Benedetti (cfr. *Speculat.*, pag. 365); ad esso si arrestarono Leo-

mincia a discendere, è quello nel quale il decrescere di tale velocità (la quale inizialmente era maggiore di quella costante di verso opposto, di cui il corpo, per ipotesi, partecipa in virtù del proprio peso) è proceduto fino al punto di renderla uguale in grandezza a quest'ultima. A partire da tal punto il corpo comincia a discendere e discende sempre più rapidamente perchè dalla velocità costante che, per il peso essa tenderebbe ad assumere, va sottratta una velocità, sempre ulteriormente decrescente, diretta dal basso all'alto.

Dal che Ipparco conchiude che se i limiti delle nostre possibili osservazioni, non ci impedissero di seguire il moto del corpo, fino al punto nel quale l'effetto della spinta comunicatagli col lanciarlo, cioè la suddetta velocità decrescente, sia completamente esaurita, noi lo vedremmo da quel punto in avanti continuare a muoversi di moto equabile.

Passando poi al caso del corpo che cada, partendo dalla quiete senza aver subìto prima alcuna spinta all'insù, Ipparco lo assimila al precedente, osservando che anche qui v'è qualche cosa che produce effetti analoghi a quelli della spinta; v'è cioè la reazione dell'appoggio, la quale, se prima della caduta valeva a sopprimere completamente ogni effetto del peso (e comunicava quindi al grave una velocità verso l'alto eguale ed opposta a quella che il peso gli imprimeva verso il basso), quando il grave è abbandonato a se stesso agisce ancora su lui, come la spinta agiva sul grave considerato prima; la sola differenza essendo che, nel caso del grave che parte dalla quiete, la velocità diretta verso l'alto è inizialmente uguale a quella diretta verso il basso che il corpo concepisce per effetto del suo peso, dimodochè il moto ha luogo come nel caso del grave lanciato, quando in questo si consideri solo il moto che avviene a partire dall'istante in cui esso raggiunge la sua massima altezza.

In ambedue i casi il grave, se il suo moto non venisse troppo

---

nardo da Vinci e Cardano. Quest'ultimo ricorre in proposito al paragone d'un corpo che si raffredda lentamente quando venga rimosso dalla sorgente da cui gli vien comunicato calore. La locuzione, ancora usata, di " velocità *impressa* " suggeriva originariamente l'analogia tra il persistere della velocità e il persistere dell'*impronta* dopo rimosso il sigillo che l'ha prodotta, e rappresenta uno stadio ulteriore verso la completa ammissione della legge d'inerzia.

presto impedito dall'urto contro altri corpi che si oppongono alla sua ulteriore discesa, prima che si esaurisca l'azione della causa perturbatrice (rappresentata dalla suddetta spinta all'insù, che maschera gli effetti del peso) giungerebbe a un punto oltre al quale continuerebbe a muoversi di moto uniforme.

Di ciò che avverrebbe se il corpo, discendendo senza impedimento, raggiungesse il punto al quale si ammetteva tendessero i gravi, Ipparco, a quanto almeno risulta dai frammenti che ci sono rimasti, non pare essersi preoccupato (1).

La prima menzione che si trovi fatta di questo problema è negli scritti di Leonardo da Vinci, e la controversia relativa ad esso costituì poi uno dei luoghi comuni nelle dispute tra i commentatori pedanti di Aristotile che attribuivano a questi l'opinione (che del resto, a quanto io so, non si trova espressamente enunciata in alcun passo delle sue opere) che il corpo, giunto al centro della terra, si dovesse fermare di botto, come arrivato alla meta a cui tendeva, e i primi pensatori indipendenti che si occuparono di questo argomento (Maurolico, Cardano, Tartaglia) i quali giudicavano tale opinione insostenibile e assurda.

Anche a questo riguardo tuttavia spetta al Benedetti il merito di aver chiarita definitivamente la questione, riconoscendola identica ad un'altra sulla cui soluzione l'esperienza non lasciava luogo a dubbio.

Ecco il suo ragionamento, esposto in una lettera a Franchino Trivultio (*Divers. Specul.*, pag. 368-9):

De lapsu lapidis versus centrum mundi, dum ipsum attingere ac praeterire posset, de quo me interrogas, dico Nicolaum Tartaleam, nec non Francisco Maurolicum, recte sensisse, male vero Alexandrum Piccolomineum. Lapis igitur ille transiret centrum rediretque, cum diminutione tamen motus impressi, eo firme modo ut scribunt iudiciosissimi viri, donec post multas redditiones sursum deorsumque, quiesceret circa centrum mundi. Facilioris tamen intel-

(1) L'importanza di questo brano di Ipparco, noto anche al Wohlwill (al quale però venne a cognizione troppo tardi perchè lo potesse utilizzare nel suo studio già citato) mi fu segnalata dallo Schiaparelli.

ligentiae gratia, cogita filum illum (exempli adducti ab illis clarissimis viris) cui pondus appensum est, aequalem esse axi horizontis, hoc est eius extremitatem (immobilis) esse in primo mobili et in ipso zenith tui horizontis, tunc arcus motionis ipsius lapidis, per tantum intervallum quantum est diameter terrae, insensibiliter differret a linea recta et cum lapis distans a centro mundi per semidiametrum terrae iret rediretque, ut scis, ergo idem faceret si filum longius esset per dictum terrae semidiametrum ita ut posset ipsum centrum attingere, nam differentia illa semidiametri terrae, fere nulla est respectu semidiametri ipsius primi mobilis (369) (1).

§ 9°.

Di questioni riguardanti il moto dei gravi lanciati in direzione diversa dalla verticale e dalla determinazione delle loro traiettorie, il Benedetti sembra aver deliberatamente ommesso di occuparsi, scoraggiato forse dal cattivo risultato del tentativo fatto dal suo maestro Tartaglia, di sottoporre tali argomenti a trattazione matematica. Sebbene convinto, non meno di quest'ultimo (2), che la traiettoria descritta dai proiettili sia curvilinea fin dal principio, e che non esista alcun tratto per quanto piccolo di essa, durante il quale l'azione del peso non si manifesti col deflettere il proiettile dalla linea corrispondente all'impulso iniziale, pure egli non riesce a spogliarsi interamente dall'idea che una spinta in senso orizzontale comunicata al corpo, contribuisca in certo modo a sostenerlo, ritardando il tempo della sua caduta.

Egli applica perfino questo concetto per spiegarsi come la trottola in moto si sostenga, appoggiandosi solo sulla sua punta, in posizioni nelle quali non potrebbe sostenersi se fosse ferma:

" Ab [eiusmodi] inclinatione rectitudinis motus partium ali-
" cuius corporis rotundi fit, ut, per aliquod temporis spacium,

---

(1) L'indole del presente scritto non mi concede di fermarmi sulle idee astronomiche del Benedetti; dirò solo che egli fu fautore entusiasta della teoria copernicana, che egli chiama " *pulcherrimam Aristarchi Samii opinionem, divinitus a Copernico expressam* „ (pag. 195).

(2) Cfr. Tartaglia, *Quesiti et inventioni diverse,* pag. 10-4.

" trochus magna cum violentia seipsum circumagens, omnino
" recta quiescat super illam cuspidem ferri quam habet, non
" inclinans se versus mundi centrum, magis ad unam partem
" quam ad aliam, cum quaelibet suarum partium in huiusmodi
" motum, non inclinet omnino versus mundi centrum, sed multo
" magis per transversum ad angulos rectos cum linea directionis,
" aut verticali aut orizontis axe, ita ut necessario huiusmodi
" corpus rectum stare debeat. Et quod dico ipsas partes *non*
" *omnino* inclinare versus mundi centrum, id ea ratione dico quia
" non absolute sunt unquam privatae huiusmodi inclinatione
" quae efficit ut ipsum corpus eo puncto nitatur. Verumtamen
" est quod, quanto magis est velox, tanto minus premit ipsum
" punctum imo ipsum corpus tanto magis leve remanet. Id quod
" aperte patet sumendo exemplum pilae alicuius arcus ut ali-
" cuius alterius instrumenti seu machinae missilis quae pila,
" quanto est velocior in moto violento, tanto maiorem propen-
" sionem habet rectius eundi, unde versus mundi centrum tanto
" minus inclinat et *hanc ob causam levior redditur*. Sed si clarius
" hanc veritatem videre cupis, cogita illud corpus, trochum sci-
" licet, dum velocissime circumducitur, secari seu dividi in
" multas partes, unde videbis illas omnes non illico versus
" mundi centrum descendere, sed recta orizontaliter, ut ita
" dicam, moveri. Id quod a nomine adhuc quod sciam in trocho
" est observatum „ (285-6).

Nessuno prima di Galileo sembra aver creduto, o sospettato, che un corpo lanciato parallelamente all'orizzonte, non cessa per ciò (salvochè per effetto della resistenza dell'aria) di subire, in ogni successivo intervallo di tempo, gli stessi abbassamenti che subirebbe se, a partire dallo stesso istante, lo si fosse invece lasciato cadere spontaneamente lungo la verticale.

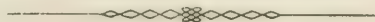
---

(1) Della via seguita da Galileo per giungere a questa e all'altra sua grande scoperta, quella cioè della *legge* della caduta dei gravi, tratterò in una prossima Nota, nella quale mi propongo di analizzare le idee che determinarono e diressero le sue ricerche sperimentali sul moto dei proiettili e sulle discese dei gravi per piani inclinati.

---

*L'Accademico Segretario*
ANDREA NACCARI.

# CLASSE

DI

# SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

---

## Adunanza del 3 Aprile 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

---

Sono presenti i Socii: CLARETTA, Direttore della Classe, PEYRON, ROSSI, PEZZI, COGNETTI DE MARTIIS, BOSELLI, PERRERO e NANI Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente seduta.

Quindi il Presidente dà comunicazione alla Classe:

1° di R. Decreto in data 13 febbraio 1898, col quale la R. Accademia è autorizzata ad accettare l'eredità lasciatale dal compianto Socio Prof. Senatore T. VALLAURI;

2° di lettera del Ministero della Istruzione Pubblica colla quale sono trasmessi gli estratti: *a*) del R. Decreto 3 marzo 1898 approvante la rielezione del Barone Gaudenzio CLARETTA a Direttore della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche; *b*) e d'altro Decreto di pari data che conferma la elezione dei Professori ASCOLI Graziadio e D'ANCONA Alessandro a Socii nazionali non residenti;

3° di lettera in data 1° corrente aprile del detto professore D'ANCONA, che ringrazia la R. Accademia della nomina comunicatagli.

Presenta ancora un opuscolo: *La Lex Aebutia* (Venezia, 1897), offerto in dono dall'autore Prof. Lando Landucci della R. Università di Padova.

Il Socio Segretario presenta pure, per incarico avutone, le seguenti pubblicazioni, di cui rileva in breve il contenuto ed il valore scientifico:

1° *Œuvres complètes de Bartolomeo Borghesi*, 4 vol. (Paris, 1892-1897), offerte in omaggio dall'*Académie des Inscriptions et Belles-Lettres* di Francia;

2° *Storia della Marina italiana dalla caduta di Costantinopoli alla battaglia di Lepanto* (Roma, 1897), del Prof. Camillo Manfroni;

3° *Illustrazioni storico-corografiche della regione subalpina* (Torino, 1898), dell'avv. Comm. Carlo Dionisotti.

Il Socio G. Claretta prosegue la lettura della seconda parte della sua Memoria: *Sulle principali vicende della Cisterna d'Asti dal secolo XV al XVII.*

Egli prende a considerare la persona del vescovo Alberto de' Guttuari, specialmente nelle sue relazioni con quel suo feudo; ed accenna al trattato di alleanza conchiuso da lui nel 1417 col conte di Virtù, fratello del duca Carlo d'Orléans relegato in Inghilterra, al quale, come è noto, spettava in quei giorni la signoria dell'Astigiano. Che se quell'atto era suggerito dall'interesse politico che aveva il vescovo Alberto di assicurarsi il possesso della Cisterna e di altri suoi feudi, contro le mire che vi potevano avere i suoi avversari, egli non intralasciava pure di provvedere altrimenti ad altro ordine di cose che potevano riuscirgli vantaggiose.

Profittando di una violazione a patti conchiusi dai Garetti, feudatari della Cisterna, in un componimento avuto con lui, egli, senz'altro, non frapponeva indugio ad investire di parte della Cisterna i fratelli Domenico, Giovanni e Benedetto de' Guttuari. Senonchè ad onta di questo i Garetti non si smarrivano di coraggio, ben conoscendo come nei tempi che correvano, la fortuna il più delle volte secondasse gli audaci, allorchè erano in

grado di disporre di un certo apparato di forze. E i documenti inseriti nel processo manoscritto, che diede in massima parte alimento a questo studio, per l'appunto ci provano, come i Garetti riuscissero ad indurre il vescovo Alberto a venire ad un componimento, in forza del quale egli facevasi ad investire quei contendenti di parte del feudo della Cisterna. Il preambolo poi del documento è abbastanza eloquente, e ci attesta che il vescovo Alberto cedeva, per non andar incontro a maggiori danni... *cognoscens et manifeste videns dictos fratres omnino dispositos ad non observandam dictam sententiam, ratificationem et promissionem per ipsos ut supra factas; volensque ac cupiens toto suo posse evitare scandala et pericula que verisimiliter ipsi domino episcopo et eius astensi ecclesie occaxione dicte questionis controuersie discordie contentionis et debati contingere et succedere possent si dicte partes pro predictis ad grauiores sive maiores discordias pervenirent...*

I congiunti suoi peraltro, cioè i Guttuari, proseguivano a mantenere la parte di quel feudo loro conceduta. E il 26 aprile del 1418 Domenico succitato, sotto la loggia della cittadella d'Asti, conchiudeva col Sire francese un'alleanza, a un dipresso simile a quella fermata precedentemente dal vescovo coll'Orleanese. Senonchè i fatti che si compiono e si sostengono colla violenza o col favoritismo, non hanno generalmente sodo fondamento. E mancato ai vivi nel 1439 quel vescovo, veniva a cessare il predominio dei Guttuari, e risorgeva quello degli altri pretendenti.

---

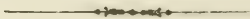
*L'Accademico Segretario*

CESARE NANI.

---

Torino — VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

# CLASSE

DI

# SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

## Adunanza del 17 Aprile 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ALFONSO COSSA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

---

Sono presenti i Soci: Bizzozero, Direttore della Classe, Berruti, D'Ovidio, Spezia, Camerano, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guidi, Fileti e Naccari Segretario.

Viene letto ed approvato l' atto verbale della seduta precedente.

Il Segretario legge la lettera del Ministro della Pubblica Istruzione, che accompagna i decreti di nomina a Soci nazionali non residenti dei professori Bianchi, Dini e Golgi, e i decreti di nomina a Soci stranieri dei signori Bunsen, Haeckel e Berthelot.

Il Segretario comunica la lettera di ringraziamento inviata dal prof. Bianchi per la sua nomina a Socio nazionale non residente e quella del prof. Berthelot per la sua nomina a Socio straniero.

Il Socio Segre fa omaggio all'Accademia di due opuscoli intitolati: *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche* e *La molteplicità nelle intersezioni delle curve piane algebriche.*

Il Segretario presenta un opuscolo inviato in omaggio dal prof. Marco Fiorini, intitolato il *Periplus di A. E. Nordenskiöld.*

Il Socio Camerano presenta una sua nota, *Sulla striatura trasversale dei muscoli delle mandibole degli onicofori*. Sarà inserita negli *Atti*.

Il Socio Naccari a nome del Socio Guareschi presenta una nota del Socio Guareschi stesso e del Dott. Ernesto Grande, intitolata: *Osservazioni sull' analisi elementare*. Sarà inserita negli *Atti*.

Vengono inoltre accolti per l' inserzione negli *Atti* i seguenti scritti:

1° *I pretesi rapporti genetici fra i linfociti ed il cloragogeno,* nota del Dott. Daniele Rosa, presentata dal Socio Camerano,

2° *Alcune esperienze su la scarica dei condensatori,* nota del Prof. Antonio Garbasso, presentata dal Socio Naccari,

3° *Su talune proprietà di un sistema di due correnti alternative difasate qualunque ed applicazione ad un apparato di misura e ad un motore a campo Ferraris*, nota del Dott. Andrea Giulio Rossi, presentata dal Socio Naccari.

Quindi la Classe si costituisce in seduta privata per procedere alla votazione per la nomina di Soci corrispondenti.

Nella Sezione di Matematiche pure riescono eletti i signori:

Prof. Ernesto Cesàro della R. Università di Napoli,

Prof. Guido Castelnuovo della R. Università di Roma,

Prof. Giuseppe Veronese della R. Università di Padova.

A Soci corrispondenti nella Sezione di Fisica generale e sperimentale riescono eletti i signori:

Prof. Antonio Pacinotti della R. Università di Pisa e

Sir Giorgio Gabriele Stokes, Professore nella Università di Cambridge.

# LETTURE

## *Sulla striatura trasversale dei muscoli delle mandibole negli Onicofori;*

Nota del Socio LORENZO CAMERANO.

Lo studio dell'organizzazione degli Onicofori o Prototracheati è di grande interesse non solo per le questioni che riguardano la filogenia dei Tracheati: ma anche per quelle che si riferiscono alla teoria dell'evoluzione in generale, ai fenomeni di convergenza, ecc.

Lo studio quindi della struttura di questi strani animali, che presentano ad un tempo caratteri di Anellide e caratteri di Tracheato, deve essere fatto con grande cura anche nei più minuti particolari.

Avendo avuto occasione di esaminare varii individui di *Peripatus quitensis* SCHM., dirò qui di alcuni particolari riferentisi alla struttura dei muscoli delle mandibole e delle zampe.

E. Grube fu il primo a ricercare un po' minutamente la struttura di una specie di *Peripatus* (1). Egli dice dei muscoli: " Alle Muskeln zeigen keine Querstreifung und den Schimmer " von Sehnen ".

Molto più tardi il Moseley ripigliò lo studio della struttura degli Onicofori e nel suo lavoro intorno al *Peripatus capensis* (2) parlando delle affinità dei Peripati dice: " Peripatus thus shows " affinities in some points to all main branches of the family " tree of Tracheata: but a gulf is fixed between it and them " by the divarication of the nerve-cords, and borne out some- " what by such facts as the non-striation of the muscles, great " power of extension of the body, arrangement of the digestive " tract in the early stage, persistence of metamorphosis, and

(1) *Untersuch. über den Bau von Peripatus Edwardsii.* " Müller's Arch. Anat. Phys. ", 1853, pp. 322, tav. IX-X.

(2) *On the Structure and Development of Peripatus capensis.* " Phil. Trans. ", vol. 164, p. 776 (1874).

" in the parts of their mouth. the full history of the manner " of origin of these being reserved „.

Nella tavola LXXIII dello stesso lavoro egli dà i disegni delle fibre liscie (fig. 8), e nella spiegazione dice espressamente: " *a*. Fibre in state of contraction, wich has taken a somewhat " spiral form. The shading gives somewhat the appearance of " transverse striation „.

Nell'anno 1883, Moseley e Sedgwick pubblicarono (1) il lavoro che Balfour aveva lasciato incompleto intorno all'anatomia ed allo sviluppo del *Peripatus capensis*. In questo lavoro il Balfour dice: " *Histology of the muscle* — The main muscles of the " body are unstriated and divided into fibres, each innested by " a delicate membrane. Between the membrane and muscle are " scattered nuclei, which are never found inside the muscle fibres. " The muscles attached to the jaws form an exception in that " they are distinctly transversely striated „ (pag. 243).

E. Gaffron nel 1883 e nel 1885 pubblicò uno studio minuto sull'anatomia ed istologia particolarmente del *Peripatus Edwardsii* (2) e a proposito dell'istologia dei muscoli dice (p. 44): " Sämmtliche Muskelfasern von Peripatus entbehren, wie schon " mehrere frühere Beobachter angaben, der Querstreifung „.

Adam Sedgwick (3) descrisse pure i muscoli delle mandibole: ma non dice nulla della loro striatura trasversale.

Consultando i trattati di Anatomia comparata e Zoologia più importanti si nota una discrepanza veramente notevole intorno al modo di intendere la struttura dei muscoli in questione.

Il Claus nel suo noto trattato di Zoologia afferma senz'altro che i muscoli degli Onicofori non sono striati trasversalmente.

Korschelt e Heider nel loro trattato di Embriologia comparata degli invertebrati (Jena, 1892) dicono della musculatura:

(1) Balfour F. M., *The Anatomy and Development of Peripatus capensis*; edited by Prof. H. N. Moseley and A. Sedgwick. " Quart. J. Micr. Sc. „, XXIII, pp. 213-259, tav. XIII-XX, 1883.

(2) " Zool. Beitr. „ di Schneider, v. I, Heft. I, pag. 33-60, tav. VII-XII (1883-1885) e pag. 145-162, tav. XXI-XXIII.

(3) *The Development of the cape species of Peripatus*. " Quart. Journ. Microscop. Sc. „, new Ser., vol. XXVIII, 1888. — *Monograph of the genus Peripatus*. Ibidem.

" Was die erstere betrifft, so entbehrt sie der Querstreifung " (nur die Kiefermuskeln sollen quergestreift sein) und bildet " einen Hautmuskelschlauch ".

Boas (*Lehrbuch der Zoologie,* Jena, 1890) dice: " Die Muskeln " bestehen grösstentheils aus *glatten* Muskelfasern ".

Gegenbaur afferma nel suo trattato di Anatomia comparata che i muscoli degli Onicofori sono tutti lisci. La stessa cosa si legge nel Trattato di Zoologia del Blanchard (Parigi, 1890).

Nel trattato di Anatomia comparata del Lang (Jena, 1888 e Traduzione franc. Parigi. 1892) è messo bene in evidenza (con carattere corsivo) che: " Sämmtliche Muskelfasern mit Ausnahme " derjenigen der Kiefermuskeln von Peripatus entbehren der " Querstreifung ".

Nel Trattato di Zoologia del prof. C. Emery (E. Lœscher, 1884) si legge: " musculatura fatta quasi esclusivamente di " fibre liscie (vi sono muscoli striati nei piedi) ".

Lasciando in disparte i trattati sopra citati ed altri che si potrebbero ricordare, dai quali non risulta che ciò che è detto rispetto alla questione che ci occupa provenga da osservazioni personali dei rispettivi autori, troviamo fra i naturalisti che si occuparono in modo particolare dell' istologia dei muscoli degli Onicofori due opinioni opposte rispetto alla striatura dei muscoli delle mandibole.

Grube, Moseley, Gaffron asseriscono che la striatura trasversale manca.

Balfour invece l'ammette. I trattatisti l'ammettono o la negano secondochè seguono gli uni o gli altri di questi autori.

Avendo avuto occasione recentemente di preparare le mandibole di parecchie specie di *Peripatus* neotropicali (*P. quitensis* Schm., *P. juliformis* Guilding, *P. Balzani* Camer., *P. Corradi* Camer. (1), osservai che i muscoli delle mandibole di queste specie non presentano alcuna striatura trasversale, ed hanno la caratteristica struttura delle fibre liscie.

---

(1) L. Camerano, *Onicofori raccolti nel Darien dal Dott. E. Festa.* " Boll. Mus. di Zool. Anat. Comp. di Torino, vol. XI, n. 223 (1896). — *Nuova specie di Peripatus di Bolivia.* " Ann. Mus. Civ. di Genova ", ser. 2ª, vol. XVIII (1897). — Sul *Peripatus quitensis* Schm. " Atti R. Accad. Sc. di Torino ", vol. XXXII (1897). — *Nuova specie di Peripatus dell'Ecuador*, ibidem (1898), vol. XXXIII.

Ripetei le osservazioni sui muscoli delle mandibole e dei piedi di parecchi esemplari di *Peripatus quitensis* SCHM. da poco tempo conservati nell'alcool abbastanza forte (e quindi nelle condizioni degli esemplari studiati dal Balfour), ma non riuscii in alcuna maniera a scorgere una striatura trasversale.

Ho esaminato le fibre col microscopio di polarizzazione ed esse mi apparvero uniformemente birifrangenti come si osserva nelle fibre liscie.

Ho notato tuttavia che alcune fibre, in un preparato dei muscoli delle mandibole della specie sopradetta, presentavano una serie di zone trasversali a contorno indeciso, e di ampiezza variabile, alternativamente più chiare e più scure, tanto che ad un esame superficiale con deboli ingrandimenti davano un'apparenza di striatura trasversale grossolana. Esaminata la cosa con forti ingrandimenti (oc. 2. ob. apocr. Zeiss immers. omog. 1,5 mm., apert. 1,30) riconobbi facilmente trattarsi di apparenze ottiche dovute alle ondulazioni delle fibrille longitudinali come già il Moseley (op. sopra cit., fig. *a*) aveva detto. L'aspetto di queste fibre è molto simile a quello disegnato dal Blanchard (1) per la porzione più piccola del muscolo adduttore delle valve del *Pecten maximus* e del *P. Jacobaeus* (fig. 5).

Io credo di poter conchiudere, tenendo conto anche delle ricerche del Moseley, del Grube e del Gaffron, le quali riguardano altre specie del genere *Peripatus*, che negli Onicofori tutti i muscoli sono da considerarsi come lisci e che l'asserzione del Balfour è fondata sulla erronea interpretazione di una apparenza di zonatura trasversale che alcune fibre possono presentare.

A questo proposito io ricordo le parole seguenti del Marshall (2): " The striation of muscle must not be confounded with " a transversely striated appearance caused by a corrugated " outline of the fibre, possibly due to a state of over contrac- " tion. Such a false striation is met with occasionally in some " fibres in the Echinus, Leech, etc., and is the cause of the " muscles of these animals having been described as striped.

(1) *Sur la structure des muscles des mollusques Lamellibranches.* " Bull. Soc. Zool. de France ", vol. XIII, p. 74, 1888.

(2) *Observations on Striped and Unstriped Muscle.* " Quart. Journ. of Microscop. Scienc. ", vol. XXVIII, 1888, pag. 80.

" I shall. therefore, only describe muscle as being striped when
" the striation is due to the presence of the intracellular net-
" work, described by Retzius, Bremer, and Melland „.

I muscoli degli Onicofori si possono facilmente dissociare nelle loro fibre e queste si frammentano facilmente lasciando scorgere alle loro estremità dei pezzi di fibrille isolate. In queste io non ho osservato quella struttura a granuli sovra posti che venne descritta nelle fibrille di altri muscoli di invertebrati che presentano una particolare striatura trasversale delle loro fibre, come ad esempio i muscoli della ventosa del *Merizocotyle diaphanum* Cerf. descritti dal Cerfontaine (1). Debbo tuttavia osservare che in qualche tratto dei muscoli, qua e là, si ha l'impressione, esaminandoli a forti ingrandimenti (oc. 3. Zeiss. ob. imm. omog. 1,5 mm. apert. 1,30) di una struttura a granuli sovrapposti nelle fibrille longitudinali: ma ripeto, in nessun punto mi venne fatto di scorgere la corrispondenza in senso trasversale dei granuli delle fibrille in modo da dar luogo all'apparenza striata, come si osserva nel Trematode sopra citato ed in altri casi analoghi.

Del resto non insisto ora sopra questi minuti particolari di struttura, chè per chiarirli bene sarebbe necessario esaminarli sopra materiale fresco, e che si collegano colla questione generale della struttura intima della fibra muscolare in rapporto colle modalità funzionali dei muscoli (2). Io desidero con questa breve nota richiamare l'attenzione dei zoologi sopra un carattere di struttura degli Onicofori non ben descritto ed interpretato che alcuni fra i più importanti e recenti trattati di Zoologia e di Anatomia comparata mettono in evidenza con particolare cura nel discutere le affinità di questi animali cogli Artropodi, carattere al quale non si può, in ogni caso, nello stato presente delle nostre conoscenze della struttura dei muscoli, attribuire, in questioni di tal fatta, che importanza al tutto secondaria.

---

(1) P. Cerfontaine, *Note sur l'existence de fibres musculaires striées chez un Trématode.* " Bull. Acad. Roy. de Belgique „, vol. XXVII (3ª ser.), 1894, pag. 950.

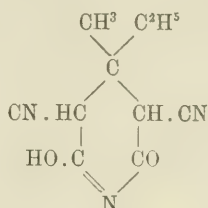
(2) G. H. Th. Eimer, *Die Enstehung und Ausbildung des Muskelgewebes.* " Zeit. f. wiss. Zool. „, v. LIII, suppl., 1892.

## *Osservazioni sull'analisi elementare;*

Nota del Socio ICILIO GUARESCHI e Dott. ERNESTO GRANDE.

Nel corso delle nostre ricerche su un prodotto cristallizzato in lamine fusibili 192°—193°.5 che si forma per l'azione dell'etere cianacetico e dell'ammoniaca sul metiletilchetone, abbiamo avuto occasione di osservare un fatto importante riguardante l'analisi elementare e specialmente il dosamento dell'azoto.

Analizzando, col metodo di Dumas, il composto:

```
      CH³  C²H⁵
        \ /
         C
        / \
CN.HC       CH.CN
   |         |
 HO.C        CO
     \\     /
        N
```

fusibile 192°—193°.5, che denominiamo *dicianmetilidroetilglutaconimide* o *dicianmetilidroetildiossipiridina* e che sarà descritto in una prossima nota, abbiamo osservato che alle volte si ottiene 20.3 e 20.4 °/₀ di azoto che è appunto la quantità calcolata, mentre poi altre volte si trovò 21.7 e 22 °/₀ ed anche 25 e 26 °/₀ se non si conduce l'analisi con gran cura e lentezza; era quindi impossibile dedurre con sicurezza una formola qualsiasi. Alla formola precedente si arrivava però anche per altre vie. Queste discordanze si notavano non solo quando operava un solo esperimentatore, ma anche per esperimentatori diversi. Ed invero il dott. Quenda nel 1894, come risulta dal registro delle analisi, in un campione di questa sostanza fusibile a 192°—193°.5 e data da uno di noi da analizzare, trovò 21.7 °/₀ di N; il dott. Pasquali, analizzando lo stesso campione in bellissimi cristalli incolori e purissimi, trovò in due analisi 26.47 e 26.86.

Il dott. Ern. Grande nello stesso campione e in altre preparazioni trovò in varie analisi:

$$N\ \% = 20.99 - 24.87 - 21.08 - 22.42 - 23.35$$

e una volta sino 27.20.

Per molto tempo questi fatti ci tennero indecisi e non ci era dato trovarne la spiegazione. Era poi curioso l'altro fatto che l'anno scorso il dott. Quenda, analizzando l'*etere diidrodicarbocollidinico* di Hantzsch, ottenne sempre come Hantzsch un eccesso di azoto, nel mentre che con estrema difficoltà si otteneva il carbonio calcolato, e anche l'idrogeno era sempre deficiente.

Finalmente noi abbiamo analizzato ora lo stesso composto fusibile 192°—193°.5 sopracitato, conducendo l'analisi con estrema lentezza e facendo in modo che vi fosse un lungo strato di ossido di rame rovente, e siamo riusciti ad avere i valori quasi teorici, cioè 20.3 a 20.4 %; ma, come ce ne siamo poi accorti, per poco non si badi al momento in cui la sostanza comincia a decomporsi, si sviluppa un *gas* che essendo misto a molta anidride carbonica e al vapore d'acqua, in parte non brucia e passa nell'azotometro, insieme all'azoto.

Inutile qui ricordare che la sostanza analizzata era sempre assolutamente pura.

Avendo noi in questo frattempo ripreso insieme lo studio della sostanza sopraccennata fusibile 192°—193°.5 ed avendo trovato che questo prodotto a 320° si decompone molto rapidamente sviluppando una corrente di gas *etano* $C^2H^6$, come esporremo in una prossima nota, venne l'idea di esaminare accuratamente l'azoto ottenuto nelle analisi quando la percentuale di questo era superiore alla calcolata, e trovammo *l'azoto raccolto nell'azotometro Schiff purissimo quando la percentuale trovata era di 20.3 a 20.4 % circa, mentre il detto azoto non era puro ma combustibile* quando la percentuale *era superiore, cioè 23 % o più*. Non solo, ma notammo che con una percentuale di circa 23 a 24 % il gas combustibile misto all'azoto era *etilene* quasi puro, mentre se la percentuale era di circa 26-27 % si aveva l'azoto misto con *etilene* $C^2H^4$ ed *etano* $C^2H^6$. Noi abbiamo sperimentalmente provato già varie volte che l'apparente eccesso di azoto trovato è sempre dovuto alla miscela con uno o più gas combustibili.

Citiamo alcune analisi:

I. Gr. 0.1426 di sostanza fornirono 30 cm³ di N a 16°.5 e 742 mm.

Da cui:

| | trovato | calcolato per $C^{10}H^{11}N^3O^2$ |
|---|---|---|
| N % | 23.7 | 20.48 |

Questo azoto *bruciava* con fiamma azzurra; posto in contatto col bromo diminuì alquanto di volume ed il gas residuo non bruciava più, nemmeno per l'azione della scintilla in presenza di ossigeno nell'eudiometro di Bunsen.

II. Gr. 0.1512 di sostanza fornirono 32.8 cm³ di N a 16° e 740 mm.

Da cui:

| | trovato | calcolato |
|---|---|---|
| N % | 24.43 | 20.48 |

Questo azoto bruciava ed all'analisi dimostrò di contenere dell'*etilene*.

III. Gr. 0.2812 di sostanza fornirono 69 cm³ di N a 16° e 740 mm.

Da cui:

| | trovato | calcolato |
|---|---|---|
| N % | 27.63 | 20.48 |

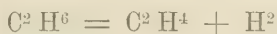
Questo azoto bruciava con fiamma azzurra alquanto luminosa, ma pallida; messo in contatto col bromo diminuì di alcuni centimetri cubi (in una esperienza, per 14 cm³ di gas azoto si ebbe una diminuzione di 1.3 cm³), ed il gas restante, non assorbito dal bromo, bruciava ancora. Analizzato nell'eudiometro Bunsen diede una contrazione e una quantità di anidride carbonica corrispondenti a quella dell'etano $C^2H^6$.

E che la miscela di azoto con etilene o con etano bruci con fiamma azzurra o poco luminosa quando la quantità di idrocarburo è piccola, come era da prevedersi, l'abbiamo provato facendo apposite miscele di azoto con piccole quantità di questi gas; ad esempio 18.5 cm³ di *azoto chimico*, preparato dall'urea

con ipobromito sodico, mescolati con 3 cm$^3$ di *etilene* e in un altro caso 18.5 cm$^3$ di azoto chimico mescolati con 4.6 cm$^3$ di *etilene*, bruciavano sempre con fiamma azzurra o poco luminosa: così pure bruciava con fiamma azzurra una mescolanza di 27 cm$^3$ di azoto e 7 cm$^3$ di gas etano.

In altre esperienze simili abbiamo avuto gli stessi risultati; quando nell'analisi la quantità di gas combustibile misto all'azoto era poca, trovavasi costituito tutto o quasi tutto di etilene, quando invece la quantità era relativamente grande si aveva una miscela di etilene e di etano.

Queste osservazioni concordano col fatto già da tempo osservato dal Berthelot (1) che cioè, quando si fa passare l'etano sull'ossido di rame scaldato, si decompone in:

$$C^2 H^6 = C^2 H^4 + H^2$$

e mentre l'idrogeno brucia dando acqua, l'etilene passa inalterato, almeno in parte. Così deve avvenire nel nostro caso; se non si conduce l'analisi con estrema avvedutezza, la sostanza in un dato momento si decompone rapidamente, si produce dell'etano, misto naturalmente ad anidride carbonica e vapor d'acqua, e l'etano, se è in piccola quantità, si trasforma totalmente in etilene e idrogeno che brucia, oppure se è in maggiore proporzione passa in parte inalterato. La diluzione dei gas idrocarburati coll'anidride carbonica e il vapor d'acqua del carbonio e idrogeno bruciati facilita naturalmente la sfuggita dei gas combustibili.

Le combustioni fatte nell'eudiometro Bunsen hanno dimostrato che il gas combustibile non è *ossido di carbonio;* questo, come l' idrogeno, è abbruciato facilmente dall'ossido di rame rovente.

Si capisce quindi come potendo passare nell'azotometro insieme all'azoto un gas idrocarburato e ricco di idrogeno quali sono l'etano e l'etilene, si debba trovare un notevole aumento nella percentuale dell'azoto ed invece una percentuale minore nel carbonio e nell'idrogeno.

(1) " Ann. de Chim. et de Phys. „ (4), T. IX, pag. 436.

Il dott. Pasquali in questo laboratorio ha ottenuto da composti simili alla nostra *diciannmetilidroetildiossipiridina* e preparati dal metilpropilchetone, dal metilbutilchetone e dal metilessilchetone, una percentuale di azoto superiore alla quantità calcolata, e l'azoto era misto con gas idrocarburati che ora sta studiando.

Queste osservazioni che noi crediamo molto importanti servono indubbiamente a spiegare molti fatti abbastanza strani osservati da vari chimici, e rimasti sino ad ora senza una esatta spiegazione.

Ora citiamo i casi analoghi ai nostri di cui abbiamo potuto aver notizie.

Hantzsch (1) già da lungo tempo aveva osservato che bruciando l'*etere diidrodicarbocollidinico* si ha quasi sempre 1 % di azoto in più mentre con grande difficoltà si arriva ad ottenere il carbonio calcolato. Egli riferisce solamente le analisi seguenti:

| | trovato | | | | | | | calcolato per |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | V | VI | VII | $C^{14}H^{21}NO^{4}$ |
| C = | 62.50 | 62.51 | 62.89 | — | — | — | — | 62.92 |
| H = | 7.87 | 7.87 | 7.87 | — | — | — | — | 7.86 |
| N = | — | — | — | 6.25 | 5.87 | 6.11 | 6.25 | 5.25 |

Dalle quali si scorge che mentre il carbonio è quasi vicino al calcolato, l'azoto è quasi sempre 1 % in più; l'idrogeno è esattamente il calcolato, mentre, come è noto, in molte analisi si trova spesso un poco più del calcolato. Non ne trovò la spiegazione.

Il dott. Quenda (2), che in questo laboratorio ebbe occasione di analizzare l'*etere diidrodicarbocollidinico* di Hantzsch, ottenne i risultati seguenti:

| | trovato | | | | | calcolato per $C^{14}H^{21}NO^{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| C = | 61.66 | 61.54 | — | — | — | 62.92 |
| H = | 7.70 | 7.5 | — | — | — | 7.86 |
| N = | — | — | 6.02 | 6.9 | 6.25 | 5.25 |

(1) " Ann. d. Chem. ", 1882, T. 215, pag. 9.
(2) " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1897, T. 32.

Nelle quali si nota deficienza di carbonio e dell' *idrogeno* ed eccesso di azoto.

Anche Collie (1) ha avuto occasione di analizzare l'etere diidrodicarbocollidinico di Hantzsch e trovò:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| C | = | 62.9 | a | 62.2 |
| H | = | 7.5 | a | 7.6 |
| N | = | 5.7 | a | 5.7 |

Come si vede si ha sempre 0.5 % in più nell'azoto e l'idrogeno è sempre deficiente.

Ora noi abbiamo voluto analizzare l'*etere diidrodicarbocollidinico* per vedere quale era la causa di queste discordanze.

Noi abbiamo fatto diverse analisi con tutta la cura, nelle stesse condizioni, ma impiegando più o meno tempo.

(I) Gr. 0.3130 di sostanza fornirono 14.8 $cm^3$ di N a 15° e 742 mm.

Da cui:

| | trovato | calcolato |
|---|---|---|
| N % | 5.23 | 5.25 |

L'azoto si sviluppò sempre regolarmente senza sbalzi, ma lentamente; impiegammo per l'analisi quasi tre ore. L'azoto così ottenuto *non era combustibile.*

Abbiamo poi fatto delle analisi impiegando meno tempo; una volta abbiamo analizzato operando regolarmente come nelle analisi ordinarie ed ottenemmo:

(II) Gr. 0.1433 di sostanza fornirono 10.4 $cm^3$ di N a 18° e 734 mm.

Da cui:

| | trovato | calcolato |
|---|---|---|
| N % | 8.01 | 5.25 |

La combustione durò 1 ora e 20 minuti.

Quest'azoto *bruciava con fiamma azzurra e lievissimamente luminosa.*

---

(1) " Ann. d. Chem. „ T. 226, pag. 315.

(III) Gr. 0.3128 di sostanza fornirono 29.5 cm³ di N a 13° e 744 mm.

Da cui:

| | trovato |
|---|---|
| N % | 10.83 |

L'analisi era stata condotta non molto lentamente, l'ossido di rame era ben scaldato al rosso. Buona parte del gas si è sviluppata in principio della combustione.

Questo azoto *bruciava con fiamma luminosa pallida.*

In un'altra esperienza fatta con l'azoto di una combustione che fornì 8 % di azoto, si osservò che questo non conteneva gas assorbibile dal bromo, ma bruciava con fiamma azzurra.

Abbiamo analizzato il gas combustibile che si raccoglie nell'azotometro insieme all'azoto quando nell'analisi dell'etere diidrocollidindicarbonico si ottiene una percentuale di azoto superiore a quella calcolata: ed abbiamo trovato che è una miscela di metano $CH^4$ con una certa quantità di un gas assorbibile dal bromo e che probabilmente è *etilene;* non vi si trova nè *ossido di carbonio* nè *acetilene.*

22.3 cm³ di gas azoto avuto nell'analisi III messi in presenza di bromo se ne assorbirono 1.9 cm³; il gas rimanente bruciava ancora e introdottone parte nell'eudiometro Bunsen diede i risultati seguenti:

| | Volume letto | Temperatura | Pressione del gaz | Volume a 0° e 1 m. |
|---|---|---|---|---|
| Gas impiegato (N + Idrocarburo) | 91.04 | 14°,5 | 237mm | 20.48 |
| Dopo aggiunta di ossigeno . . . . | 247.64 | 14°,5 | 390,5 | 91.83 |
| Dopo aggiunta aria . | 309.36 | 14°,5 | 450,5 | 132.34 |
| Dopo combustione . . | 279.57 | 13°,5 | 427,0 | 113.75 |
| Dopo azione della potassa . . . . . | 265.16 | 15° | 415 | 104.31 |

Da cui si ricava:

| | trovato | calcolato per $CH_4$ |
|---|---|---|
| Ossigeno totale consumato | 18.59 | 18.88 |
| Ossigeno per $CO_2$ | 9.44 | 9.44 |
| Ossigeno per $H_2O$ | 9.15 | 9.44 |

e riducendo ad 1:

| | trovato | calcolato per $CH_4$ |
|---|---|---|
| Gaz impiegato | 1 | 1 |
| Ossigeno consumato totale | 1,96 | 2 |
| Ossigeno per $CO_2$ | 1 | 1 |
| Ossigeno per $H_2O$ | 0.96 | 1 |

Questi risultati dimostrano che il gas esaminato è *metano* e concordano sufficientemente coi dati dell'analisi, secondo i quali il volume del gas raccolto deve essere costituito per circa la metà di idrocarburo.

Il gas assorbito dal bromo era molto probabilmente *etilene*.

E che si formi il gas combustibile nel principio dell'analisi l'abbiamo dimostrato disponendo due azotometri in modo da raccogliere il gas che si sviluppava nel principio della combustione e quello che si sviluppava dopo; tanto colla nostra sostanza fusibile a 192°—193°.5 quanto bruciando l'etere diidrocollidindicarbonico. Se si raccoglie $^1/_4$ o $^1/_5$ circa del gas che si deve sviluppare, si vede che brucia molto facilmente e con fiamma luminosa, e contiene pochissimo azoto, costituito come dimostrò l'analisi eudiometrica da *etano* e poco *etilene* nel caso della nostra sostanza e da *metano* e *etilene* nel caso dell'etere biidrocollidindicarbonico; mentre il gas che si raccoglie dopo, non brucia più ed è azoto schietto.

Quando l'analisi è condotta lentissimamente e si hanno buoni risultati concordanti col teorico, allora l'azoto sviluppato prima o dopo, non brucia.

La nostra analisi (I) dell'etere diidrocollidindicarbonico ha dato i migliori risultati. Si può dunque, anche nel caso dell'etere diidrodicarbocollidinico, sostanza di difficile analisi, riuscire ad avere risultati perfettamente concordanti col calcolato.

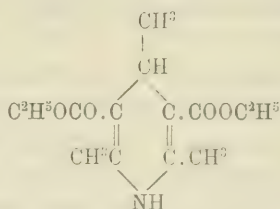
Le nostre esperienze dimostrano dunque che nel caso dell'etere diidrocollidindicarbonico si hanno analisi sconcordanti se non si procede molto lentamente e con grande avvedutezza: la causa delle discordanze è da attribuirsi a idrocarburi gasosi che passano insieme all'azoto.

Che possa formarsi dell'etilene dal metano nelle nostre esperienze è posto fuori di dubbio dalle ricerche di Berthelot (1) il quale facendo passare il metano attraverso un tubo di porcellana scaldato al rosso ottenne l'etano, l'etilene ed altri idrocarburi. E ciò tanto più probabilmente nel nostro caso in cui il metano si troverebbe in presenza dell'ossido di rame:

$$2CH^4 + CuO = C^2H^4 + 2H^2O.$$

Ma l'etilene può anche provenire dai gruppi carbossietilici $COOC^2H^5$ contenuti nell'etere diidrocollidindicarbonico.

Secondo la formola:

```
               CH³
               |
               CH
             /    \
C²H⁵OCO.C          C.COOC²H⁵
         ||        ||
     CH³C          C.CH³
             \    /
               NH
```

per l'etere diidrodicarbocollidinico il gas sviluppato dovrebbe essere metano.

Mancano però delle esperienze esatte sulla decomposizione pirogenica dei gas metano ed etano nelle condizioni identiche a quelle in cui si trovano questi gas quando si formano durante l'analisi elementare col metodo Dumas.

Per spiegare come con tanta facilità si ottenga del metano nell'analisi dell'etere diidrocollidindicarbonico abbiamo sottoposto questo corpo, purissimo e fusibile a 131°, alla distillazione secca scaldandolo a bagno d'olio e meglio a fuoco nudo. Sopra 340° sviluppa regolarmente un gas combustibile: in una esperienza, da 3 gr. di etere idrico si ottennero successivamente 80 e

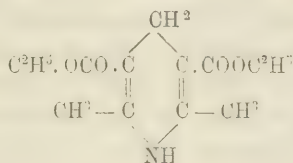
(1) " Comptes Rendus ", 1868, T. 67, pag. 233.

69 $cm^3$ di gas; queste due porzioni separatamente raccolte contenevano 36.2 e 36.7 % di un gas assorbibile dal bromo e senza dubbio *etilene*, ed il resto non assorbibile dal bromo era, come dimostrò anche l'analisi eudiometrica, costituito da *metano*. L'etilene può dunque nel caso dell'analisi dell'etere diidrocollidindicarbonico provenire anche tale e quale dalla decomposizione pirogenica dell'etere; si trova però in quantità minore nel gas che si sviluppa durante l'analisi perchè brucia col CuO più facilmente che non il metano.

La formazione di molto metano nella decomposizione dell'etere biidrocollidindicarbonico ci spingerà a studiare l'azione del calore su altri eteri biidrici di questo gruppo e specialmente gli eteri: *biidrolutidindicarbonico* e *fenildiidrolutidindicarbonico;* lo studio dei quali servirà a chiarire se il metano si forma col metile in $\gamma$ oppure in $\alpha$. Studieremo pure i prodotti liquidi e solidi che si producono insieme ai gas. L'esperienza ci dirà se siamo nel vero coll'ammettere che la decomposizione avvenga contemporaneamente in due modi: in uno si formerebbe *metano* ed *etere lutidindicarbonico* e nell'altro *metano, anidride carbonica, etilene* ed *etere lutidinmonocarbonico.*

Speriamo di poter riferire su questo argomento in una prossima nota sulla *dicianmetilidroetilglutaconimide.* Queste reazioni faranno meglio vedere le analogie fra gli eteri biidrici della reazione di Hantzsch e i derivati bicianici che si formano dai chetoni e dalle aldeidi coll'etere cianacetico e l'ammoniaca.

Griess e Harrow (1) hanno analizzato l'*etere diidrolutidindicarbonico:*

```
                 CH²
                /  \
C²H⁵.OCO.C      C.COOC²H⁵
         ||      ||
   CH³ — C      C — CH³
          \    /
            NH
```

Essi non fanno cenno di difficoltà nella combustione di questa sostanza, ma, mentre trovano appena appena la quantità calcolata di carbonio e di idrogeno: 61.4 a 61.5 invece di 61.6

(1) " Berichte d. deut. Chem. Gesells. ", 1888, XXI, pag. 2741.

e 7.5 a 7.6 invece di 7.5, essi trovano però per l'azoto 6.1 a 6.35 invece di 5.5 % cioè sino quasi 1 % in più.

Epstein (1) nell'analisi dell'*etere benzilidendiidrocollidindicarbonico* osserva che la sostanza brucia difficilmente; trova un poco più di azoto e meno carbonio; sempre una quantità di idrogeno inferiore a quella calcolata: 6.4 a 6.6 % invece di 7.04 %.

Così pure Engelmann nell'analisi dell'*etere diidroparvolindicarbonico* (2) trova sempre una minore quantità di carbonio pur conducendo l'analisi, com'egli afferma, con grande cura e lentezza.

Lo stesso accade per gli eteri nitrofenildiidrolutidindicarbonici e specialmente per l'*etere ortonitrodiidrolutidindicarbonico* (3).

C. Beyer (4) osservò che l'*etere benzoildiidrocollidinmonocarbonico,* come i composti di Hantzsch, brucia male e che solo facendo la combustione con grande lentezza si trova quasi la quantità calcolata di carbonio e idrogeno, ma l'azoto è sempre in più. Nell'analisi che cita trova:

| | trovato | calcolato per $C^{18}H^{21}NO^{3}$ |
|---|---|---|
| N % | 5.84 | 4.69 |

Non ne dà altra spiegazione che la difficoltà di bruciare.

Anche Jaeckle (5) afferma di avere avuto risultati sempre poco soddisfacenti nell'analisi degli eteri η-*propil* ed *essillutidinidrocarbonici* e composti simili.

Rob. Schiff e Prosio (6), che analizzarono l'etere diidrolutidindicarbonico di Griess e Harrow, ma ottenuto in altro modo, notarono che questo ed altri composti simili dello stesso gruppo bruciano con *enorme difficoltà,* e spesse volte trovarono 60.2 a 60.4 % di carbonio invece di 61.66 %. Essi non dosarono l'azoto e quindi non possiamo dire se ne fornisce in eccesso come trovarono Griess e Harrow. Ma vi ha di più: esaminando le

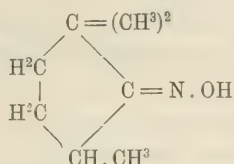
(1) " Ann. d. Chem. „, T. 231, pag. 5.
(2) " Ann. d. Chem. „, T. 231, pag. 37.
(3) Lepetit, " Berichte „, XX, pag. 1341.
(4) " Berichte „, 1891, T. XXIV, pag. 1668.
(5) " Ann. d. Chem. „, T. 246, pag. 34.
(6) " Gaz. Chim. „, 1895 (II), pag. 72.

analisi citate da Rob. Schiff e Prosio si vede che l'idrogeno è quasi sempre in deficienza: 7.30 — 7.32 — 7.44 — 7.42 % (su sei analisi) invece di 7.51 %.

È molto probabile che anche questa sostanza se non si analizza con estrema cautela debba fornire uno o più idrocarburi che sfuggono alla azione comburente dell'ossido di rame. E ciò specialmente se la canna contenente l'ossido di rame non è ben piena e se vi si lascia nella parte superiore un canaletto un po' grande.

Ma altri idroderivati di natura diversa dalla nostra sostanza fusibile 192°—193°.5 e degli eteri idrici di Hantzsch, possono dare risultati analitici sconcordanti.

Kerp (1) in una numerosa serie di analisi della *isoforonossima,*

```
          C=(CH³)²
         /  \
    H²C       \
     |         C=N.OH
    H²C       /
       \    /
        CH.CH³
```

trovò sempre da 1 a 1.6 % in meno di carbonio e circa 3 % di azoto in più; differenza costante che egli non seppe spiegare.

Ma di più, se si esaminano i risultati delle analisi di Kerp si vede che egli trovò sempre, in tutte le analisi, 0.4 a 0.5 % di idrogeno *in meno*.

Riportiamo per maggiore chiarezza i risultati delle analisi di Kerp eseguite sull' isoforonossima:

| | trovato | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | V | VI | VII |
| C = | 69.61 | 69.01 | 69.46 | 69.15 | 69.22 | 69.18 | 69.38 |
| H = | 9.39 | 9.30 | 9.41 | 9.40 | 9.44 | 9.41 | 9.45 |
| N = | 12.11 | — | — | — | 12.26 | 12.25 | 11.73 |

mentre per $C^9 H^{15} NO$ si calcola:

C = 70.59
H = 9.80
N = 9.15

(1) " Ann. d. Chem. ", 1896, T. 290, pag. 141.

Le differenze sono in serie così regolari che proprio sorprende come non si sia tentato di cercarne la causa.

Nell' analisi della *canforilaminurea* $C^9H^{15}NHCONH^2$ egli trovò pure 1 % di azoto in più, e invece il carbonio in meno.

Anche Knœvenagel (1) analizzando l'*isoforonossima* trovò 10.43 e 10.51 % di azoto invece di 9.15 % come si calcola per $C^9H^{15}NO$.

Tissier (2) pure, analizzando l'ossima derivante dall' isoforone $C^9H^{14}O$ trovato negli oli che si ottengono nella preparazione del pinacone, ebbe una percentuale di azoto ben superiore a quella calcolata; cioè 10.20 % invece di 9.15 %.

Invece Bredt (3) trova per l'ossima dell'isoacetoforone dei numeri concordanti.

Ma ancora più curioso è il caso seguente: Rübel (4) analizzando l'ossima dell' isocanfoforone avrebbe trovato sino a 9 % di azoto in più. Noi non abbiamo potuto consultare il lavoro originale del Rübel.

Ed è anche veramente strano che si possa discutere sulla isomeria di due sostanze quando una di esse dà 3 % e l'altra 9 % di N in più del calcolato, senza prima ricercare la vera causa di questa discordanza. I signori Kerp e Müller (5) dicono infatti: " E qui non possiamo a meno di rettificare la supposizione del signor Rübel, notando che il nostro preparato non può essere una miscela dell'ossima trovata da lui, perchè allora avremmo dovuto trovare 9 % di azoto in più e non 3 % come abbiam trovato noi ".

In molti altri casi le differenze sono meno pronunciate, ma pure si vede la relazione fra la deficienza del carbonio e dell' idrogeno e l'eccedenza nell' azoto. Kerp e Müller (6) per la *diidroisoforilamina* $C^9H^{19}N$ ebbero:

---

(1) " Ann. d. Chem. ", 1897, T. 297, pag. 190.

(2) " Ann. de Chim. et de Phys. ", 1893 (6), T. 29, pag. 892.

(3) " Ann. d. Chem. ", 1897, T. 299, pag. 171.

(4) *Die Condensation des Acetons mit Alkalien.* Inaug. Dissert. Bonn, 1896; lavoro citato nella memoria di Kerp e Müller: *Zur Kentniss des Kamphorons, des Isophorons, und des Mesityloxyds*, in " Ann. d. Chem. ", 1897, T. 299, pag. 220.

(5) Loc. cit., pag. 220.

(6) " Ann. d. Chem. ", 1897, T. 299, pag. 222.

| | | trovato | calcolato |
|---|---|---|---|
| C | = | 76.28 | 76.59 |
| H | = | 13.28 | 13.48 |
| N | = | 10.24 | 9.93 |

Per il m. nitrobenzilidenisoforone $C^9H^{12}O = CH . C^6H^4NO^2$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| C | = | 69.8 a 70.1 | 70.85 |
| H | = | 6.27 a 6.24 | 6.27 |
| N | = | 5.43 | 5.17 |

È interessante rammentare un caso riguardante un derivato levulinico. Nel 1889 e 1892 G. Magnanini (1) per l'azione dell'ammoniaca sopra l'acido deidrodiacetillevulinico otteneva un composto a cui assegnava la formola $C^8H^{11}NO$. Egli trovò in varie analisi C = 69.82 — 69.69 e H = 8.36 e 8.04; per l'azoto trovò: 10.99 — 11.11 — 11.47 — 11.01 e 10.96, mentre per la formola $C^8H^{11}NO$ si calcola:

| | | |
|---|---|---|
| C | = | 70.07 |
| H | = | 8.02 |
| N | = | 10.21 |

Egli anche dopo replicate purificazioni della sostanza non riuscì mai ad ottenere una determinazione di azoto più soddisfacente.

Uno di noi (2) analizzando il ciantrimetilpiperidone aveva

---

(1) “ Atti della R. Accad. d. Lincei „, 1889 (4), vol. V, 1ª serie, p. 558 e ivi (5), vol. I, pag. 254. Analizzando l'*iminanidride* dell'*acido* αβ' *dimetilpirrolcarbonico* ottenne sempre una percentuale di carbonio inferiore al calcolato. Egli (“ Atti della R. Acc. dei Lincei „, 1888, vol. IV, 2° sem., pag. 178) non volle indagare la causa della deficienza di carbonio trovato “ poichè sulla natura chimica della sostanza non vi può essere dubbio „. La spiegazione di questa deficienza si trova forse in quanto noi abbiamo precedentemente esposto.

(2) I. Guareschi, *Nuovo metodo di sintesi dei composti idropiridinici.* “ Atti della R. Accad. delle Scienze „, 1893, vol. XXVIII, adunanza del 5 febbraio.

trovato alcune volte un eccesso di azoto, ma poi si è visto che conducendo l'analisi con molta cura e lentezza si poteva sempre trovare una quantità di azoto corrispondente alla quantità calcolata, come ottenne anche il signor Biginelli in un campione di quella stessa sostanza.

Ricordiamo, come altro esempio, benchè non dei peggiori, le analisi seguenti di Merling eseguite sulla metil-αpipecolina $C^7H^{15}N$, per la quale egli stesso afferma di aver trovato sempre il carbonio in meno:

| | | | | | calcolato per $C^7H^{15}N$ |
|---|---|---|---|---|---|
| C = | 73.66 | 73.51 | 73.44 | — | 74.34 |
| H = | 13.41 | 13.47 | 13.49 | — | 13.27 |
| N = | — | — | — | 12.89 | 12.39 |

Anche Knœvenagel (1) trova nelle sue ricerche sui derivati idrici della serie aromatica spesse volte meno carbonio e meno idrogeno della quantità calcolata.

Noi crediamo che questi fatti si siano verificati in molti altri casi. In un numero grandissimo di analisi di composti biidrogenati e tetraidrogenati, si osserva una deficienza nella percentuale di idrogeno e anche di carbonio e, se sono azotati, specialmente per le ossine e le amine, vi corrisponde un aumento di azoto. E ciò non solo pe' derivati idrici della piridina o della naftalina, ma anche per gli idrobenzoici, idropirrolici, idrochinolinici, ecc.; benchè le differenze osservate non siano sempre molto notevoli; se si esaminano le analisi, ad esempio, di molti derivati pirrazolici e idropirrazolici si vedrà che mentre ne' primi il C+H del derivato primitivo concordano bene e l'idrogeno anzi sia in più, ne' secondi, cioè ne' corrispondenti derivati idropirrazolici il carbonio e l'idrogeno sono spesso in meno e l'azoto in più. Non però in modo così evidente come ne' corpi idropiridinici più sopra citati.

Anomalie di questo genere si osservano nelle analisi di molti derivati dell'ossido di mesitile, del fenilacetone, ecc.

Quasi tutti gli autori rammentati più sopra spiegano questa

(1) " Ann. d. Chem. „, T. 217, pag. 190 ecc.

anomalia della percentuale in più dell'azoto o della deficienza del carbonio e idrogeno, ammettendo che dipenda dalla *difficoltà colla quale bruciano* queste sostanze. Ma se questa spiegazione può valere. sino ad un certo segno, per il carbonio, non torna punto per l'azoto pel quale anzi quando veramente la sostanza brucia con difficoltà, si hanno risultati inferiori al calcolato; nè vale per l'idrogeno. Questa difficoltà di combustione si deve ora intendere, ne' casi citati ed altri analoghi, nel senso che la sostanza si scomponga nel principio della combustione in grande quantità di idrocarburi gasosi, quali il metano e l'etano, e che questi misti all'anidride carbonica ed al vapore d'acqua passano sull'ossido di rame in parte senza bruciare o trasformati in altri gas; si spiega allora facilmente la diminuzione del carbonio e dell'idrogeno, e se la sostanza è azotata si capisce pure il contemporaneo aumento dell'azoto che si raccoglie nell'azotometro dove passano anche i gas idrocarburati.

Da alcuni si è interpretato il fatto dell'aumento dell'azoto ammettendo che fosse aderente alla sostanza analizzata qualche traccia di altra materia azotata; ma allora dove vanno i criterî di purezza che si debbono avere? E sarebbe forse piccola la quantità di sostanza azotata mescolata ad un'altra sostanza azotata ignota contenente, ad esempio, 9-10 °/₀ di N quando l'azoto di questa aumentasse dal 1 al 3 e sino 9 °/₀? Le nostre esperienze, se come non dubitiamo saranno confermate in altri casi, rendono inutili tutte le ipotesi di impurezza, ecc. Quando l'eccesso di azoto è dovuto veramente ad impurezza, ad esempio, ad una traccia di ammoniaca, come trovarono Lieben e Haitinger (1) per l'acido ammonchelidonico, colla purificazione si toglie questo inconveniente.

Bisognerebbe vedere anche nei casi di combustioni di sostanze organiche azotate e non azotate quando si trova meno carbonio e meno idrogeno del calcolato, se questa deficienza è propriamente dovuta sempre a difficile combustione nel senso che rimanga del carbone non combusto entro il tubo, oppure se per scomposizione troppo rapida della sostanza e formazione di gas idrocarburati parte di questi sfugga all'ossidazione col CuO.

(1) " Monatsh. f. Chem. „, 1885, pag. 285.

Nella prima ipotesi si deve avere deficienza di carbonio, ma quantità normale o superiore di idrogeno, nel secondo caso si avrà contemporaneamente deficienza di carbonio e di idrogeno e produzione di gas combustibili. Forse faremo delle esperienze in proposito, raccogliendo i gas che passano attraverso il tubo a bolle di Liebig.

Faremo anche delle esperienze di confronto col cromato di piombo.

Si deve notare che gli idrocarburi $CH^4$. $C^2H^4$ e $C^2H^6$ sono gas stabilissimi; data la possibilità della loro formazione per una reazione regolare ad una determinata temperatura, quale è il caso di derivati bi- e tretraidrogenati, si capisce come in parte possano sfuggire inalterati. Come è noto, Berthelot facendo passare l'etano attraverso una miscela di ossido di rame ed ossido di piombo scaldata al rosso ottenne dell'etilene, mentre l'idrogeno bruciava:

$$C^2H^6 + CuO = Cu + H^2O + C^2H^4.$$

Il metano è un gas molto stabile che non è attaccato dall'ozono, nè dagli ordinari agenti ossidanti.

Basta riflettere che 1 $cm^3$ di gas *etilene* pesa gr. 0.00125178 e 1 $cm^3$ di *etano* pesa gr. 0.0012413 ed infine che 1 $cm^3$ di *metano* pesa solamente gr. 0.0007153 e come quindi se passano nell'azotometro anche solamente pochi centimetri cubi di questi gas, e specialmente di metano, si debba avere un grande aumento dell'azoto e una diminuzione sì, ma relativamente minore, nel carbonio e nell' idrogeno.

Queste osservazioni ci sembrano molto importanti e noi avremmo molto piacere che qualcuno dei chimici da noi citati volesse ripetere sulle sostanze già analizzate qualche altra analisi per vedere se i risultati concordano colle esperienze da noi fatte e se conducendo la combustione con estrema accuratezza si riesce ad avere sempre risultati esatti, come noi abbiamo ottenuto colle lamine fusibili 192°—193°.5 e coll'etere diidrodicarbocollidinico.

Questa forse è stata una delle cause per cui già da molti anni alcuni chimici diedero formole erronee per composti ben definiti. Non pochi chimici sono stati alle volte incerti nello

stabilire con sicurezza una formola piuttostochè un'altra, pel fatto che il carbonio e l'idrogeno non concordavano bene nè coll'una nè coll'altra formola; forse questi chimici ritornando ora sui loro lavori, potranno trovare la causa delle sconcordanze osservate.

Se in alcuni dei casi da noi sopra ricordati la composizione della sostanza studiata non fosse conosciuta, diremmo quasi, *a priori,* e per altri criterî, si potrebbe coscienziosamente dalle numerose analisi elementari eseguite, e così poco concordanti, dedurre la composizione centesimale esatta?

Da tutto ciò si può concludere:

1° In molti casi di analisi di composti organici azotati si nota nel principio della combustione lo sviluppo di idrocarburi gasosi i quali passano nell'azotometro insieme all'azoto (la miscela è combustibile) e sono causa di aumento nella percentuale dell'azoto e, per conseguenza, di diminuzione nel carbonio e nell'idrogeno, quando si determinano questi due elementi.

Questa è pure molto probabilmente la causa per cui anche nell'analisi di molti composti idrici non azotati si trova percentuale di carbonio e di idrogeno inferiore a quella calcolata.

2° Questi gas sono idrocarburi saturi (metano ed etano) oppure etilenici (etilene), e in altri casi propano e propilene, che bruciano difficilmente; bisogna quindi condurre la combustione con estrema lentezza e far in modo che sia molto scaldato l'ossido di rame per un lungo tratto e che lo sviluppo dell'azoto sia lento e sempre regolare.

3° Per l'azione del calore (a 320°) sulla *dicianmetilidroetilglutaconimide* o *metildicianidroetildiossipiridina* si ottiene del gas *etano* e per l'azione del calore (sopra 340°) sull'*etere diidrocollidindicarbonico* di Hantzsch si forma una miscela di *metano* (circa 63 $^0/_0$ del volume del gas ottenuto) e di *etilene* (circa 37 $^0/_0$).

Ciò che prova sempre più l'analogia fra i derivati bicianici ottenuti dai chetoni e dalle aldeidi coll'etere cianacetico e gli eterii biidrici avuti nella reazione di Hantzsch.

4° Sarà utile, anzi necessario, specialmente quando si analizzano sostanze di cui non si può con sicurezza conoscere la costituzione, di esaminare sempre il gas azoto che si raccoglie nell'azotometro.

Vedremo in seguito se sia il caso di proporre l'uso di un

azotometro Schiff modificato in maniera che permetta dopo mescolato il gas azoto con dell'ossigeno di farvi passare la scintilla.

Noi saremo ben fortunati se con queste nostre osservazioni avremo contribuito non solamente a spiegare delle strane anomalie sino ad ora rimaste senza soddisfacente spiegazione, ma se avremo impedito che altri simili risultati erronei nelle analisi dei corpi organici si ottengano per l'avvenire.

Torino. R. Università. Laboratorio di Chimica farmaceutica e tossicologica, 16 aprile 1898.

---

# *I pretesi rapporti genetici tra i linfociti ed il cloragogeno;*

Nota del Dott. DANIELE ROSA.

## Introduzione.

Fu ripetutamente affermato che fra i linfociti e le cellule del cosidetto cloragogeno (1) degli Annellidi intercedano dei rapporti genetici, nel senso che non si tratti qui che di due stadii successivi di uno stesso elemento.

Questa successione venne però intesa in due modi opposti, ammettendo gli uni che i linfociti derivassero dalle cellule cloragoghe mentre gli altri ammettevano che queste ultime non fossero che modificazioni di linfociti fissatisi sopra le pareti dei vasi sanguigni.

(1) Intendo il cloragogeno nel senso solito cioè in quello di Claparède e non in quello, inaccettabile nella sua estensione, nel quale l'ha inteso recentemente il Schaeppi (16).

Della prima di queste due teorie mi sono già occupato nella mia memoria *sui linfociti degli Oligocheti* (**15**, pag. 175); in essa ho preso in esame un recente lavoro del Cuénot (**3**), in cui quella tesi, già enunciata da Ray Lankester (**14**) e da altri, era per la prima volta ampiamente esposta ed ho mostrato che i nuovi fatti da me osservati non permettevano di sostenerla più oltre.

Infatti io avevo potuto dimostrare che quelle, che il Cuénot aveva creduto essere cellule cloragoghe libere nel celoma e in via di trasformarsi in amebociti, erano invece speciali cellule linfatiche fino allora non descritte e che io ho chiamato *eleociti;* sono grandi cellule non ameboidi a plasma semifluido, aventi presso alla superficie uno strato di globuli gialli oleosi facilmente solubili in alcool assoluto, etere ecc.

Ultimamente il Cuénot pubblicò un nuovo lavoro in cui mentre conferma le mie osservazioni sugli eleociti e mucociti abbandona egli stesso la sua tesi. Cfr. Cuénot (**4**) pag. 81 e seguenti.

Anche l'Hescheler (**8**, pag. 538) parlando di questa opinione del Cuénot dice: *Diese Meinung kann heute, wenigstens soweit sie die Regenwürmer betrifft, durch die Untersuchungen von Rosa und Schneider als widerlegt gelten.*

Se però quella prima opinione si può omai considerare come confutata, non si può dire così di quell'altra che sostiene, inversamente, l'origine delle cellule cloragoghe da linfociti. È appunto di questa seconda tesi che intendo occuparmi nel presente lavoro.

Questa tesi fu sostenuta per la prima volta (nel 1885) dal Kükenthal che ne fece argomento principale di un lavoro ancor oggi molto citato (**11**). In esso egli riferisce aver direttamente osservato negli oligocheti ed anche (meno completamente) nei policheti che le cellule cloragoghe sono linfociti che si son fissati sui vasi sanguigni e si sono caricati di granuli d'escrezione provenienti dal sangue.

I dati del Kükenthal vennero accettati da molti e valenti autori. Così l'Eisig nella sua *Monografia dei Capitellidi* dice a pagg. 689-690: *Von hervorragender Bedeutung ist sodann der durch Kükenthal gelieferte Nachweis dass die sogenannten Chloragogenzellen der Oligochaeten excretorisch wirksame Lymphkörperchen*

*darstellen*, e più oltre (pag. 755): *Es genüge daher hier daran zu erinnern, wie insbesondere durch Kükenthals Nachweise entschieden würde, dass die betreffenden Gebilde ursprünglich Lymphkörper darstellen, welche sich an die Blutgefässwandungen anheften und durch Aufnahme gelbbrauner, excretorischer Körperchen zu sogenannten Chloragogenzellen werden* .....

Così ancora A. Graf nel 1894 (7, pag. 179) riassume accettandoli interamente i dati del Kükenthal e li estende agli irudinei concludendo: *Ich glaube auch dass die Chloragogenzellen der Nephelis Lymphzellen sind.*

Anche il Vejdovský nelle sue *Entwickelungsgeschichtliche Untersuchungen* (1888-92) accetta le conclusioni del Kükenthal per ciò che riguarda le cloragoghe dell'adulto, mostrando però che le prime cellule cloragoghe non sono che un peritoneo modificato: *nach dem Loslösen der mit Exkretionskörnchen vollständig erfüllten Chloragogenzellen* (cioè delle cellule cloragoghe primitive) *werden die letzteren durch " frische „ Wanderzellen ersetzt, die sich an die Gefässwandungen des Magendarmes mittels der pseudopodienartigen Fortsätze ankleben und durch Aufnahme der Excretionsproducte aus der Blutflüssigkeit zu Chloragogenzellen werden* (l. c., pag. 323).

Per vero molti autori seguitano a chiamare semplicemente peritoneo lo strato delle cellule cloragoghe, mostrando così di non avere in proposito, conoscendole o no, le stesse opinioni del Kükenthal, ma nessuno ha mai confutato la sua teoria che pure egli ci presenta come espressione di fatti realmente osservati.

Ora la teoria dell' origine delle cellule cloragoghe (anche solo di quelle dell'adulto) da linfociti mi era parsa poco d'accordo con fatti che io avevo potuto osservare ed ho creduto che fosse bene ripetere le osservazioni del Kükenthal per vedere se per avventura esse non fossero in parte inesatte o non rettamente interpretate. Il presente lavoro contiene il risultato di questo esame critico dal quale mi pare sia chiaramente emerso che anche colle restrizioni introdottevi dal Vejdovsky la teoria dell'origine delle cloragoghe da linfociti non si possa conservare.

Come oggetto principale di studio ho preso anch'io il *Tubifex rivulorum* perchè così mi era più facile vedere da quali

apparenze il Kükenthal fosse stato condotto alle sue conclusioni.

Naturalmente non ho ristretto il mio lavoro al punto preciso in discussione ma ho preso in esame tutto il ciclo evolutivo dei linfociti quale ci è descritto dal Kükenthal, dalla loro formazione sino al momento della loro pretesa trasformazione in cellule cloragoghe.

## Descrizione dei linfociti del Tubifex.

Pel quesito che ci occupa ha, come vedremo, una certa importanza lo stabilire quale sia la forma normale dei linfociti del *Tubifex*, cioè quella che essi presentano nell'animale stesso quando esso si trovi in condizioni fisiologiche. Questa forma non è ancora stata descritta da alcuno e sfuggì oltre che al Mac Intosh (12) e al D'Udekem (20) anche allo stesso Kükenthal malgrado che precisamente questi linfociti egli facesse oggetto del suo lavoro.

I linfociti del *Tubifex* corrispondono a quelli che nei lumbricidi io ho chiamato amebociti veri e in parte forse a quelli che ho chiamato colà linfociti vacuolari; forme corrispondenti agli eleociti e mucociti dei lumbricidi qui mancano affatto.

La forma normale degli amebociti si può vedere per trasparenza sul vivo osservando però speciali precauzioni. Anzitutto bisogna non prolungare troppo l'osservazione perchè una compressione continuata finisce, come vedremo, per alterare i linfociti nel corpo stesso dell' animale ancora vivente: bisogna ancora evitare di narcotizzare (*betauben*) i vermi con alcool allungatissimo o con altri mezzi e persino di conservare troppo tempo i *Tubifex* in acqua limpida perchè in essa i linfociti pigliano dopo poche ore una forma tondeggiante e vanno poi alterandosi sempre più, mentre i *Tubifex* stessi dopo pochi giorni vi muoiono.

Osservando per trasparenza a debole ingrandimento (p. es. coll'obb. C, oc. 2 di Zeiss) un *Tubifex* vivo moderatamente compresso, preferibilmente un esemplare giovane, i suoi linfociti ci si presentano in massima parte come tenui corpuscoli irregolarissimi ed estremamente trasparenti che rendon figura come

di lievissimi fiocchi di neve vaganti passivamente pel liquido celomico e trapassanti da un segmento all'altro per le interruzioni dei dissepimenti.

Osservati con più forte ingrandimento questi linfociti ci offrono dapprima l'aspetto di una piccola matassa formata da un filo brillantissimo lassamente ingarbugliato. Quando però si esamini più attentamente, si comprende che quell'apparenza di filo è data solo dagli orli e dalle linee di ripiegatura di sottilissime membrane variamente increspate: inoltre al centro di ciascun linfocito si intravede il nucleo.

Per acquistare un'intera certezza riguardo alla forma di questi elementi bisogna però ricorrere alla fissazione in anidride iperosmica. Quest'operazione è qui molto più difficile che pei lombrichi poichè i *Tubifex* non hanno pori dorsali.

Di tanti metodi che ho tentato per ottenere i linfociti del *Tubifex* ben fissati fuori del corpo dell'animale, l'unico che mi abbia dato buoni risultati è il seguente: si colloca un *Tubifex* (ben intero) quasi senz'acqua su un coprioggetti e capovolgendo questo su un portaoggetti sul quale siasi collocata una goccia di anidride iperosmica al 2 °/₀ si esercita una rapida compressione. Se si procede molto rapidamente, le pareti del corpo del verme, prima di aver avuto tempo di essere indurite dal reagente, scoppiano in qualche punto, ed il liquido celomico schizza fuori portando direttamente i linfociti liberi nel fissativo.

È indispensabile che il *Tubifex* adoperato sia ben intero perchè in caso contrario esso invece di scoppiare si schiaccia semplicemente e il preparato non riesce. È utile servirsi di un esemplare giovane per non avere il preparato troppo ingombro di prodotti sessuali; i migliori risultati si hanno però coi grandi individui che hanno già deposto le uova.

Altri metodi mi han dato risultati mediocri che possono però servire come controllo. Si può p. es. fissare con anidride iperosmica un giovane *Tubifex* già compresso ed osservare per trasparenza: anche allora i linfociti rimangono, almeno in parte, ben fissati, ma in breve le pareti somatiche si oscurano e diventano opache. Se si è proceduto col primo metodo si possono osservare i linfociti nella stessa anidride iperosmica conservando il preparato da un giorno all'altro in camera umida; il lento oscuramento che essi subiscono facilita anzi la loro osservazione.

Si possono anche colorare alquanto i linfociti aggiungendo qualche leggera soluzione di un colorante che non precipiti nel reagente, p. es. violetto di genziana o verde metile.

In tali preparati oltre ai linfociti cercati noi troviamo naturalmente molti altri elementi, cioè cellule cloragoghe, cellule vescicolari dei nefridii, prodotti sessuali e quasi sempre parassiti diversi, sopratutto sporozoi. Fra questi corpi si riconoscono però facilmente quelle curiose forme di linfociti, cioè quei veri amebociti, che già all'esame per trasparenza erano visibili.

Queste forme, molto differenti anch'esse dalle solite figure di amebociti che corrono i trattati, ricordano quelle che ho descritto per gli amebociti veri dei lombrichi, però con una differenza notevole: nei lombrichi gli amebociti veri erano in massima parte corpi sferoidi con un ciuffo di grandi pseudopodii in forma di sottili lamine petaliformi variamente increspate (cfr. Rosa, **15**, fig. 13, 14), nel *Tubifex* invece tutto il corpo dell'amebocito è quasi ridotto ad una lamina moltiplicemente increspata e variamente lobata o laciniata della quale non son

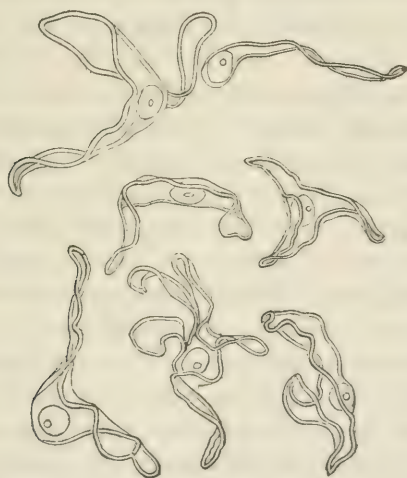



Fig. 1. — Forma normale degli amebociti del *Tubifex*.
Ob. E, Zeiss, oc. 3.

facilmente visibili che i margini brillanti come fili di vetro, e il nucleo contenuto in un leggero inspessimento centrale (vedi fig. 1). Il diametro complessivo di questi amebociti nel vivo è

in media di circa 20 μ, grandezza di poco inferiore a quella degli amebociti dei lombrichi: nei preparati in acido osmico mi si mostrarono un po' più distesi e perciò con diametri maggiori. Il nucleo generalmente ovale appiattito ha un diametro massimo di 8-10 μ, in esso sono evidenti uno o due nucleoli.

Questi amebociti sono in massima parte limpidi, talora invece hanno aspetto nebuloso o granuloso dovuto a granuli brillanti incolori a contorni poco marcati e in genere più piccoli del nucleolo. In varii casi l'aspetto è anche reticolato; quest'aspetto, che spesso è dovuto solo alle pieghe od increspature, talora deriva anche da una vera struttura a maglie o vacuoli che però negli amebociti espansi non si può mettere in certa evidenza.

Tale è nei suoi tratti principali l' aspetto degli amebociti del *Tubifex* in stato espanso.

Quanto ai loro movimenti essi sono quasi nulli: ho spesso tenuto in osservazione per almeno mezz'ora qualche amebocito confinato in qualche interstizio donde le correnti del liquido celomico non lo potevano allontanare e non ho notato alcun cambiamento nella forma delle sue singole espansioni. Esse possono solo in date circostanze raccogliersi tutte strettamente insieme o anche sparire affatto come vedremo più oltre.

Mi permetto di insistere un momento su questo fatto perchè si parla sempre del vivo movimento degli amebociti. Anche p. es. nell'ottimo *Lehrbuch der Zoologie* di R. Hertwig (1895) vedo scritto (pag. 73): *Am verbreitesten sind bei wirbellosen Thieren die Leukocyten, welche sich durch lebhafte amöboide Beweglichkeit auszeichnen.* Questi movimenti vivaci non si compiono in condizioni normali nell'animale mentre appaiono subito negli amebociti osservati fuori del corpo dell'animale sia in un cosidetto liquido fisiologico sia nella loro propria linfa.

Il fatto del resto fu già altre volte notato; p. es. già il Claparède (confermato recentemente dal Schaeppi (16) faceva osservare che nell'*Ophelia radiata* gli amebociti hanno una grande rassomiglianza con delle *Actinophrys* in causa dei loro lunghi pseudopodii raggianti ma che però in questi non si notava alcun movimento.

Oltre ai linfociti con pseudopodii espansi si vedono nel *Tubifex* tanto nei preparati come nel vivo dei linfociti senza

espansioni; essi sono sopratutto abbondanti nei segmenti posteriori del corpo.

Questi si presentano come corpi sferoidali più o meno irregolari; per alcuni di essi è evidente che si tratta solo di amebociti tipici con pseudopodii retratti, per altri invece è dubbio che possano ancora mettere membrane pseudopodiali un po' estese. Appartengono a quest'ultima categoria certi linfociti che hanno grandi alveoli poligonali per reciproca pressione che non si possono ritrovare con sicurezza negli amebociti espansi. Fra i linfociti vacuolari e quelli d'apparenza omogenea c'è però un passaggio gradatissimo. Il diametro di questi linfociti senza pseudopodii varia tra 10 e 20 μ, senza che vi sia tra la dimensione e la struttura un rapporto costante, sebbene in generale le dimensioni dei linfociti alveolari siano fra le maggiori.

I linfociti del *Tubifex* ci presentano invece *forme anormali*, patologiche se invece di studiarli coi metodi sovraccennati li trattiamo coi metodi usati dal Kükenthal, il quale, come tutti facevano al suo tempo, esaminava sia direttamente sia coll'aggiunta di una soluzione cosidetta fisiologica di cloruro di sodio il liquido (linfa mista a sangue) che si ricava da *Tubifex* tagliuzzati.

Fra le molte cellule che allora si vedono e che il Kükenthal (l. c., pag. 321) chiama tutte *Lymphzellen*, ma che realmente sono in parte cellule cloragoghe e parte cellule vescicolose dei nefridii, vi sono pure naturalmente molti linfociti veri, ma nessuno di questi presenta più le espansioni membranose sopradescritte.

Le forme che nascono allora sono forme cosidette di diffluenza affatto simili a quelle che ho descritto altrove (Rosa, **15**, pag. 166) pei lombrichi e che, come aveva già mostrato il Cattaneo (**2**), si ripresentano quasi identiche in tutti i linfociti osservati in quelle condizioni anormali, a qualunque animale essi appartengano e per quanto diverse fossero le forme che essi presentavano nelle singole specie nella linfa o nel sangue circolante.

Non ritornerò qui su questi fenomeni, ricorderò solo che i più caratteristici fra essi sono prima il ritiro delle membrane o dei pseudopodii, poi l'emissione di lunghi zaffi ialini acuti, descritti a torto come pseudopodii normali.

Dirò più tardi delle alterazioni di questo genere che si possono presentare in casi speciali nei linfociti osservati nel corpo stesso del *Tubifex;* ciò ha diretto rapporto con quanto dice il Kükenthal di cellule linfatiche fissantisi sulle pareti dei vasi per cambiarsi in cellule cloragoghe.

Non ho fatto un esame più minuto della struttura dei linfociti del *Tubifex* poichè essi non promettevano nulla di notevole, mentre il loro studio in quest'oligocheto presenta speciali difficoltà tecniche.

## Origine dei linfociti del Tubifex.

Descritta la forma normale (finora ignota) dei linfociti del *Tubifex,* incominciamo ora ad esaminare quanto vi sia di vero nella esposizione del ciclo evolutivo di questi elementi quale ci è data dal Kükenthal e che includerebbe, secondo quest'autore, la trasformazione dei linfociti in cellule cloragoghe.

Riguardo all'origine dei linfociti il Kükenthal afferma aver visto prodursi tali elementi da cellule che rivestono il vaso ventrale ed altri vasi.

Tale affermazione merita di arrestarci perchè appunto sull'origine dei linfociti negli oligocheti sappiamo ben poco.

Veramente secondo le osservazioni del Veidovsky (**22**, p. 321) la questione sembrerebbe quasi risolta: egli dice infatti (l. c.) *Ueber die Herkunft der Mehrzahl der Wanderzellen in die Leibeshhöhle gehen die Ansichten auseinander. Nach meinen jetzigen Erfahrungen bilden sich die Wanderzellen zuerst aus den Elementen der Peritonealhülle, die sowohl die Muskelschicht des Leibesschlauches als der Dissepimente bedeckt. Zu dieser Zeit sind die Blutgefässe noch nicht vorhanden . . . . .*

Tuttavia da queste osservazioni del Vejdovsky non sono senz'altro confutate le asserzioni del Kükenthal, poichè è possibile che oltre a quella formazione embrionale di linfociti persista in qualche punto una formazione di tali elementi anche nell'adulto.

Veramente a questo proposito il Cuénot, che prima (**3**) sosteneva l'origine degli amebociti dalle cellule cloragogene (opinione già combattuta nel mio precedente lavoro), afferma

ora (4, pag. 83 e 113), senza però prendere in esame i dati del Kükenthal, che non vi è negli oligocheti alcun " organo globuligeno „ e che tutti gli amebociti derivano per divisione prima mitotica, poi amitotica gli uni dagli altri (alla prima origine di essi non è fatto alcun accenno).

Di fronte a questi dati del Cuénot stanno però le osservazioni di Guido Schneider. Lo Schneider (17) trova in tutti gli oligocheti (terricoli) da lui studiati delle *Lymphdrüsen* come quelle già descritte in molti animali dal suo maestro Kovalevsky. Esse sarebbero non solo organi fagocitarii ma anche organi capaci di produrre linfociti; anzi (l. c., pag. 376) egli si domanda . . . . . *ob das ganze Peritonealepithel, der Regenwürmer als Lymphdrüse fungirt indem es Phagocytose zeigt und Leucocyten entstehen lässt* . . . . . e senza affermarlo trova la cosa verosimile. Più riservato si mostra però lo Schneider nella conclusione del suo lavoro (pag. 388); in questa egli chiama le *Lymphdrüsen* solo *lymphdrüsenartige Organe* e dice di questi *Die in ihnen phagocytär thätigen Zellen entsprechen im Bau den Peritonealzellen einerseits und andererseits den Leukocyten, welche vielleicht in diesen Organen entstehen und gelegentlich in sie zurückkehren.*

In un recentissimo lavoro (1898) l'Hescheler (8) propende pure a credere che nei lombrichi adulti si producano linfociti da certe regioni proliferanti del peritoneo, come del resto era già stato supposto o affermato da altri, p. es. da Claparède e da D'Arcy Power, ma conclude pure (l. c., pag. 531) . . . *wir wollen in der Frage keinen sicheren Entscheid treffen, dazu mangeln uns auch, genauere Untersuchungen.*

Allo stato presente delle nostre cognizioni noi non possiamo dunque negare o affermare l' esistenza negli oligocheti adulti di organi produttori di linfociti. Non è dunque senza interesse esaminare quanto il Kükenthal dice di avere realmente osservato a questo riguardo nel *Tubifex*, tanto più che tale osservazione è ancor tenuta come esatta da autori recentissimi come p. es. dall'Hescheler stesso (l. c., p. 530) che dice appunto che il Kükenthal dimostrò (*nachwies*) l' origine dei linfociti del *Tubifex* da cellule rivestenti il vaso ventrale ed altri vasi.

Anzitutto è da notare che fra le cellule che si cambierebbero poi in linfociti quelle che secondo il Kükenthal stanno sul

vaso ventrale in realtà non hanno relazione con quest' organo. Ciò era già stato osservato dal Vejdovsky (**22**, pag. 323) che dice giustamente: *bei keinem Oligochaeten findet man den aus grossen Zellen bestehenden Belag auf dem Bauchgefässe, wie es Kükenthal gesehen haben will. Nach dem genannten Forscher entstehen die lymphoiden Zellen " im vorderen Theile des Körpers aus Zellen, welche dem Bauchgefässe und dessen Verzweigungen aufsitzen „. Hier kann nur Beobachtungsfehler vorliegen.*

Sebbene anche recentissimamente (1897) il Cuénot (**4**, pag. 80) parli anch'esso di grandi cellule *autour du vaisseau ventral du Tubifex*, notando però che altrove esse si trovano *presque toujours autour des nephridies*, tuttavia io posso affermare col Vejdovsky che tali cellule attorno al vaso ventrale del *Tubifex* non esistono.

Il Vejdovsky suppone che le cellule viste dal Kükenthal fossero ammassi di linfociti " coagulati „ sotto la pressione del vetrino: in ciò però non si appone al vero. Infatti le cellule in questione sono certamente le grandi cellule vescicolose che rivestono parte dei nefridii, quelle stesse che il Vejdovsky chiama *Peritonealdrüsen der Nephridien* (vedi Vejdovsky, **21**, tav. IX, fig. 1 rappresentante il nefridio di un *Psammoryctes*, forma vicina al *Tubifex*) e la cui connessione coi nefridii era già stata vista nel *Tubifex* dal Leydig fin dal 1851 (Z. f. w. Z., Bd. III, taf. IX, fig. 3).

Infatti il Kükenthal stesso in qualche punto si mostra dubbioso se queste cellule non appartengano invece ai nefridii: egli dice infatti (p. 327) *Die Frage ob sie dem Bauchgefässe ob den Schleifenkanälen aufsitzen, lässt sich schwer entscheiden, bald scheinen sie mehr dem Verlaufe des Schleifenkanales zu folgen, bald sieht man sie unzweifelhaft direkt dem Bauchgefäss aufsitzen...*

V'ha di più: nella 2ª parte del suo lavoro il Kükenthal scrive addirittura (pag. 360): *Die lymphoiden Zellen der Polychaeten stammen von Mutterzellen ab, welche die zu den Segmentalorganen gehenden Blutgefässe umgeben. Dasselbe ist, wie dargethan, auch bei den Oligochaeten der Fall.* Per vero negli oligocheti limicoli (e perciò anche nel *Tubifex*) nessun vaso sanguigno va ad irrigare i nefridii, ciò non succede che nei terricoli: ad ogni modo il Kükenthal stesso sembra ammettere qui in ultimo che

le cellule madri dei linfociti anche negli oligocheti abbiano relazione coi nefridii.

Del resto dalla fig. 9, tav. XI del Kükenthal si vede che le cellule supposte madri dei linfociti e che egli designa con *b g z* sono precisamente le grandi cellule peritoneali dei nefridii del *Tubifex*. Sul fatto che queste ultime appartengano realmente ai nefridii non si può più presentemente avere dubbio da alcuno ed è facile accertarsi della realtà di esso con sezioni o dissezioni; solo l'esame per trasparenza può indurre in errore.

Le cellule madri di parte dei linfociti sarebbero dunque le cellule vescicolose dei nefridii, cellule che, come è noto, si ritrovano più o meno sviluppate in moltissimi altri oligocheti.

Infatti il Kükenthal racconta (p. 327) di aver visto di tali cellule presentare un restringimento trasversale e poi dividersi in due di cui una diventava libera e si cambiava in linfocito, e conclude: *Durch diesen direkten Beobachtungen glaube ich nachgewiesen zu haben, dass ein Theil der lymphoiden Zellen von diesen das Bauchgefäss* (leggi: *die Nephridien*) *umgebenden Bindegewebszellen abstammt.*

Malgrado i particolari con cui il Kükenthal descrive questa sua osservazione io la devo ritenere tanto inesatta come quell'altra che le cellule di cui si parla appartengano al vaso ventrale.

Per mio conto nelle mie osservazioni tante volte ripetute non ho mai visto prodursi un fenomeno simile. Inoltre, sebbene i nuclei di tali trasparentissime cellule siano facilmente visibili anche nel vivo, non ho mai vista una di esse che non fosse munita di un nucleo ovale o circolare. Anche nelle sezioni non ho mai visto in tali cellule traccia di divisione diretta o indiretta.

Si avrebbe certamente torto dando troppa importanza a queste osservazioni negative ma non si potrebbe negare un'importanza decisiva al fatto che i caratteri delle cellule vescicolose dei nefridii sono affatto diversi da quelli dei linfociti.

Infatti non solo tali cellule osservate per trasparenza nel vivo si mostrano sempre ovoidi o leggermente piriformi, liscie come un acino d'uva e senza la minima traccia di aspetto ameboide, ma anche fatte fuoruscire dal corpo ed osservate nella linfa stessa del *Tubifex* o in una soluzione fisiologica di cloruro

di sodio si vedono comportarsi affatto diversamente dagli amebociti.

Come è noto le cellule ameboidi poste in simili condizioni cominciano subito a manifestare il cosidetto moto ameboide emettendo i cosidetti pseudopodii di diffluenza in forma di zaffi ialini acuti. Questo fenomeno si nota persino in linfociti che normalmente (nel vivo) non hanno pseudopodii, come è il caso di quegli elementi che nei lumbricidi ho chiamato linfociti vacuolari.

Nulla di ciò si osserva nelle cellule vescicolose dei nefridii poste in quella condizione; esse rimangono inalterate o, al più, se il mezzo in cui si trovano è meno denso, si rigonfiano alquanto.

Sembra impossibile ammettere che il solo fatto della scissione possa dare alla cellula che si staccherebbe dalla cellula madre le proprietà di un amebocito.

Come è diverso il modo di comportarsi delle cellule vescicolose dei nefridii, così pure è diversa la loro struttura da quella dei linfociti.

Anzitutto le cellule vescicolose dei nefridii hanno una vera membrana che manca agli amebociti. Tale membrana è perfettamente visibile con un doppio contorno nelle sezioni. Il nucleo di tali cellule è sempre proporzionatamente molto più piccolo che nei linfociti. Infatti mentre il diametro di esse (non rigonfiate dall'acqua) va sino a 30 μ. (dimensione mai raggiunta dai linfociti del *Tubifex* che, ridotti a forma sferoidale, raggiungono al massimo un diametro di 20 μ.), il loro nucleo non misura oltre 6 μ. Lo stesso corpo della cellula presenta caratteri morfologici affatto diversi da quello dei linfociti. Esso è in massima parte liquido, come era già stato notato dal Nasse (**13**, pag. 11) che dice: *der Inhalt der Zellen besteht aus einer homogenen Flüssigkeit mit zahlreichen Körnchen von verschiedener Grösse. Derselbe fliesst leicht aus beim Zerzupfen sodass nur die feinere äussere Zellhaut übrig bleibt.* La materia più solida granulosa, la sola colorabile, si trova nelle sezioni accumulata presso al nucleo e da essa partono esili trabecole che attraversano formando maglie poco evidenti il resto della cellula.

A questi punti si sono limitate le mie osservazioni sulle cellule vescicolari dei nefridii poichè un più minuto esame sarebbe uscito fuori dal nostro campo; quanto ho sin qui detto

su di esse mi pare più che sufficiente per escludere affatto la possibilità di considerarle col Kükenthal come cellule madri di linfociti; i miei principali argomenti sono 1° il fatto che tali cellule non presentano fenomeni di moto ameboide anche se messe in condizioni in cui gli amebociti li presentano sempre; 2° la presenza di una membrana cellulare evidente; 3° la grande abbondanza di contenuto liquido che non è carattere certo di cellula giovanile.

Solo una parte delle cellule linfatiche deriverebbe secondo il Kükenthal dalle cellule delle quali sin qui si è parlato, un'altra parte di esse avrebbe diversa origine. Occupiamoci ancora di queste ultime.

Una parte dei linfociti del *Tubifex* si produrrebbe, secondo il Kükenthal (l. c., pag. 328) dalla parete del corpo e precisamente nella cavità di certi solchi che son prodotti dal divaricarsi dei muscoli longitudinali.

Di questi solchi ne esisterebbe uno sul dorso e due sui lati, incominciando dal 5° segmento per andare sino all'estremità posteriore del corpo.

Nei solchi laterali scorrono vasi provenienti dal vaso ventrale; un vaso si troverebbe anche nel solco dorsale mediano.

Il fondo di questi solchi sarebbe occupato da una serie di cellule che propriamente sarebbero fisse sulle pareti dei vasi scorrenti in essi; queste cellule, tondeggianti nella parte anteriore del corpo e sempre più irregolari nella posteriore finirebbero per diventare ameboidi e staccarsi dal loro substrato per vagare nel celoma (l. c., pag. 328 e 329).

Tali i dati del Kükenthal; ai quali sono costretto ad opporre: 1° che i solchi laterali colle relative serie di cellule sono le *Seitenlinien* di Semper le cui cellule l'Hesse ha recentemente dimostrato non essere altro (negli oligocheti) che la porzione centrale nucleata delle fibre muscolari circolari. 2° che il solco dorsale colla sua serie di cellule e il vaso relativo non esiste.

Cominciamo ad occuparci delle serie laterali di queste pretese cellule-madri di linfociti. I solchi laterali sovraccennati esistono realmente, essi scorrono a uguale distanza fra le setole ventrali e le dorsali ed hanno l'estensione assegnata loro dal Kükenthal; è pur vero che le serie di corpi cellulari, che in essi

si trovano, sembrano a primo aspetto aderenti alle pareti dei vasi che scorrono nei solchi.

Questi vasi sono le anse parietali che collegano il vaso ventrale al dorsale, tali anse sono molto lunghe e scorrono per gran tratto in fondo ai solchi stessi.

Ora se si osservano, anche semplicemente per trasparenza, dei *Tubifex* ben distesi (come si possono ottenere addormentandoli con alcool aggiunto goccia a goccia all'acqua) è facile vedere che alle estremità di ciascun segmento, dove l'ansa sanguigna ha già lasciato le pareti del corpo, rimane un tratto abbastanza lungo in cui la serie di cellule descritta dal Kükenthal continua regolarmente mostrando così di essere affatto indipendente dai vasi.

Questa indipendenza si vede anche nelle sezioni come pure con dilacerazioni, nelle quali ultime si constata sempre l'aderenza di quegli elementi non ai vasi ma bensì ai muscoli.

Già su questo primo punto dunque i dati del Kükenthal non sono esatti; non si può affatto dire con lui (l. c., pag. 330) che *die Zellen der Gefässwand direct aufsitzen.*

Mettendo questo punto con quello già trattato sulla pretesa origine di linfociti dal vaso ventrale dobbiamo anzi impugnare tutta quanta la proposizione che vien poco dopo (ibid.): *Er dürfte deshalb die Behauptung wohl gerechtfertig sein, dass die Bildungsstätte der lymphoiden Zellen an dem Bauchgefäss und den davon ausgehenden Gefässschlingen zu suchen ist.*

Tuttavia se i linfociti non si producono sulle anse parietali, potrebbe pur esser vero che essi nascano dalle pareti dei solchi laterali in cui scorrono quelle anse, da quelle stesse serie di cellule cui accenna il Kükenthal.

Diciamolo subito, anche così modificata la tesi del Kükenthal non si può sostenere.

Anzitutto non si può ammettere un istante che i solchi laterali colle relative serie di cellule cui accenna il nostro autore siano qualche cosa di diverso dalle *Seitenlinien* di Semper.

Queste linee laterali, che ebbero un momento di celebrità ai tempi dell'omai defunta teoria di Semper e Dohrn sull'origine dei vertebrati dagli anellidi, erano state negli oligocheti descritte la prima volta dal Semper stesso nel 1876 in un lavoro molto noto (18) al quale però il Kükenthal non fa alcun

accenno: parimenti gli è sfuggita la descrizione della linea laterale del *Phreoryctes* data dal Timm (**19**) il cui lavoro è tuttavia da lui citato.

Dopo la pubblicazione del lavoro del Kükenthal queste *Seitenlinien* degli oligocheti furono ancora ripetutamente descritte. Si veda sopratutto quanto fu scritto a questo proposito dal Vejdovsky (**21**, pag. 93) e dall'Hesse (**9** e **10**).

Non perderò parole a dimostrare l'identità delle *Seitenlinien* colle striscie cellulari dei solchi laterali di Kükenthal. Tale identità è troppo evidente; basta p. es. confrontare la descrizione e le figure del Kükenthal colla descrizione e le figure del Vejdovsky (l. c. e tav. VIII, fig. 3).

Ora agli elementi cellulari che si trovano allineati in queste *Seitenlinien* il Kükenthal darebbe il valore di linfociti. Che questa interpretazione non sia vera appare già da fatti molto facilmente verificabili come i seguenti:

1° Osservando in una soluzione fisiologica di cloruro di sodio o nella linfa stessa dei brani della parete laterale del corpo staccati dal vivo non si vedono questi elementi presentare fenomeni di moto ameboide;

2° Osservati questi elementi nell'acqua non si vedono rigonfiarsi a sfera;

3° Essi non si staccano dai muscoli malgrado ogni prolungata macerazione.

Sopratutto i due ultimi punti sono importanti perchè nell'acqua si rigonfiano crescendo notevolmente di volume non solo i linfociti ma anche le cellule cloragoghe e le cellule vescicolari dei nefridii, mentre tanto le une come le altre si staccano subito dal loro substrato.

La resistenza invece di quegli elementi e la loro tenace aderenza ai muscoli escludono affatto l'idea di linfociti.

Il vero significato di quegli elementi è certamente quello dato loro recentemente dall'Hesse.

L'Hesse nei suoi lavori (**9** e **10**) non si occupa dell'interpretazione del Kükenthal, impugnando solo l'opinione che si tratti qui di elementi nervosi, opinione appunto messa avanti dal Semper e sostenuta anche dal Vejdovsky che chiama queste serie di cellule “ Ganglienzellenstränge „.

L'interpretazione dell'Hesse è che si tratti qui di elementi

muscolari: *Die Zellen der Ringmuskulatur sind nematoide Muskelzellen, deren mit den Kernen versehene Protoplasmafortsätze in zwei Längslinien liegen; diese Längslinien verlaufen etwa in der Mitte zwischen der dorsalen und ventralen Borstenlinien und wurden von Semper als Seitenlinien benannt* (9, pag. 6).

La giustezza di tale interpretazione apparirà chiara a chiunque consulti le descrizioni e le figure di quest'autore. Vedi Hesse, (9) pag. 4-7 e fig. 21 *a, b, c, d*; (10) pag. 395 e segg., tav. XXIV, fig. 7-10. I dati dell' Hesse concordano pienamente con quanto appare dai miei preparati e furono del resto anche confermati dal Goodrich (6).

Rimane che io parli del solco dorsale in cui similmente si ritroverebbe un vaso ed una serie di linfociti in via di formazione.

Qui il Kükenthal è stato certo vittima di una di quelle illusioni così facili quando si esamina per trasparenza un animale vivo; il fatto è che la struttura da lui descritta non esiste. Io ho preparati *in toto* in cui i solchi laterali colle relative serie di nuclei (fortemente colorati) e i vasi scorrenti nei solchi sono perfettamente visibili da un capo all'altro e che tuttavia non mostrano traccia d'una simile struttura esistente sul dorso; anche le sezioni non ne dànno alcun accenno. Del resto, siccome un vaso dorsale parietale non esiste nè qui nè in altro oligocheto, i vasi scorrenti in questo solco dorsale dovrebbero ad ogni modo essere due e non potrebbero essere costituiti da altro che da parte di quel tratto delle anse parietali che dai solchi laterali va al vaso dorsale: ora tale tratto non scorre mai lungo la linea mediana dorsale.

## La pretesa trasformazione dei linfociti in cellule cloragoghe.

Risulta dal precedente capitolo che non è possibile accettare come veri i dati del Kükenthal sulla origine dei linfociti del *Tubifex*; probabilmente ciò vale anche per tutti gli oligocheti e policheti cui quest'autore estende le sue conclusioni.

Veniamo ora alla parte più importante della questione, all'esame cioè dei fatti da cui il Kükenthal ricava che le cellule linfatiche si trasformano in cloragoghe.

Anzitutto mi si permetta di rettificare e completare quanto dice il Kükenthal sulla distribuzione delle cellule cloragoghe sui vasi e sull'intestino del *Tubifex*.

Riguardo alla distribuzione del cloragogeno alla parte anteriore del corpo il nostro autore dice (l. c., pag. 332): *Ganz ausnahmlos lässt sich es zuforderst constatiren das dieselben (die Chloragogenzellen) in den ersten vier Segmenten fehlen und erst mit dem fünften beginnen. Dicht aneinandergelagert überziehen sie von diesem Segment an Darmtractus und Rückengefäss.*

Noto che il Kükenthal conta come 1° segmento solo il 1° setigero che ora è quasi universalmente contato come secondo; egli dice dunque nel *Tubifex* le cellule cloragoghe coprono fin dal 6° segmento del corpo il canale digerente e il vaso dorsale.

Ciò non è interamente esatto. Che le cellule cloragoghe nel *Tubifex* appaiano dapprima nel 6° segmento è vero solo pel canal digerente, e anche solo vero in parte. Se qui infatti esse si presentano subitamente grandi e fittissime, esse non mancano però interamente nei segmenti 5 e 4 nei quali però sono scarse e con pochi granuli sebbene possano anche essere molto lunghe.

Ma pel vaso dorsale non sta affatto che esse incomincino già a presentarsi nel 6° segmento: esse appaiono invece d'un tratto dietro al dissepimento 8-9, cioè al principio del segmento 9° e perciò dietro ai grandi cuori pulsanti dell'8° segmento.

L'illusione che il vaso dorsale sia coperto di cloragoghe sin dal 6° segmento è prodotta dal fatto che esso è per solito sepolto fra le grandi cellule cloragoghe del canal digerente; però se nell'esame per trasparenza si osserva l'animale di fianco, si vede che spesso il vaso dorsale si inarca ad ogni segmento rimanendo stretto al canal digerente solo sotto ai dissepimenti, allora è facile constatare che esso sino a tutto l'8° segmento è interamente nudo di cloragoghe. Ciò del resto si verifica con tutta sicurezza nei preparati stabili.

Non era inutile rilevare questa inesattezza perchè altrimenti si avrebbe qui un' eccezione ad una regola sulla distribuzione del cloragogeno che vediamo mantenuta in tutti gli oligocheti, pei quali è generale il fatto che il vaso dorsale manchi di un rivestimento di cellule cloragoghe in tutti quei segmenti anteriori nei quali esso non manda più rami al canal digerente.

Quanto alle cloragoghe del canal digerente il Kükenthal nota

giustamente che propriamente esse si estendono sui vasi che dal vaso dorsale vanno all'intestino ramificandosi su di esso in fitta rete. Veramente il vaso dorsale non manda vasi all'intestino prima del 9° segmento, mentre le cloragoghe intestinali sono sviluppatissime già nel 6° segmento, ma evidentemente la rete intestinale si estende anche a quei segmenti.

Sono ancora privi di cellule cloragoghe il vaso ventrale, i grandi cuori pulsanti e in generale tutti i vasi che connettono direttamente il vaso ventrale al dorsale.

Anche più importante è stabilire come si comportano le cellule cloragoghe alla parte posteriore del corpo; qui infatti entriamo nel cuore della questione.

A questo proposito il Kükenthal dice che posteriormente le cellule cloragoghe diventano molto più scarse, più piccole, che da claviformi che erano anteriormente si fanno sferiche diventando in pari tempo più povere di granuli e che infine negli ultimi segmenti mancano affatto (l. c., pag. 332-3, passim.). Nota inoltre (pag. 333, in fine) che quando sono già scomparse dall'intestino esse si osservano ancora per qualche segmento indietro sul vaso dorsale.

Precisamente su queste regioni che sarebbero prive o scarsamente fornite di cloragoghe si trovano (sempre secondo l'A.) dei granuli cloragoghi non contenuti in alcuna cellula: *nicht im Inneren der Zellen, sondern der Gefässwandung direct aufsitzend, entweder vereinzelt, oder auch zu kleinen Gruppen zusammengeballt* (l. c., pag. 333, tav. XI, fig. 11*b*).

Questi granuli cloragoghi liberi (che sarebbero secondo l'A. una secrezione del vaso dorsale e della rete intestinale) verrebbero poi fagocitati da cellule linfatiche che vengono ad attaccarsi alle pareti dei vasi; appunto caricandosi di tali granuli e contraendo durevole aderenza coi vasi stessi, quei linfociti si cambierebbero in cellule cloragoghe.

Se dicevo che è importante esaminare come si comportino le cellule cloragoghe alla parte posteriore del corpo si è appunto perchè quest'esame ci conduce a comprendere quali apparenze abbiano condotto il Kükenthal a tale conclusione che come vedremo subito è erronea.

Ricordiamo che l'A. descrive le ultime cellule cloragoghe come sferiche, dopo di queste non si vedrebbero invece di clo-

ragoghe che granuli liberi o ammassi di granuli. Egli non ha visto che dopo le cellule cloragoghe sferiche vengono ancora cloragoghe dapprima ancora convesse, poi quasi affatto piane che finiscono per passare gradatamente in un epitelio peritoneale affatto normale.

È precisamente in queste cellule sottili che sono contenuti i granuli che egli considera come liberi. Si comprende del resto la possibilità di quest'errore poichè queste ultime cellule cloragoghe sono di una trasparenza tale che facilmente si sottraggono allo sguardo non lasciando vedere altro che i loro granuli (1).

Per vedere chiaramente come stanno le cose bisogna esaminare dei *Tubifex* che siano stati immobilizzati aggiungendo goccia a goccia dell' alcool all' acqua in cui si trovano. In tali vermi la coda rimane molto distesa ed è facile l'osservazione per trasparenza anche con forti obbiettivi ad immersione (Noto espressamente che in tali animali non si possono fare osservazioni sugli amebociti perchè questi subiscono allora notevoli alterazioni).

Esaminando in *Tubifex* così preparati la porzione posteriore del canal digerente o meglio del vaso dorsale dove pare che non vi siano più che gruppi di granuli cloragoghi liberi, si può notare che entro a questi gruppi appare sempre un vuoto più o meno circolare. Un più lungo esame mostra in questo vuoto un nucleo. Quei gruppi di granuli fan dunque ancora parte di una cellula che per essere così piatta e trasparente riesce facilmente invisibile, tanto più che i margini non appaiono che eccezionalmente alla vista.

La verità di quanto qui affermo apparirà, spero, indubbia a chi osservi la mia fig. 2 e la confronti colla fig. 11 *b*, tav. XI del Kükenthal: i gruppi di granuli liberi disegnati in quest'ultima figura a cui l'A. accenna nel testo son precisamente quelli che nella mia fig. 2 si vedono circondare i singoli nuclei e perciò essere ancora inclusi in cellule.

Più all' indietro della regione disegnata nella mia citata

(1) Seguito anch'io a parlar di granuli per comodità; realmente ho constatato che i pretesi granuli cloragoghi sono goccioline liquide rivestite da una membrana elastica. Di ciò dirò più a lungo in un prossimo lavoro.

figura i granuli si fanno ancor più piccoli e più scarsi, tuttavia sono riuscito talora a vederne, con forte ingrandimento, sin nel quintultimo segmento del corpo.

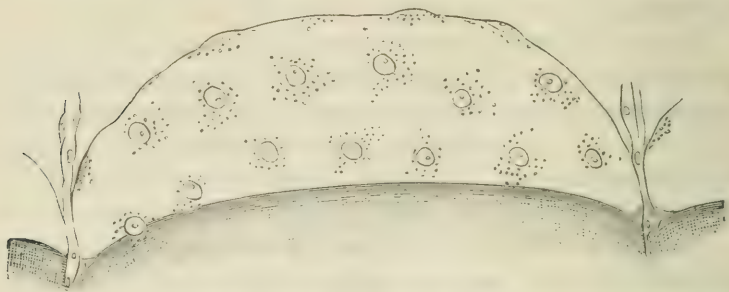



Fig. 2. — Rivestimento cloragogo del vaso dorsale nei segmenti posteriori del *Tubifex* (Cam. luc., ob. $^{1}/_{15}$ semiapocrom. Koristka, oc. comp. 4).

Le cellule piatte della regione posteriore sono in ogni segmento scarse come si vede nella fig., tuttavia essendo esse larghissime sono ancora contigue. Ciò si può facilmente riconoscere se si esamini in questa regione la sezione ottica del vaso dorsale. Si vede allora lungo tutto il profilo di esso uno strato continuo minutamente granuloso formato appunto dalle cellule in discorso dal quale emerge di tratto in tratto un leggero rilievo lenticolare corrispondente al loro nucleo. Allora si vede anche bene che i granuli cloragoghi stanno nello spessore di quelle cellule presso al loro nucleo.

Quanto ai margini di queste cellule cloragoghe posteriori io li ho potuti vedere bene una sola volta ed allora mi si mostrarono formati da linee sinuose, il che è fra le cellule peritoneali un carattere comune.

Concludendo, e malgrado tutte le apparenze che, ad un esame meno diligente, sembrano imporre una diversa opinione, non esistono sul vaso dorsale o sul canal digerente del *Tubifex* granuli cloragoghi liberi. Ne segue che i dati del Kükenthal secondo il quale i linfociti si attaccherebbero alle pareti di quegli organi e caricandosi di quei granuli si cambierebbero in cellule cloragoghe, mancano di base.

I granuli cloragoghi si formano certamente nelle cellule cloragoghe per effetto della attività metabolica propria di esse;

ciò appare indubbiamente dal regolare aggruppamento dei granuli attorno ai nuclei e dalla perfetta regolarità colla quale dalla parte posteriore alla anteriore dell' animale cresce il numero dei granuli contenuti in ogni singola cellula e si eleva la dimensione massima che essi in ciascuna cellula possono raggiungere.

Se però noi non possiamo ammettere che i linfociti si cambiano in cloragoghe caricandosi di granuli già esistenti alla superficie dei vasi, noi non possiamo da ciò solo concludere che le cellule cloragoghe non possano derivare da linfociti.

Ciò tuttavia non si potrebbe più tentare di ammettere per le cellule cloragoghe primitive; queste il Vejdovsky ha dimostrato non essere negli oligocheti che un peritoneo vero, nato per differenziamento delle cellule della splancnopleura e incominciante a funzionare come cloragogeno solo dopo l'apparire dei vasi (Vejd., **22**, pag. 322).

I dati del Kükenthal, così modificati, si potrebbero solo applicare alle cellule cloragoghe dell'adulto. Ciò venne appunto fatto dal Vejdovsky che ammise che le cellule cloragoghe primitive quando sono cariche di granuli si stacchino e siano sostituite man mano da linfociti (l. c., p. 323).

Evidentemente il Vejdovsky ha ammesso questa teoria solo dietro le affermazioni del Kükenthal; infatti precedentemente egli diceva invece che la sostituzione delle cellule cloragoghe avveniva per opera di cellule più giovani che si potevano vedere fra le basi di esse (**21**, pag. 112) e nella pagina stessa (**22**, pag. 323) dove egli si rannoda alla teoria del Kükenthal egli fa notare che non aveva avuto più occasione di esaminare nuovamente un *Tubifex*.

Ora dov'è che il Kükenthal dice di aver visto i linfociti attaccarsi alle pareti dei vasi e dell'intestino per cambiarsi in cloragoghe? è precisamente nella parte posteriore del corpo dove secondo lui vi sono granuli cloragoghi liberi.

Ma noi abbiamo visto che questi pretesi granuli liberi sono invece contenuti in cellule cloragoghe piatte che si presentano coi caratteri di cellule giovanissime ancor poco diverse da cellule peritoneali normali. Certamente se cellule cloragoghe primitive (derivate da cellule peritoneali devono staccarsi per essere sostituite da linfociti si deve aspettarsi che ciò non suc-

ceda che per le cellule invecchiate, grandi, claviformi, gremite di grossi granuli le quali si trovano alla regione anteriore del corpo, non per quelle giovani posteriori.

I linfociti che il Kükenthal vide fissarsi ai vasi e all'intestino in questa regione non erano certamente destinati a sostituire delle cellule cloragoghe invecchiate. Tuttavia è solo su questa osservazione del Kükenthal che il Vejdovsky ha ammesso che le cellule cloragoghe primitive dovessero staccarsi per essere *durch frische Wanderzellen ersetzt.*

Prima di concludere ci conviene però ancora occuparci di quest'adesione dei linfociti.

Realmente l'osservazione del Kükenthal che i linfociti del *Tubifex* possano attaccarsi alle pareti dei vasi è, ridotta in questi ristretti termini, esatta. Io ho fatto a questo proposito lunghe e ripetute osservazioni ed in esse ho rivisto tutti i fenomeni di tal genere descritti dal nostro autore.

Aggiungo però che ho dovuto in ultimo convincermi che tali fenomeni sono quasi sempre (probabilmente sempre) fenomeni anormali, patologici, provocati dalle condizioni speciali in cui si devono fare quelle osservazioni.

Qui io prego il lettore di riportarsi a quanto ho detto nel 1° capitolo (pag. 5-10) sulla forma normale dei linfociti del *Tubifex* e sulle forme alterate che essi, come tutti i linfociti, assumono quando siano osservati fuori dell'organismo sia nella linfa stessa dell'animale, sia in una soluzione cosidetta fisiologica di cloruro di sodio.

Ora le forme che assumono allora i linfociti, e che chiamerò col Cattaneo (2) forme di diffluenza, si possono talora osservare anche in un *Tubifex* vivo.

In un tale animale osservato per trasparenza, e naturalmente sotto una certa compressione, si vedono facilmente dei linfociti che prima presentavano le forme normali descritte a pag. 8 (cfr. fig. 1) ed erravano passivamente pel celoma rimanere attaccati a qualche organo, che può essere però tanto il vaso dorsale o l'intestino come qualsiasi altra parte.

Allora questi linfociti si contraggono in modo da apparire solo coperti di rilievi meandrinosi assumendo frattanto una forma dapprima ancora un po' lobata, poi sempre più sferoidale, per finire in ultimo coll'avere una superficie liscia.

In questo stadio o anche un po' prima si vedono fuorescire dal corpo cellulare, più spesso da un'estremità sola o da due opposte, dei fascetti di zaffi limpidissimi che si attaccano tenacemente ai corpi circostanti e che sono interamente simili a quelli presentati dai linfociti studiati fuori dell'organismo. Si presentano così i fenomeni di adesione segnalati dal Kükenthal. Quando i citati processi partono da una sola estremità e si espandono subito sul campo di adesione le cellule fissantisi sembrano semplicemente sferiche come appunto le descrive l'Autore.

Ma questi fenomeni sono essi normali? Credo di poterlo escludere.

Sta il fatto, da me tante volte osservato, che al principio dell'osservazione, i linfociti per tal modo aderenti ai vasi o ad altri organi o mancano affatto o sono estremamente rari, mentre crescono continuamente di numero quanto più si prolunga l'osservazione tantochè in ultimo mi è avvenuto talora di trovare in quello stato quasi tutti i linfociti.

Sta anche il fatto che quegli stessi fenomeni di adesione si riscontrano anche nei linfociti studiati fuori dal corpo e in condizioni che certamente sono anormali come lo dimostra la circostanza che allora non ritroviamo più alcun linfocito che ci presenti le caratteristiche forme che aveva nell'interno dell'organismo e che per i *Tubifex* son quelle disegnate nella fig. 1.

Tutto conduce a credere che queste forme anormali sono prodotte nel vivo dalla pressione del coprioggetti. Tale pressione può anche far sì che compia qualche rottura, che può passare facilmente inosservata, nella parete del corpo di modo che l'acqua si mescoli colla linfa. Un'alterazione nella linfa può anche nascere dalla rottura di piccoli vasi interni la quale tanto facilmente avviene sotto una pressione anche moderata. In tutti questi casi si vedono sempre i linfociti alterarsi, peggio poi se si sono immobilizzati i vermi con acqua leggermente alcoolizzata.

I linfociti, che si vedono così fissati, possono spesso contenere granuli cloragoghi, questi si riscontrano anche nei linfociti liberi affatto normali e provengono da vecchie cellule cloragogene che si sono distrutte e che, come è noto, vengono fagocitate dalle cellule linfatiche.

Tutto ciò spiega in qual modo il Kükenthal ha potuto cre-

dere di osservare realmente dei fatti che nelle pagine precedenti abbiamo veduto non essere accettabili.

Quanto abbiamo visto riguardo al *Tubifex* si applica probabilmente a tutti gli oligocheti ed anche ai policheti nei quali ultimi il Kükenthal stesso confessa di aver riviste molto meno completamente le cose già da lui viste nel *Tubifex.*

## CONCLUSIONE

In un precedente lavoro (**15**) ho dimostrato che i linfociti degli oligocheti non derivano dalle cellule cloragoghe.

Nel presente lavoro credo aver pure dimostrato che non abbiamo ragione di ammettere che le cellule cloragoghe (anche solo quelle dell'adulto) derivino da linfociti.

Possiamo dunque concludere: *Nessun dato ci autorizza ad ammettere che fra i linfociti e le cellule cloragoghe esista qualche nesso genetico nel senso che questi due gruppi di elementi siano derivati l'uno dall'altro.*

Inoltre sono definitivamente da abbandonare le teorie del Kükenthal sulla origine dei linfociti.

---

## OPERE CITATE

1. Beddard F., *A Monograph of the order of Oligochaeta,* Oxford, 1895.
2. Cattaneo, *Sulla morfologia delle cellule ameboidi.* " Bollett. scientif. „, anno XI, Pavia, 1889.
3. Cuénot L., *Étude sur le sang et les glandes lymphatiques* (2e partie : *Invertébrés*): " Arch. de Zool. expérim. „, 2e sér., t. IX, 1891.
4. Id., *Études physiologiques sur les Oligochètes:* " Archives de Biologie „, T. XV; Liège, 1897.
5. Eisig H., *Capitelliden: Fauna u. Flora d. Golfes v. Neapel,* 1887.
6. Goodrich E. S., *On the structure of Vermiculus pilosus:* " Quart. Journ. of microsc. Science „, vol. 37, N. S., 1895.

7. Graf A., *Beiträge z. Kenntniss d. Exkretionsorgane von Nephelis:* " Jenaische Zeitschr. „, Bd. XXVIII, 1894.
8. Hescheler L., *Ueber Regenerationsvorgänge bei Lumbriciden,* II Teil: " Jenaische Zeitschr. f. Naturwiss. „, Bd. XXXI; Jena, 1898.
9. Hesse R., *Beiträge zur Kenntnis des Baues der Enchytraeiden:* " Zeitschr. f. wiss. Zool. „, Bd. LVII, 1893.
10. Id., *Zur vergleichenden Anat. der Oligochaeten:* " Zeits. f. wiss. Zool. „, Bd. LVIII, 1894.
11. Kükenthal W., *Ueber die lymphoiden Zellen der Anneliden:* " Jenaische Zeitschr. f. Naturwiss. „, Bd. XVIII. Jena, 1885.
12. Mac Intosh, *On some points in the structure of Tubifex:* " Trans. Roy. Soc. „. Edinburgh, vol. XXVI.
13. Nasse D., *Beiträge zur Anatomie der Tubificiden.* Bonn, 1882.
14. Ray Lankester E., *A contribution to the knowledge of the lower Annelids:* " Trans. Linn. Soc. London „, vol. XXVI, 1870.
15. Rosa D., *I linfociti degli Oligocheti:* " Mem. R. Accad. Scienze Torino „, ser. II, t. XLVI, 1896.
16. Schaeppi Th., *Das Chloragogen von Ophelia:* " Jenaische Zeitschr. f. Naturw., Bd. XXVIII, Jena, 1894.
17. Schneider G., *Ueber phagocythäre Organe und Chloragogenzellen der Oligochaeten:* " Zeitschr. f. wiss. Zool. „, Bd. LXI, 1896.
18. Semper C., *Die Verwandtschaftsbeziehungen der gegliederten Thiere, III Strobilation und Segmentation:* " Arbeiten aus dem zool.-zoot. Instit. Würzburg „, Bd. III, 1876.
19. Timm R., *Beobachtungen an Phreoryctes Menkeanus und Nais:* " Arb. zool.-zoot. Inst. Würzburg „, Bd. VI, 1883.
20. Udekem (D') I., *Hist. nat. du Tubifex des ruisseaux:* " Mém. couron. et Mém. des Sav. étrang. „, T. XXVI.
21. Vejdovsky F., *System und Morphologie der Oligochaeten.* Prag, 1884.
22. Id., *Entwickelungsgeschichtliche Untersuchungen.* Prag, 1888-1892.

## *Alcune esperienze su la scarica dei condensatori;*

Nota di ANTONIO GARBASSO (*).

1. — Il problema della scarica di un condensatore secondo due circuiti derivati, si tratta analiticamente con molta semplicità, quando sia lecito supporre che la corrente si distribuisca per modo da rendere minima, in ogni istante, l'energia magnetica del sistema.

E si può ammettere che il fenomeno segua appunto così, ove l'uno e l'altro ramo della conduttura risulti assai poco resistente.

Ma se la resistenza dei due fili, o anche di uno solo di essi, non è trascurabile, la legge, secondo la quale la corrente si divide, riesce più complessa, e la soluzione matematica del problema va incontro a difficoltà molto gravi.

Però, quello che l'analisi non può dare agevolmente, si ricava senz'altro dalla considerazione di un *modello dinamico* del sistema.

Potrebbe servire allo scopo l'apparecchio da me descritto in una nota, che fu inserita nel sesto volume (della quarta serie) del " Nuovo Cimento ". Questo modello rappresenta il fenomeno, per il quale fu ideato, in tutta la sua generalità e, in particolare, tiene conto delle azioni induttive, che si esercitano fra i due rami del circuito di scarica.

Ma, in pratica, si possono disporre le cose per modo che l'induzione mutua risulti trascurabile, e allora conviene scegliere come modello un sistema più facile a costruirsi.

Tale sarebbe, ad esempio, il complesso di tre vasi comunicanti per un tubo a T.

(*) Queste esperienze furono cominciate l'anno passato a Pisa, con il concorso del dottor Italo Bosi, e furono condotte a termine ora, da me, a Torino. — Ringrazio cordialmente i professori Angelo Battelli e Andrea Naccari per l'ospitalità che mi concessero nei loro Istituti. A. G.

2. — Ho realizzato codesto modo di rappresentazione sotto la forma semplice, della quale riporto uno schema nella fig. 1.

$t_1$ e T sono due canne di vetro di un centimetro di diametro, lunghe rispettivamente quaranta e cinquanta centimetri; $t_2$ è una canna simile, avente la stessa altezza che $t_1$, ma un raggio interno dieci volte più piccolo. Questo terzo recipiente è congiunto al sistema dei primi due per un tubo di gomma G, del quale si spiegherà più tardi l'ufficio.

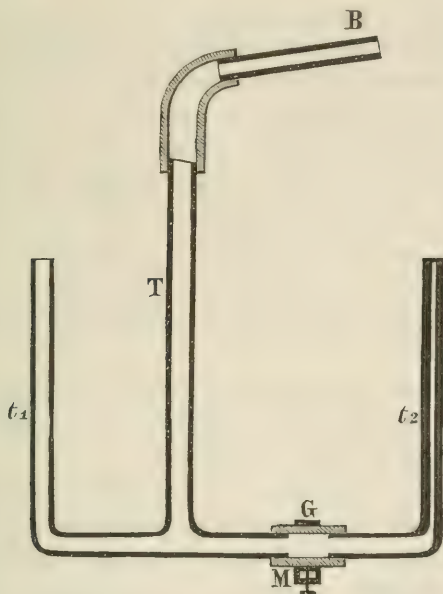



Fig. 1.

Per fare le esperienze si introduce nell'apparecchio una certa quantità di liquido (dell'acqua tinta con un colore di anilina), di modo che il livello arrivi nei due rami $t_1$ e $t_2$ alla metà dell'altezza.

Si *carica* il modello producendo un'aspirazione o una compressione nella parte superiore della canna T; ciò che si può fare agevolmente per mezzo del bocchino B, che un tratto di tubo di gomma collega appunto con la T.

Si *eccita la scarica* abbandonando improvvisamente il liquido all'azione della sola gravità.

L'acqua allora si muove nei tre rami e, in generale, la superficie libera riprende in ciascuno la posizione di equilibrio, dopo di avere oscillato alquanto intorno ad essa.

Nell'apparecchio, del quale ho indicato avanti la grandezza e la forma, la scarica riesce alternativa così nel ramo $t_1$ come nel ramo $t_2$, almeno se il liquido impiegato è dell'acqua pura. Si trova solamente che le oscillazioni si smorzano più presto nella canna più stretta.

Ma è possibile ottenere che il flusso in quest'ultima muti per intero il suo carattere, e la corrente doventi aperiodica, rendendo di mano in mano più vischioso il liquido, che s'adopera per fare l'esperienza. Ciò si ottiene facilmente con l'aggiunta di poche goccie di glicerina. Si arriva così a produrre nella canna $t_2$ delle scariche continue, mentre nella canna più larga $t_1$ il flusso conserva con nettezza il suo carattere di periodicità.

Ma questo modo di sperimentare, che ho descritto, non è troppo pratico; perchè, seguendolo, si è costretti a vuotare l'apparecchio tutte le volte che si vuole aggiungere la glicerina, e, d'altra parte, riesce impossibile di modificare per gradi l'andamento del fenomeno.

Ho pensato in conseguenza a disporre le cose un poco diversamente, ed ho introdotto, all'uopo, fra la canna $t_2$ e il sistema delle altre, il tubo di gomma G.

Questo si può schiacciare con un morsetto M; e per tale modo si altera con tutta facilità la resistenza del secondo circuito. Con la nuova disposizione si fa uso sempre dell' acqua pura, ciò che permette di ottenere nella canna $t_1$ delle oscillazioni più ampie e durature.

I resultati, che si ricavano, del resto, sono quelli stessi di prima, e tradotti nel linguaggio dell' elettrodinamica suonano così: quando si scarica un condensatore lungo due fili, posti uno su l'altro in derivazione, la corrente è alternativa, in generale, con la stessa frequenza nei due rami, ma può doventare aperiodica da una parte, rimanendo oscillante dall'altra, quando il primo circuito presenti una resistenza assai grande.

3. — Mi sono proposto di verificare tutte queste cose, che si deducono dalla considerazione del modello. E dirò subito che, nei limiti delle mie esperienze, la teoria riesce pienamente confermata.

Ho dedotto in ogni caso il carattere delle scariche dallo studio delle scintille, che ad esse corrispondono; il quale studio facevo con uno specchio girante, secondo la disposizione classica del Feddersen (*).

In ciò che segue descrivo anzitutto il piano generale dell'apparecchio; poi ne esamino partitamente i singoli organi. Indico da ultimo come conducessi le esperienze e quali ne fossero i resultati.

4. — Credo inutile far cenno delle varie difficoltà, che incontrai, e delle modificazioni, che dovette subire in conseguenza

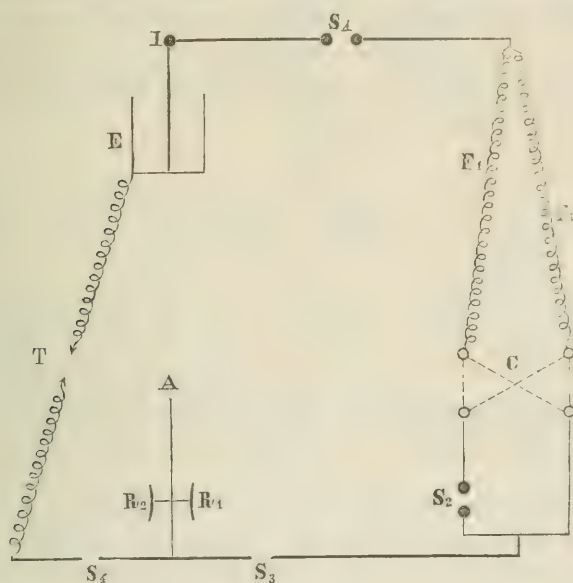



Fig. 2.

il primo apparecchio, che avevo ideato. Preferisco descrivere senz'altro la disposizione definitiva.

L'armatura interna I di un condensatore era messa in comunicazione con una delle aste di uno spinterometro $S_1$; alla seconda asta del quale erano saldati i fili $F_1$ ed $F_2$, che costituivano i due rami del circuito di scarica.

(*) " Pogg. Ann. ", CXIII, 1861.

Questi fili mettevano capo, all'altro estremo, nella prima coppia di pozzetti di un commutatore a mercurio C. E dalla seconda coppia partivano due condutture di grosso filo di rame, le quali, dopo breve tratto, andavano a congiungersi insieme. In una di tali condutture era praticato un intervallo di scarica $S_2$.

I fili procedevano uniti fino a presentarsi in $S_3$ davanti ad una delle posizioni possibili di un'asta $S_3 S_4$ fissata rigidamente a quel medesimo asse A, intorno al quale giravano gli specchii sferici $R_1$ ed $R_2$.

Quando, durante la rotazione, l'asta $S_3 S_4$ si trovava con un capo a breve distanza dall'estremo dei fili, l'altro capo si affacciava ad un conduttore comunicante in T con la terra.

Era messa parimenti in comunicazione con il suolo l'armatura esterna E del condensatore.

5. — *Questo* era costituito da due grandi boccie cilindriche, di vetro verde, della capacità di cinque litri o poco meno, riunite in superficie.

Lo *spinterometro* $S_1$ aveva delle palline di quattordici millimetri di diametro (*); e un intervallo di scarica, che fu compreso sempre fra i sei e gli otto millimetri. La scintilla scoccava dentro una scatola di legno, chiusa ermeticamente, per modo che, con la sua luce non avesse a disturbare le osservazioni.

Dei *due conduttori* $F_1$ ed $F_2$, che costituiscono i rami del circuito di scarica, il primo era un tratto di filo di argentana, lungo un metro e spesso due millimetri; il secondo aveva pure la lunghezza di un metro, ma un diametro di venticinque millesimi di millimetro appena: in alcune esperienze si trattava di un filo di ferro, in altre di un filo di costantana.

$F_1$ ed $F_2$ non erano congiunti direttamente allo spinterometro e al commutatore; ma si saldavano a certi bastoncini brevi e spessi di rame, uguali da una parte e dall'altra. Questo perchè non sarebbe stato comodo nè pratico di fare le congiunzioni dirette nel caso del filo più sottile.

(*) Palline da shrapnel, di piombo indurito con l'antimonio.

Il *commutatore* C lo feci semplicemente con quattro pozzetti pieni di mercurio, scavati in un blocco di paraffina.

Ciò che rimaneva del circuito di scarica, a partire da questo punto, era formato per intero di grosso filo di rame.

Lo *spinterometro* $S_2$ aveva delle palline uguali in tutto a quelle di $S_1$; anche quì l'intervallo stava chiuso in una scatola di legno; però, in una delle pareti di questa, era praticata una finestra rettangolare, di due per tre centimetri, sicchè la scintilla potesse vedersi dalla posizione $R_1$. La distanza esplosiva fu sempre intorno ad un millimetro.

Immediatamente sotto la scatola, che racchiudeva lo spinterometro $S_2$, disposi una lastra rettangolare di vetro spulito, di dieci centimetri per venti, con il lato più lungo verticale. Questo piano aveva la faccia traslucida dalla parte di $R_1$, e volgeva la superficie speculare verso l'osservatore; il quale stava dunque davanti ad essa, e guardava nella direzione degli specchii.

Appunto sopra la lastra in discorso si venivano a formare, durante le esperienze, le imagini reali delle scintille di $S_2$.

Gli *specchii sferici* $R_1$ ed $R_2$ costituiscono l'organo più importante dell'apparecchio. Erano fermati ad un asse orizzontale, che si faceva girare con un movimento di orologeria, comandato da un peso. La velocità, durante le esperienze definitive, fu di cinquantacinque a sessanta giri per secondo.

In tali condizioni gli specchii rotanti formano delle scintille certe imagini più o meno allungate; a seconda del carattere della scarica, alla quale corrispondono.

Le scintille delle correnti alternative appariscono fornite di una *coda,* la cui tinta è compresa fra il rosso rame e il rosso porporino, e la lunghezza è di parecchii centimetri. Invece le scariche continue dànno luogo ad imagini lineari, o che si prolungano appena in una coda pallida e breve. Imagini dunque poco differenti da quelle, che sono date dagli specchii in riposo.

I riflettori impiegati da me erano specchietti concavi da galvanometro, di cinquanta centimetri di distanza focale. Stava appunto ad un metro da essi la lastra spulita, della quale ho parlato più avanti.

L'osservazione è possibile solamente se la scarica passa mentre uno dei riflettori si trova in un punto determinato della sua corsa. A questo fine, come accennavo nella descrizione ge-

nerale dell'apparecchio, l'asse medesimo, che regge gli specchii, porta ancora due bracci d'ottone, lunghi quattro centimetri, comunicanti fra loro, ed isolati da esso. Tali bracci passano, una volta ad ogni mezzo giro, davanti a due conduttori fermi, che l'uno comunica con la terra ($S_4$) e l'altro con l'estremità libera ($S_3$) del circuito di scarica.

I capi delle aste mobili e quelli dei conduttori fissi sono lavorati a coltello, e hanno una larghezza di tre millimetri circa.

La figura 3 dà un'idea complessiva del movimento d'orologeria e del sistema rotante.

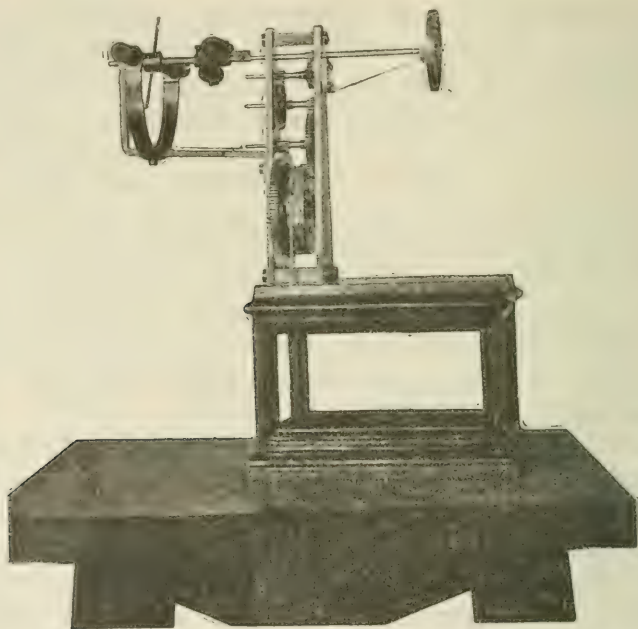



Fig. 3.

L'aspetto delle imagini, che gli specchii formano delle scintille, varia con l'incidenza, sotto la quale si guardano; la coda, in particolare, avendo un colore meno brillante del nucleo e più caldo, appare scorciata o sembra mancare del tutto, se non la si osserva da un punto di vista opportuno. E tale inconveniente si presenta con maggiore nettezza, come è naturale, quanto più pallide e brevi sono le scintille, che si prendono in esame.

Volendo evitare questa causa soggettiva di errore, che fa credere, le prime volte, ad una irregolarità nelle manifestazioni del fenomeno, giova disporre le cose in modo che le imagini si vengano a formare sempre, per quanto è possibile, nel medesimo punto della lastra spulita.

Ho quindi fissato gli specchii all'asse, intorno al quale girano, con un artifizio, che permette di modificarne la giacitura; così che uno di essi prenda per l'appunto il luogo dell'altro, quando il sistema rota di centottanta gradi (*).

Anzitutto i due riflettori sono portati da un manicotto, che si ferma, con una vite di pressione, all'asse dell'apparecchio. Ma a questo pezzo non sono uniti rigidamente. Bensì ciascuno degli specchii può ancora rotare, con moti micrometrici, intorno ad un suo proprio asse, che mantiene rispetto al manicotto una posizione invariabile. Uno di tali assi (*1*) è parallelo alla retta, intorno alla quale gira tutto il sistema, e l'altro (*2*) le è perpendicolare.

Per registrare l'apparecchio si comincia a disporre le cose in modo che l'imagine delle scintille dello spinterometro $S_2$, fornita dallo specchio $R_1$ (in riposo), si venga a formare su la mediana verticale della lastra spulita.

Questo si fa spostando la lastra medesima nel suo piano, orizzontalmente.

Quindi si procura che il raggio riflesso dello specchio $R_2$ fori lo schermo traslucido all'altezza, che si desidera, quando l'asta $S_3$ $S_4$ si trova nella posizione, che rende più facile il passaggio delle scariche. E ciò si ottiene fissando il manicotto su l'asse in una posizione opportuna.

In generale l'imagine data da $R_2$ non cade più su la mediana verticale della lastra; ma la si porta sopra questa retta, girando micrometricamente $R_2$ intorno all'asse *2*.

Finalmente si fa rotare il sistema di centottanta gradi; e per spostamenti, che lasciano fermo l'asse *1*, si riconduce il raggio riflesso da $R_1$ a forare la lastra all'altezza voluta.

In questo modo si è certi che uno dei riflettori prenderà il posto dell'altro dopo una rotazione di due angoli retti.

---

(*) Questa montatura fu lavorata dal signor O. Di Nasso, aiuto meccanico nell'Istituto fisico di Pisa.

6. — Avendo dichiarato così minutamente l'apparecchio, che impiegai, è appena necessario che mi trattenga su la descrizione delle esperienze.

Una cosa soltanto voglio notare. L'aspetto delle scintille dipende ancora, a parità delle altre circostanze, dalle condizioni dell'intervallo di scarica, e dallo stato igrometrico dell'aria. Le apparenze, che si osservano nei due rami del circuito, possono quindi essere alterate da circostanze, che non hanno niente da fare con la grandezza e la forma dei conduttori, dai quali essi risultano.

Di quì nasce l'opportunità di poter scambiare rapidamente i fili, che si vogliono studiare. Per questo ho introdotto il commutatore C.

Nelle mie esperienze la sorgente di elettricità (una piccola Wimshurst, con due dischi di cinquanta centimetri) era tale che intercedevano dieci o quindici secondi fra due scariche successive; e la lunghezza della fune al movimento d'orologeria (tre metri) permetteva che scattassero dodici scintille almeno, prima che si dovesse ricaricare l'apparecchio. Era quindi facile osservare alternativamente una mezza dozzina di scintille con lo spinterometro nel filo sottile, ed altrettante con lo spinterometro intercalato nel conduttore più grosso.

Le esperienze le feci sempre al buio e preferibilmente di sera; l'interruttore era costruito in modo che lo si poteva manovrare anche nell'oscurità.

Le osservazioni non sono punto difficili, ma richiedono una certa pratica.

Il resultato costante fu questo che: *la scarica corrispondente al filo grosso è sempre nettamente alternativa; la scarica, che segue il filo sottile, sembra talora essere aperiodica, ma più spesso oscillante e molto smorzata.*

Non si può dire con sicurezza che la sostituzione della costantana al ferro, nel ramo più resistente, modifichi il fenomeno in un senso piuttosto che nell'altro.

È probabile, per ciò che si impara dal modello idrodinamico, che le scariche lungo il filo sottile riuscirebbero sempre aperiodiche, quando si impiegassero dei diametri minori di quelli adoperati da me.

Torino, Istituto fisico dell'Università. Aprile 1898.

# *Su talune proprietà di un sistema di due correnti alternative difasate qualunque, ed applicazione ad un apparecchio di misura e ad un motore a campo Ferraris;*

Nota del Dott. ANDREA GIULIO ROSSI.

1. — Si abbiano in un piano, che può essere, per esempio, quello di un cerchio graduato G (fig. 1), tre assi $Oh_1$, $Oh_2$, $Oh_3$ concorrenti nel centro O.

Fig. 1.

Suppongasi fisso l'asse $Oh_3$, e gli altri due possano fare, con la direzione opposta ad $Oh_3$, due angoli arbitrarii $\psi_1$ e $\psi_2$; sieno, in altri termini, $Oh_1$ e $Oh_2$ due alidade mobili sul cerchio, ed $Oh_3$ una alidada fissa. Queste tre alidade sopportino, con gli assi secondo le proprie direzioni, tre spirali A, B, C.

Date due correnti alternative sinusoidali, dello stesso periodo, ma d'altra parte qualunque,

$$c_1 = c' \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$c_2 = c'' \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right),$$

la prima percorra la spirale A, di $s$ spire, e con altre $s$ spire si avvolga nella spirale C; la seconda percorra la spirale B, e si avvolga, parallelamente alla prima, con altre $s$ spire sulla spirale C. Supponiamo per ora che questi avvolgimenti non contengano materiali magnetici. I campi alternativi prodotti rispettivamente dalle tre spirali A, B, C, nel centro O del sistema, avranno, per opportune condizioni degli avvolgimenti rispetto al senso delle correnti e supponendo i centri delle tre spirali equidistanti dal centro O, la forma:

$$h_1 = \kappa c' \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$h_2 = \kappa c'' \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$h_3 = \kappa c''' \operatorname{sen}(\omega t + \xi),$$

ove si ponga:

$$c''' = \sqrt{c'^2 + c''^2 + 2c'c'' \cos\varphi},$$

$$\xi = \operatorname{arctg}\left(\frac{c''-c'}{c''+c'} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right);$$

$$\operatorname{sen}\xi = \frac{c''-c'}{c'''} \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}, \qquad \cos\xi = \frac{c''+c'}{c'''} \cos\frac{\varphi}{2}$$

$\kappa$ è un coefficiente costante dipendente dal numero delle spire, dalla loro superficie, ecc.

Questi tre campi potranno rappresentarsi in ogni istante con tre segmenti aventi le direzioni $Oh_1$, $Oh_2$, $Oh_3$.

Facciamo coincidere $Oh_3$ con l'asse $-y$ di un sistema di coordinate rettangolari $xy$; proiettiamo le tre ampiezze momen-

tanee dei campi su questi assi, facciamo le somme X e Y delle proiezioni, componiamo ortogonalmente le due ampiezze così ottenute, ed avremo il valore del campo risultante momentaneo $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Poi, cerchiamo le condizioni perchè questo campo risultante sia un campo Ferraris costante, o circolare.

I valori di X e di Y sono:

$$X = \kappa c' \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right) . \operatorname{sen}\psi_1 - \kappa c'' \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) . \operatorname{sen}\psi_2,$$

$$Y = -\kappa c''' \operatorname{sen}(\omega t + \xi) + \kappa c' \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right) . \cos\psi_1 + $$
$$+ \kappa c'' \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) . \cos\psi_2 .$$

E quindi

$$X^2 + Y^2 = \kappa \operatorname{sen}^2 \omega t \left[ c'^2 (1 - \cos\psi_1) + c''^2 (1 - \cos\psi_2) + \right.$$
$$\left. + c'c'' (1 + \cos\overline{\psi_1 + \psi_2} - \cos\psi_1 - \cos\psi_2) \right] . 2\cos^2\frac{\varphi}{2} +$$
$$+ \kappa \cos^2 \omega t \left[ c'^2 (1 - \cos\psi_1) + c''^2 (1 - \cos\psi_2) + \right.$$
$$\left. - c'c'' (1 + \cos\overline{\psi_1 + \psi_2} - \cos\psi_1 - \cos\psi_2) \right] . 2\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2} +$$
$$+ \kappa \operatorname{sen}\omega t . \cos\omega t \left[ - c'^2 (1 - \cos\psi_1) + c''^2 (1 - \cos\psi_2) \right] .$$
$$. 4 \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2} .$$

Ora, affinchè il vettore $\sqrt{X^2 + Y^2}$ sia indipendente dal tempo, è necessario e sufficiente che: 1° sia uguale a zero il coefficiente del termine in sen $\omega t$ cos $\omega t$, 2° i coefficienti di sen$^2$ $\omega t$ e cos$^2$ $\omega t$ sieno uguali e dello stesso segno.

Il che si esprime con le equazioni di condizione:

$$(1^a) \qquad \frac{c''}{c'} = \sqrt{\frac{1 - \cos\psi_1}{1 - \cos\psi_2}} ,$$

che dà il rapporto delle ampiezze delle due correnti alternative; e:

$$\{ c'^2(1-\cos\psi_1)+c''^2(1-\cos\psi_2)\}\cos\varphi =$$
$$-c'c''\{1+\cos\overline{\psi_1+\psi_2}-\cos\psi_1-\cos\psi_2\},$$

donde con l'aiuto della (1ª):

$$\cos\varphi = \cos\frac{\psi_1+\psi_2}{2}. \tag{2ª}$$

Il campo risultante R è quindi un campo Ferraris costante allorchè fra le ampiezze $c'$, $c''$, la differenza di fase $\varphi$ delle due correnti alternative date e gli *angoli* $\psi_1$ *e* $\psi_2$ *di conformazione* del sistema, esistono le relazioni:

$$\frac{c'}{c''}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\psi_2}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\psi_1}{2}}, \qquad \pm\varphi=\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2).$$

Il valore di questo campo ruotante è allora espresso da:

$$R = 2c'\operatorname{sen}\frac{\psi_1}{2}.\operatorname{sen}\varphi = 2c''\operatorname{sen}\frac{\psi_2}{2}.\operatorname{sen}\varphi$$
$$=\sqrt{2c'\operatorname{sen}\frac{\psi_1}{2}.2c''\operatorname{sen}\frac{\psi_2}{2}}.\operatorname{sen}\varphi, \tag{3}$$

cioè è della forma $H_1H_2\operatorname{sen}\varphi$.

Giova notare che $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\psi_1$ e $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\psi_2$ rappresentano, a meno di una costante, i coefficienti di autoinduzione dei due circuiti $c_1$ e $c_2$. Prendendo l'unità per valore dell'autoinduzione di ciascuna delle quattro spirali, il valore del vettore R risulta in generale da:

$$R^2=\left[(c'L_1)^2+(c''L_2)^2-2c'c''L_1L_2\cos\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right]\cos^2\frac{\varphi}{2}.\operatorname{sen}^2\omega t+$$
$$+\left[(c'L_1)^2+(c''L_2)^2+2c'c''L_1L_2\cos\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right]\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}.\cos^2\omega t+$$
$$-\left[(c'L_1)^2-(c''L_2)^2\right]2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}.\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t,$$

ove $L_1$ ed $L_2$ stanno per i coefficienti di induzione dei due circuiti $c_1$ e $c_2$.

Allora le due equazioni di condizione (1) e (2) si possono scrivere in forma più generale, diventando applicabili ad altre eventuali combinazioni, nel modo seguente:

$$(1') \qquad \frac{c'}{c''} = \frac{L_2}{L_1},$$

$$(2') \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\psi_1+\psi_2}{2}}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\frac{\psi_1+\psi_2}{2}}},$$

ove $a$ e $b$ sostituiscono per brevità, i prodotti $c'L_1$ e $c''L_2$.

La coesistenza di queste due condizioni, dà:

$$(3') \qquad R = \sqrt{c'c''L_1L_2}\,.\operatorname{sen}\varphi.$$

2. — Questa proprietà del descritto sistema di spirali, può anche geometricamente dedursi in modo assai semplice dalla fig. 1. facendo applicazione del noto teorema, che affinchè due vettori alternativi si compongano in un unico vettore rotante (di grandezza costante), è necessario che essi abbiano uguali ampiezze ed occupino nello spazio una posizione angolare supplementare della loro posizione angolare, o di fase, nel tempo. Invero, i due circuiti alternativi $C_1$ e $C_2$ dànno luogo a due campi alternativi diretti secondo le bisettrici degli angoli $\widehat{AC} = \alpha$ e $\widehat{BC} = \beta$, di ampiezze proporzionali rispettivamente a: $2c'\cos\frac{1}{2}\alpha$, e $2c''\cos\frac{1}{2}\beta$, (ossia a: $2c'\operatorname{sen}\frac{1}{2}\psi_1$ e $2c''\operatorname{sen}\frac{1}{2}\psi_2$). e differenti in fase di $\varphi$. Ora, esistono infinite coppie di angoli $\alpha$, $\beta$, (oppure di $\psi_1$, $\psi_2$), che possono soddisfare l'equazione ($1^a$). e fra queste ve ne sarà sempre una che soddisfi anche la equazione ($2^a$): cioè, vi sono infinite coppie di angoli $\psi_1$, $\psi_2$ che forniscono secondo le bisettrici degli angoli $\alpha$ e $\beta$ due componenti di uguale ampiezza, ed una di queste coppie sarà tale che le bisettrici. o i campi componenti, comprendano fra loro un angolo supplementare di $\varphi$:

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180 - \varphi;$$

e siccome è per costruzione:

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180 - \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2),$$

sarà allora:

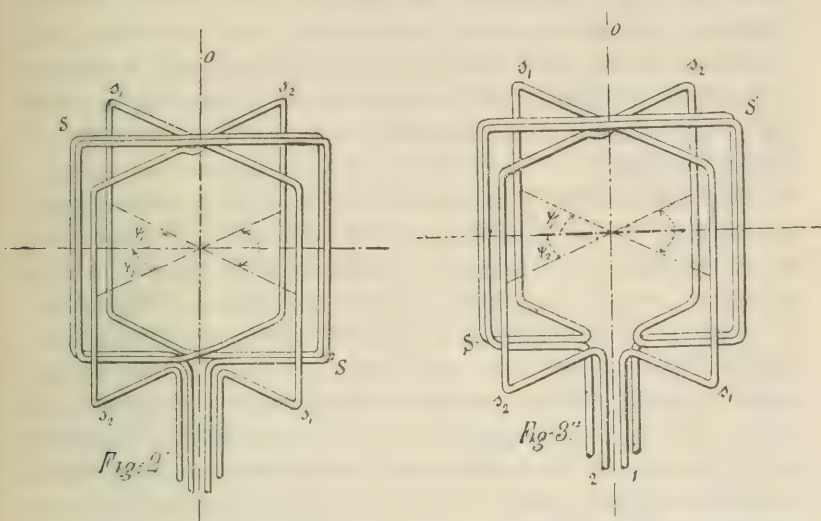
$$\varphi = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2).$$

3. — Ne risultano un metodo ed un apparecchio per la misura simultanea del rapporto delle ampiezze di due date correnti alternative e della loro differenza di fase, con una sola esperienza e la lettura degli angoli $\psi_1$ e $\psi_2$, che hanno la stessa origine.

Basterà immaginare un mezzo qualunque per *analizzare* il campo nel centro del sistema. Può servire a questo scopo, meglio d'ogni altro, il tubo a raggi catodici del Braun, disponendone lo schermo fluorescente nel centro dei tre campi e manovrando le alidade A e B fino a trasformare l'ellisse visibile in un cerchio: la ricerca degli angoli $\psi_1$ e $\psi_2$ non presenta maggiori difficoltà della determinazione, in ottica, di un angolo di deviazione minima, oppure di una incidenza brewsteriana.

Altrimenti, si può ricorrere ad un corpo metallico leggero, assai delicatamente sospeso nel campo, come già praticò Galileo Ferraris: è opportuno a tale scopo un cilindretto di cartoncino chiuso ricoperto di una foglia di stagnola sottile e uniforme, o, meglio, un palloncino di celluloide argentato, sospeso bifilarmente. Siccome il campo ellittico generale, dato dall'azione delle tre spirali, può considerarsi come risultante dalla sovrapposizione di un alternativo fisso e di un circolare, e poichè un campo alternativo fisso non esercita coppia di rotazione sopra un corpo metallico centrato, perfettamente simmetrico rispetto a tutti i suoi piani diametrali, e nello stato di quiete, la coppia dipende solamente dal campo circolare che entra sempre a comporre ogni dato ellittico: questa coppia sarà quindi massima nello stesso tempo che questo campo circolare, cioè quando l'alternativo fisso sarà scomparso, a vantaggio del circolare. Si tratterà quindi di cercare i due angoli $\psi_1$ e $\psi_2$ che dànno la deviazione massima nell'equipaggio sospeso.

Per questo ultimo modo di sperimentare, conviene adottare una disposizione di spirali ampie e concentriche, analoghe a

quelle del classico apparecchio di Ferraris. Le figure 2 e 3 mostrano il complesso delle spirali, ridotte ad una sola spira, circolari o rettangolari, $s_1$, $s_2$, S, nel centro delle quali va sospeso

il corpo metallico, — il quale sarà di dimensioni piuttosto limitate rispetto a quelle delle spirali, poichè il campo ruotante risulta veramente definito soltanto nella regione dell'intersezione dei tre campi.

4. — Il sistema di spirali della fig. 1 costituisce un vero sistema trifasico, il quale, in ragione della sua conformazione geometrica, corrisponde ad un caso più generale del sistema trifasico equiangolo ordinariamente applicato. Tre correnti, comunque difasate fra loro a due a due, possono fornire un campo ruotante costante quando, essendo di uguali ampiezze, le loro posizioni angolari relative nello spazio sieno supplementari delle loro posizioni di fase nel tempo. E si può estendere, come è noto, il teorema ad un numero qualunque di correnti, di fasi qualunque.

Nel nostro caso, una delle correnti, la $c_3$, è una corrente fittizia, equivalente alla somma vettoriale delle due date, $c_1$ e $c_2$, che abbiamo supposto assolutamente qualunque. Se il sistema

è nella conformazione che dà un campo Ferraris costante, un *indotto fisso,* ad anello, per es., bipartito o tripartito, che si trovi in questo campo, potrà fornire un nuovo sistema di correnti difasiche o trifasiche, utilizzabili in un circuito esterno. Abbiamo così un apparecchio fisso che si può chiamare un trasformatore di fasi, poichè da una coppia di correnti $c_1$ e $c_2$, di ampiezze e fasi qualsiansi, esso può ricavare una coppia di correnti in quadratura o una terna di correnti equiangolari, di uguali ampiezze.

Le due correnti $c_1$ e $c_2$ possono d'altra parte essere fornite dal primario e dal secondario di un comune trasformatore; e allora abbiamo un sistema di trasformazione, per ricavare da un'unica corrente alternativa, un sistema difasico o trifasico.

Ma non v'è bisogno di un trasformatore comune intermediario. L'insieme delle tre spirali A, B, C, ne può fare istessamente l'ufficio. Se un'unica corrente alternativa attraversa la spirale A e una delle spirali che fanno parte della C (supposto ora l'apparecchio costruito in modo da presentare autoinduzione e mutuainduzione notevoli), nell'altra coppia di spirali è indotta una fem., la quale a seconda delle condizioni interne ed esterne di impedimento dei due circuiti, come pure a seconda degli angoli di conformazione $\psi_1$ e $\psi_2$, fornirà una corrente $c_2$ di determinata fase e di determinata ampiezza, fra certi limiti.

In conseguenza di che è possibile avere nel centro del sistema un campo Ferraris costante, ricavandone l'energia da una sola corrente alternativa. Il valore di questo campo, per una data corrente eccitatrice $c_1$, potrà essere arbitrario fra certi limiti, dipenderà cioè soltanto dalle condizioni d'impedimento del circuito esterno delle spirali $c_2$, come pure vi saranno subordinati gli angoli $\psi_1$ e $\psi_2$.

Se poi supponiamo che questo *trasformatore* possieda una *armatura chiusa rotante,* le condizioni di funzionamento della trasformazione saranno alquanto modificate: in primo luogo potrà agire come motore a campo rotante, e quindi ad avviamento automatico e a velocità asincrona; in secondo luogo potrà ricevere applicazione a guisa del trasformatore a spostamento di fase di Ferraris e Arnò. In tal caso la corrente secondaria nel circuito $c_2$ è la risultante di due specie di correnti indotte: di quella indotta direttamente dal flusso della corrente eccitatrice

$c_1$ sul circuito $c_2$, e di quella indotta dalle correnti d'armatura sullo stesso circuito $c_2$, correnti a loro volta indotte dal flusso primario e che su di esso anche reagiscono.

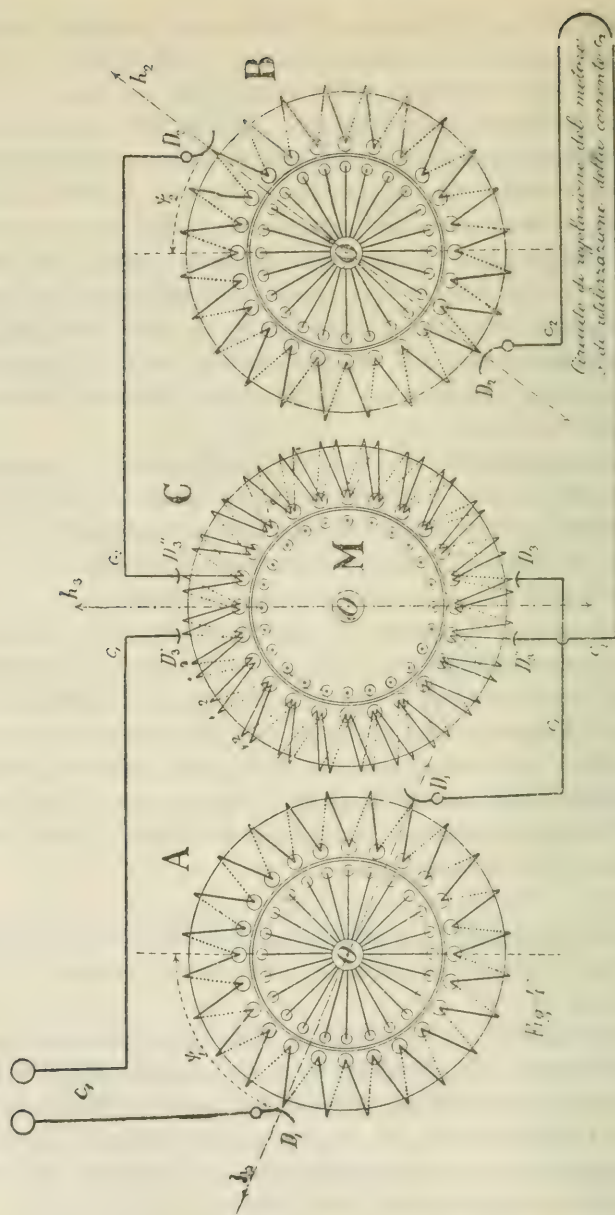
Ciò proviene dalla differente disposizione che hanno gli stessi elementi, primario e secondario, nei due sistemi di trasformatori: è noto che in quello di Ferraris e Arnò i circuiti primario e secondario non esercitano induzione mutua, trovandosi in posizione fissa ortogonalmente l'uno all'altro. Nel sistema ora descritto, invece, esiste una induzione mutua fra i due elementi, composta di una parte costante che spetta al doppio avvolgimento C e che può essere assai preponderante, e di una parte variabile ad arbitrio, che dipende dal valore dei due angoli $\psi_1$ e $\psi_2$.

Questa possibilità di variare il coefficiente di mutua induzione fra il primario e il secondario, è certamente vantaggiosa; inquantochè permetterebbe di regolare precisamente il campo ruotante del motore o del trasformatore a seconda delle variazioni del carico meccanico od elettrico esterno.

La teoria e il calcolo di questo apparecchio potrebbero farsi seguendo lo stesso metodo che il ch. prof. Lombardi applicò al trasformatore a spostamento di fase Ferraris-Arnò, quando si fossero fissate la forma e la distribuzione dei circuiti magnetici; i quali non possono d'altra parte assumere caratteri tanto lontani dallo schema della fig. 1, quanto quelli degli odierni motori industriali a campo ruotante sono distanti dalla classica esperienza di Galileo Ferraris.

5. — La disposizione pratica più conveniente per realizzare un motore a campo ruotante secondo questo schema, è la seguente (fig. 4):

I tre anelli A, C, B, di ferro lamellare, rappresentati nel disegno l'uno di seguito all'altro, si immaginino disposti in tre piani paralleli verticali succedentisi nello stesso ordine, normali all'asse O dell'armatura M, e sostenuti in posizione fissa, magneticamente ed elettricamente isolati, dal castello della macchina. Questi tre elementi corrispondono alle tre spirali omonime dello schema, fig. 1.

A e B hanno un avvolgimento di spirali perfettamente analoghe a quelle dell'anello Pacinotti, solo che sulla faccia

interna dell'anello il filo è sepolto entro opportuni incastri, aperti o chiusi, praticati trasversalmente nella massa lamellare di

ferro. A ciascun incastro può corrispondere una *sezione* dell'avvolgimento, e fra una sezione e la successiva è diramata una sbarra di collettore, simile a quello di Gramme, destinato alla introduzione della corrente per via di un contatto, che può raggiungere una discreta perfezione, e che può venir trasportato ad arbitrio in un punto qualsiasi del collettore. Quindi, se una coppia di contatti diametralmente opposti, come $D_1$, $D_1$ (o $D_2$, $D_2$) poggiano sul collettore, adducendo all'anello rispettivo una corrente alternativa, si produrrà un campo magnetico secondo quel dato azimut $D_1 D_1$ (o $D_2 D_2$), e potremo spostare questo azimut a piacimento in ogni anello, trasportando angolarmente il porta-spazzole diametrale.

L'anello centrale C è analogamente costruito, con la differenza che porta due avvolgimenti distinti, paralleli e isolati, 1 e 2, a ciascuno dei quali le correnti vengono addotte nei punti $D'_3$ e $D''_3$ alle estremità di un diametro fisso, nella figura, il verticale, cosicchè il campo vi assume stabilmente questo azimut, e risulta della somma vettoriale dei due campi prodotti da $c_1$ e da $c_2$ quando queste correnti attraversino i suoi due avvolgimenti. Ovviamente, ad agevolare la regolazione degli angoli di conformazione, anche i contatti $D'_3$ e $D''_3$ potranno spostarsi su due collettori distinti, poichè non v'è altra necessità che il campo $h_3$ sia fisso in una data posizione che quella di servire di origine agli angoli $\psi_1$ e $\psi_2$ (*).

La corrente alternativa eccitatrice $c_1$ entra per $D_1$ in alto, esce per $D_1$ in basso, e percorre l'avvolgimento $D'_3 D'_3$, ritornando di là al conduttore di distribuzione o di linea. L'avvolgimento 2 sull'anello C raccoglie la corrente indotta $c_2$ e la passa sull'anello B per i due contatti mobili $D_2$, $D_2$ diametrali, con l'intermediario di un circuito esterno di regolazione o di utilizzazione.

L'armatura, centrata nel vano cilindrico di questi tre anelli,

(*) Sarà infine vantaggioso per la comodità della manovra dei contatti, il trasportare i collettori *fuori della macchina* e disporli sopra un piano, ciascuno in corrispondenza di un cerchio graduato. Allora i contatti $D'_3$ e $D''_3$ possono restare in posizione fissa, e quindi possono sopprimersi i collettori relativi: la manovra dei rimanenti porta-contatti $D_1$ e $D_2$ su due collettori piani circolari può riuscire assai facile e comoda. Così la macchina può ricoprirsi, ed essere completamente riparata.

può essere vantaggiosamente del tipo Dobrowolsky o Brown, a sbarre o spirali sepolte nel ferro presso la superficie, in modo da ottenere un interferro minimo, e con conduttori distinti diametrali sulle due basi per guidare le correnti indotte nelle regioni più opportune dei campi induttori, i quali invero attraversano diametralmente la massa intera dell'armatura.

I campi alternativi prodotti dai tre anelli in tre piani diversi, creano nell'armatura dei flussi secondo tre direzioni che comprendono fra loro gli angoli $\psi_1$ e $\psi_2$, — di cui la somma dovrebbe valere, nelle ipotesi fatte più sopra, il doppio della differenza di fase fra le due correnti primaria e secondaria, — e che singolarmente dipendono dalle ampiezze di queste correnti. Rimarrebbe a ricercare, col calcolo e con l'esperienza, come il principio esposto venga modificato dalla presenza dei nuclei di ferro negli induttori, primario e secondario, e della armatura ruotante che collega fra loro i tre campi.

Come è noto, è perfettamente indifferente che i campi alternativi componenti si taglino realmente nello stesso piano a traverso l'armatura, oppure sieno situati l'uno allato dell'altro. Come nel motore bifase di Sahulka, i flussi componenti sono in questo caso completamente indipendenti l'uno dall'altro a traverso l'armatura (*), ma la loro azione risultante sulle sbarre di questa deve essere equivalente a quella che eserciterebbe un campo ruotante di valore costante, allorchè fra gli angoli di conformazione del sistema e le varie caratteristiche dei circuiti alternativi esistano le volute relazioni.

---

(*) Specialmente se, come nell'armatura di Sahulka, si ha cura di separare la massa di ferro lamellare M in tre parti uguali, mediante due dischi di materia isolante infilati sull'asse in corrispondenza degli strati di aria separatori, esistenti fra gli anelli induttori A e C, e C e B. Tuttavia, non credo che questo sia necessario a impedire derivazioni longitudinali di flusso nel ferro d'armatura, fra i campi trasversali componenti: le lamine di ferro sono ordinariamente abbastanza isolate l'una dall'altra elettricamente da presentare una sufficiente resistenza magnetica nello stesso senso, di fronte alla grande permeabilità trasversale.

*L'Accademico Segretario*
ANDREA NACCARI.

# CLASSI UNITE

## Adunanza del 24 aprile 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

Della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Cossa, Vice Presidente dell'Accademia, D'Ovidio, Berruti. Naccari, Camerano, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi e Fileti.

Della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Claretta, Direttore della Classe, Peyron, Rossi, Bollati di Saint-Pierre, Pezzi, Ferrero e Nani Segretario.

Il Socio Segretario dà lettura dell' atto verbale dell'adunanza delle Classi unite del 9 gennaio 1898, che viene approvato.

Quindi il Presidente dà la parola al Socio Tesoriere Camerano perchè esponga il rendiconto finanziario così dell'annata precedente, come dell'attuale.

Il Socio Tesoriere legge anzi tutto il conto consuntivo per l'anno 1897, quindi il bilancio preventivo per l'anno 1898, il rendiconto consuntivo dell' eredità Bressa per il 1897, nonchè della Fondazione Gautieri per lo stesso anno.

Tutti questi bilanci sono successivamente approvati all'unanimità, senza osservazioni; ed approvasi pure l'atto del Consi-

glio di Amministrazione per lo scaricamento del Tesoriere per l'esercizio 1897 e di caricamento per l'esercizio 1898.

Si procede in seguito alla elezione del Vice Presidente dell'Accademia, essendo scaduto dalla carica il Socio A. Cossa per compiuto triennio, e riesce rieletto lo stesso Socio A. Cossa per un altro triennio, salva l'approvazione Sovrana.

Essendo anche scaduto il Socio L. Camerano dalla carica di Socio Tesoriere per aver compiuto un secondo triennio, nè più essendo, per tale motivo, rieleggibile, il Presidente, lodata l'opera oculata e diligente da lui prestata a vantaggio dell'Accademia nell'esercizio delle importanti e delicate funzioni affidategli, invita l'Accademia ad addivenire all'elezione di un nuovo Tesoriere per il triennio in corso. Procedutosi alla elezione riesce eletto, salva l'approvazione Sovrana, il Socio E. D'Ovidio.

Il Presidente comunica il Regio Decreto, in data 13 febbraio 1898, con cui l'Accademia venne autorizzata ad accettare l'eredità del compianto Senatore Prof. Tommaso Vallauri. Trattandosi ora quindi di preparare lo Statuto ed il Regolamento per questa nuova fondazione propone che l'Accademia, seguendo il metodo tenuto rispetto alla fondazione Bressa, voglia deliberare che i relativi progetti siano formulati da una Commissione composta dal Consiglio di Presidenza nonchè da quattro Soci eletti per metà dall'una e dall'altra Classe, e sottoposti quindi all'esame ed all'approvazione dell'Accademia.

Approvata tale proposta, la Commissione resta così composta: dal Presidente, dal Vice Presidente, dal Socio Tesoriere e dai due Segretari di Classe, e da quattro Soci due per ciascuna Classe.

Vota anzitutto la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali e riescono eletti i Soci L. Camerano e P. Foà.

Vota in seguito la Classe di scienze morali, storiche e filologiche e riescono eletti i Soci B. Peyron e D. Pezzi.

Propone per ultimo il Presidente, e l'Accademia approva,

che nei giorni primo e otto Maggio, per causa delle solennità patriottiche che si celebreranno in detti giorni, non abbiano luogo le adunanze delle Classi, pur rimanendo libero ai Soci che abbiano da presentare Note per gli *Atti,* o proprie o di estranei sotto la loro responsabilità, di inviarle alla Segreteria rispettivamente prima dei giorni uno e otto di detto mese, salvo a farne regolare presentazione alle rispettive Classi nella seduta immediatamente successiva.

# CLASSE

DI

# SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

## Adunanza del 24 Aprile 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Socii: Claretta, Direttore della Classe, Peyron, Rossi, Bollati di Saint-Pierre, Pezzi, Ferrero, e Nani Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della precedente seduta.

Il Presidente comunica una lettera di ringraziamento del Prof. G. Ascoli per la sua nomina a Socio nazionale non residente della R. Accademia.

Il Segretario, per incarico del Socio non residente Barone D. Carutti, presenta un opuscolo, *Le Général Menabrea Marquis de Val Dora. Notice biographique* (Chambéry, 1898), offerto in omaggio dall'A. Generale Borson, Presidente dell'Accademia di Savoia, e brevemente ne discorre.

Il Socio E. Ferrero, per incarico del Socio C. Cipolla, assente, presenta una Nota, da inserirsi negli *Atti,* del Professore F. Gabotto, *Due assedî di Cuneo (1347-8; 1515) secondo documenti inediti.*

Presenta quindi una Memoria del Dott. A. Segre, intitolata: *La marina militare sabauda ai tempi di Emanuele Filiberto e l'opera politica-navale di Andrea Provana di Leynì dal 1560 al 1571.*

Su detta Memoria riferirà una Commissione di cui il Presidente elegge a far parte i Socii Claretta, Ferrero e Cipolla.

Per ultimo il Socio Claretta, proseguendo la lettura del suo studio storico sulle vicende del feudo della Cisterna d'Asti, considera le condizioni di questo dopo la morte del vescovo Alberto de' Guttuari. Cessata allora la potenza di quella famiglia, gli antichi compartecipanti a quella giurisdizione ripresero l'esercizio dei loro diritti. Nota come ai varii feudatarii venisse ad aggiungersi la famiglia dei Peletta, antichi nobili astigiani. Senonchè essendo stati alcuni di loro reputati correi in un certo assassinio commesso a danno di altri di quella stessa numerosa prosapia, la Corte di Roma, fondata sulle antiche pretese su quel feudo, accampate sin da età remota come fu avvertito, si valeva di quell'accidente per trarne partito a sua volta. L'autore fa conoscere sommariamente nelle varie sue fasi il lungo procedimento giudiziario; e l'energia dimostrata dagli imputati per non lasciarsi pregiudicare in accuse, nelle quali la prova non pareva così limpida e palpante come taluno opinava. Con tutto questo però Sisto IV nel 1476 infeudava la Cisterna ad Antonio della Rovere, denominato dal compiacente estensore della Bolla, *militi saonensi.* Ed intanto, vinte le opposizioni dei commissari nominati a conoscere il procedimento contro i Peletta, che nel Breve del 5 luglio 1477 ritenevansi *diabolica fraude seducti in profundum malorum se precipitantes, animarum suarum salutem negligentes et honorem suum pro nihilo habentes in satanica superbia perseverant ac sententias censuras et poenas huiusmodi adimplere et eis parere negligant in vilipendium et contemptionem sacrorum canonum et eiusdem apostolicae sedis,* caldamente si procurava che avessero ad essere condannati. Ma, tuttochè secondo i documenti venissero i Peletta ritenuti già *tamquam palmitem fructum non ferentem et membra putrida acrioribus armis insurgere, ac eos a commercio fidelium segregare volentes,* nondimeno essi non si lasciavano atterrire, e finivano per vincere in parte, in grazia

della loro perseveranza e del sussidio dei giureconsulti che li assistevano in quella difficile lotta. Quindi è che già il 19 novembre dello stesso anno 1477 seguiva un primo componimento nel castello di Casale alla presenza dello stesso marchese di Monferrato Guglielmo V, vicario imperiale, del duca di Milano, capitano generale, e di altri illustri personaggi. Quel documento dimostrava già esclusa la compartecipazione dei Peletta nel reato loro imputato; il perchè essi già potevano ottenerne l'assoluzione sia nel foro interno che nell'esterno, colla revoca di ogni sentenza e pena, nonchè della censura pronunciata. E mentre intanto veniva pure tolta la confisca sui loro antichi feudi gentilizi di Cortanze e di Cortanzone, essi scendevano a componimento in quanto all'esercizio della giurisdizione sulla Cisterna. E così questo feudo, rimasto pochi anni nella famiglia dei Della Rovere di Savona, cioè nei fratelli e nei nipoti del primo investito, doveva da costoro venire alienato ad un avventuriero di altra regione italiana, come verrà esaminato nel proseguire di questó studio.

# LETTURE

## *Due Assedî di Cuneo (1347-8; 1515) secondo documenti inediti;*

Nota del Dott. FERDINANDO GABOTTO.

In occasione del settimo centenario della fondazione della città di Cuneo, che sappiamo omai sicuramente sorta nel 1198 (1), si publicherà prossimamente un volume di monografie di diversi studiosi su quella città, ed in esso parecchie sono consacrate ai memorandi assedi degli anni 1542, 1557, 1639-41, ecc. Ma di due assedi più antichi non sarà forse più che la nuda indicazione, e certo ad essi non venne assegnata alcuna speciale memoria, per l'ottima ragione che quando venne ideato il piano di quel volume non si avevano intorno ai medesimi notizie particolareggiate. Ora avendo io trovato parecchi documenti inediti — e sconosciuti finora agli storici — dai quali molta luce mi sembra venire intorno a detti assedì, che sono quelli degli anni 1347-8 e 1515, mi è parso non inutile darne comunicazione agli studiosi, prima riassumendone organicamente il contenuto, poi recandoli, almeno nelle parti essenziali, in appendice. Certo, su entrambi si possono anche adesso desiderare maggiori ragguagli, e in queste materie tutta la più scrupolosa diligenza non può assicurare che in avvenire. spesso anche prossimo, non abbiano a trovarsi altri dati maggiori: tuttavia l'accertamento, anche solo parziale, di fatti storici importanti, giova sempre, sia pure in cerchia modestissima, al progresso dei nostri studî.

---

(1) AGOSTINO DUTTO, *Le origini di Cuneo*, Saluzzo, Lobetti-Bodoni, 1891, e *Se gli astigiani e l'abate di S. Dalmazzo del Borgo ebbero parte nella fondazione di Cuneo*, Torino, Clausen, 1894 (Cfr. anche *La valle di Stura dal 1163 al 1200*, Torino, Clausen, 1894); LORENZO BERTANO, *Storia di Cuneo: Medio Evo (1198-1382)*, I, 65 segg.; II, 63 segg., Cuneo, tip. Subalpina, 1898.

I.

Incomincio, naturalmente, dall'assedio del 1347-8. A proposito di questo è a notare anzitutto che i dati finora sconosciuti si riducevano a poche linee del cronista saluzzese Gioffredo Della Chiesa (1), notaio dei marchesi di Saluzzo Tomaso III e Lodovico I, in grado pertanto di aver buone informazioni, e senza dubbio molto diligente, ma del quale, disgraziatamente, non ci sono giunte che copie relativamente assai tarde, in cui sono avvenute trasposizioni ed errori di nomi e di date (2). Il Della Chiesa, adunque, ricorda la dedizione di Cuneo ad Amedeo VI di Savoia ed a Giacomo di Acaia il 7 luglio 1347; quindi, dopo narrati altri fatti — fra cui la presa del castello di Levaldigi, presso Savigliano, il 9 settembre, da parte dell'esercito di Luchino Visconti —, prosegue: “ Habiuto Leualdise, se party et ando [tale esercito] sopra il podere di Conio e prese Caraglo, Ceruascha, Valgrana e molte altre terre che tenieno de Conio, le quale tute se diedero al marchese Thomas [II di Saluzzo], quale era in lo exercito „. Il cronista continua dicendo che i Viscontei presero anche Montemale l'11 novembre, poi andarono “ di la dy Po „, vi stettero “ alquanty giorny guastando sempre le terre dil conte [di Savoia] e dil principe „ ed occuparono Piobesi torinese; da ultimo, detto della caduta anche di Narzole, Roccadebaldi (8 novembre) e Mondovì (29 novembre), Gioffredo rileva come “ di novembre e di dicembre „ tutte “ le terre di Cuneo, eccetto Centallo, „ si fossero arrese a Luchino, e termina, dopo un cenno sulla conquista milanese e monferrina d'Ivrea: “ Nel 1348 a 2 di marzo la terra di Conio se diede al dominio dy missere Luchino, e quasi tuty ly forestiery quy erano dentro per il conte et il principe furono presy: e stetely lo assedio presso a trey mesi „. L'ultimo accuratissimo storico di Cuneo non ha potuto aggiunger nulla a queste poche notizie, ma dopo averle ripetute, conchiude melanconicamente: “ La storia non può nominare a lode alcuno dei valorosi, per-

(1) *Cron. di Sal.*, in *M. h. p. ss.*, III, 983 segg.

(2) Cfr. al riguardo quanto ho notato in *Ric. e st. st. Bra*, I, 186 segg., Bra, Racca, 1892, ed in *Due falsif. di st. piem.*, 26, Torino, Clausen, 1893. Di G. Della Chiesa, come notaio di Tomaso III, ho rintracciato due autografi (atti notarili) che publicherò prossimamente in facsimile.

chè nessuna memoria ce ne resta „ (1). Io stesso altre volte non ho saputo dire molto di più (2): ora, invece, sono in grado di aggiungere molte cose grazie al *Conto* di Manfredo Operti, chiavaro di Cuneo per Savoia-Acaia durante la breve dominazione di Amedeo VI e di Giacomo nel 1347-48, “ Conto „ che si conserva, primo fra i Rotoli di quella “ castellania „, nell'*Archivio Camerale di Torino,* ossia in quella miniera inesausta, e per lungo tempo ancora inesauribile, da cui ho già avuto la fortuna di trarre tante altre importanti notizie.

Il “ Conto „ accennato è un picciol rotolo membranaceo, che in qualche parte ha sofferto parecchio dell'umidità, onde alcune righe sono affatto illeggibili, altre si leggono solo con molto stento. Il guaio è che il caso si verifica appunto nell'intestazione, donde ricaviamo solo — supplisco con puntini le lacune — che Manfredo Operti tenne l'ufficio “ per septem menses et . . . videlicet a die decimaseptima mensis Iulii anno Domini MCCCXLseptimo usque ad diem decimum . . . „. Sette mesi, dal 17 luglio 1347, ci conducono al 16 febbraio 1348, ma l'“ et „ che precede il tratto illeggibile e lo spazio rappresentato da questo ci provano che devono aggiungersi ai “ sette mesi „ parecchi “ giorni „, e dico subito “ parecchi „, poichè la lunghezza del tratto esclude tosto un numero inferiore a “ quatuordecim „, anzi — a rigore — tale lunghezza di spazio vorrebbe un “ vigintiquatuor „ o “ vigintiquinque dies „ o altro numero di pari lunghezza in lettere (27; 29). È vero che questo risultamento ci mette senz'altro in contradizione col testo attuale di Gioffredo Della Chiesa; ma d'altra parte l'espressione “ usque ad decimum . . . „ esclude subito il 2 marzo da lui dato come giorno della caduta di Cuneo. Ora a me pare facile ristabilire il testo del *Conto*, spiegare l'errore del Della Chiesa e trovare ad un tempo la data vera della caduta di Cuneo. Osserviamo anzitutto che, data la circostanza dell'esser l'Operti durato in ufficio sette mesi ed almeno 14 giorni, l' “ usque ad decimum . . . „ non può riferirsi al febbraio, ma al marzo 1348, e

(1) Bertano, Op. cit., I, 400.

(2) *St. del Piem. nella prima metà del sec. XIV*, 233 segg., Torino, Bocca, 1894; *Accenni ined. di st. subalp. (1292-1410) dai “ Conti „ e dai “ Registri Curia „ del Com. di Piner.*, in “ Bollett. stor. bibliogr. subalp. „, I, 201 segg.; *La camp. subalp. del sec. sem. 1347 sec. un nuovo doc.*, ibidem, II, 117 segg.

che inoltre tale espressione non può compiersi in data ulteriore a " decimum quintum „, od al più " decimum sextum exclusive „, " mensis marcii anno Domini MCCCXLVIII „, perchè altrimenti avremmo otto, non sette mesi. Dobbiamo dunque fissare il termine del *Conto* ad un giorno fra il 10 ed il 15 o, al più, il 16 marzo. Ma vi sono ragioni speciali per fissarlo di preferenza al 10 od all'11. Per fissarlo all'11, basta pensare che un primo copista di Gioffredo Della Chiesa abbia trascritto un originario " XI „ di questo in " 11 „, e che poi un secondo abbia creduto romane le cifre arabiche della trascrizione ed abbia convertito l'" 11 „ in " 2 „. Per fissare detto termine al 10, convien notare che la forma della X usata da Gioffredo è — come appare dai suoi autografi — alquanto somigliante a quella di una Y minuscola, onde facile una trascrizione " *y* „, poi " *ij* „ e finalmente " 2 „. Il *Conto* dell'Operti andrebbe quindi dal 17 luglio 1347 al 10 od all'11 marzo 1348 (Documento I).

Premesse queste osservazioni sul documento che ci fornisce nuovi preziosi ragguagli sulla prima dominazione sabauda in Cuneo e sull'assedio del luogo nel 1347-48, passiamo ad esaminarne il contenuto, mettendolo in relazione con quanto già si conosce al riguardo.

La storia della campagna subalpina del 1347 e dei primi mesi del 1348 è ancora da fare, nonostante i miei diversi tentativi di ricostruirla, già precedentemente accennati. Tuttavia, valendomi del materiale già adoperato altrove, e del nuovo che ricavo dai molti *Conti* di tutte le castellanie sabaude contenuti nell'*Archivio Camerale* torinese, ecco quanto si può mettere in sodo.

Sconfitti i Provenzali nel combattimento di Pollenzo (13 novembre 1346), tutte le potenze subalpine si gettarono, arpie voraci, sugli Stati della regina Giovanna in Piemonte; e prima Luchino Visconti, signore di Milano, s'impadroniva di Alessandria e di Tortona, poi il suo podestà di Asti entrava pure in Bra, sottometteva i signori di Santa Vittoria e fortificava Fontane sul territorio reginale di Cherasco. Anche il marchese di Monferrato, Giovanni II Paleologo, si apprestava ad invadere il territorio di Chieri, spettanza della Regina, e sulla fine di aprile 1347 s'impadroniva del castello di Vergnano, mentre Giacomo principe di Acaia, stretta alleanza con Amedeo VI di

Savoia — ossia col conte di Ginevra e col sire di Vaud, tutori di lui — armava pur egli, in apparenza a difesa, in realtà ad occupazione degli Stati subalpini della Casa di Angiò (1). Dopo aver negoziato con Chieri fin dal gennaio per mezzo di un Antonio Sicco (2), il Principe traeva in soccorso del luogo, stretto di assedio nel maggio dal Paleologo, al campo del quale non mancavano le spie sabaude (3). Invano Giovanna di Napoli aveva creato un nuovo siniscalco di Piemonte in persona di Nicolò Barale (4) ed invocata la mediazione di Papa Clemente VI, che non molto prima aveva prolungato ufficialmente di due anni la tregua triennale stabilita dal cardinale Guglielmo Curti in suo nome, nel 1343 (5). Il 6 maggio, il Pontefice rimproverava Luchino Visconti dell'assedio posto a Chieri dalle genti di lui e del marchese di Monferrato, e delle minaccie a Fossano, Cavallermaggiore ed altre terre di Acaia, secondochè era stato informato da Amedeo VI e da Giacomo (6); ma già questi ultimi avevano omai combinato coi Chieresi la dedizione a sè della lor terra (7), ed il conte di Ginevra, arrivato a tal fine a Susa l' 8 del mese (8), vi si faceva precedere da Francesco de Chignin, castellano di Susa stessa, con 27 uomini d'arme (9). Tali forze, aggiunte a quelle già prima inviate dal Principe, bastarono a suscitare un moto che cacciò il vicario angioino e condusse il 19 i borghesi a darsi a Savoia e ad Acaia con atto solenne, avente ogni apparenza di spontaneità (10). In quel momento, Savoia e Milano procedevano ancora così d'accordo che dal 29 maggio al 19 giugno andarono e stettero a Milano appunto due rappresentanti di Amedeo VI — Aimone di Verdun,

(1) *St. del Piem.*, 220 segg.

(2) *Arch. Camer. di Tor.*, *Conto Castell. Tor.*, Rot. XXI.

(3) *Ibidem*, *Conto Castell. Rivoli*, Rot. XLV.

(4) G. Della Chiesa, 982, scrive erroneamente " Bolleri ", onde così ho ripetuto io, altri congetturando " d'Eboli " (Barelli, in " Bollett. stor.-bibl. subalp. ", I, 22). Pel nome esatto v. doc. in " Arch. st. napol. ", XXI, 689.

(5) *St. del Piem.*, 205 segg.

(6) Cerasoli e Cipolla, *Clemente VI e Casa Savoia*, 29, n. xxxix, Torino, Stamperia Reale, 1898 (estr. dalla " Miscell. st. ital. ", s. III, t. V).

(7) *Arch. Camer. di Tor.*, *Conto Castell. Riv.*, l. c.

(8) *Ibidem*, *Conto Castell. Susa*, Rot. XXX: " pro tractatu de Cherio ".

(9) *Ibidem*, l. c.

(10) *St. del Piem.*, 227.

castellano di Rivoli, e Lancilotto di Châtillon, futuro balivo di Val di Susa — a negoziare con Luchino Visconti “ affinchè non impedisse l'acquisto di Chieri „ (1).

Il Visconti ed il Paleologo avevano rivolto altrove le mire: il 30 maggio assediavano Alba, che presero in capo a 18 giorni (2), troppo tardi inviando Clemente VI ordine a Sancio Canale, uditore del palazzo apostolico, di far osservare le tregue, ed ai vescovi astese ed albese di dar aiuto agli ufficiali della Regina (3). È a questo punto soltanto che ha luogo l'aperta rottura fra il Visconti ed i Sabaudi. Convocate le sue milizie a Torino il 4 giugno (4), Giacomo di Acaia e il conte di Ginevra s'impadronivano il 15 di Cherasco, il 26 di Mondovì (5). Il Barale, abbandonata Savigliano, dove riprese autorità il giudice generale Manfredo Gorena, ch'era stato gridato “ governatore „ subito dopo la battaglia di Pollenzo (6), andò a sollecitar l'opera del Papa, che il 13 luglio lo rinviava a Giovanna (7), non senza aver riscritto l' 8 al Canale, e diretto il 10 Giordano, vescovo di Trivento, ad Amedeo VI, ai tutori di lui, al marchese di Monferrato ed al principe di Acaia con credenziali “ per la pacificazione „ del Piemonte (8). Clemente VI, anzi, il giorno 11 di quel mese stesso di luglio, dava pure missione a Matteo Ribaldi, vescovo di Verona, di recarsi in Piemonte a procurarne la pacificazione e ad invitare tassativamente “ tutti gli ufficiali reginali, marchesi, conti, visconti, baroni, magnati, nobili, comunità, università, popoli ed individui, ad osservare le tregue di cui sopra, ed astenersi da ogni offesa ed ostilità o commozione contro città, castelli, ville e terre spettanti alla Regina o ad altri, *et presertim castri de* Como *Astensis diocesis* „ (9). Così hanno letto gli egregi editori delle bolle clementine, ed in nota

---

(1) *Arch. Camer. di Tor., Conto Castell. Riv.,* l. c.

(2) G. Della Chiesa, 983.

(3) Cerasoli e Cipolla, Op. cit., 30 segg., nn. xl-xlii.

(4) *Acc. ined. di st. subalp.*, 201, n. xvi.

(5) G. Della Chiesa, l. c., *St. del Piem.*, 226, 228.

(6) *St. del Piem.*, 221, 227.

(7) Cerasoli, *Clemente VI e Giovanna I di Napoli*, n. cxlii, in “ Arch. stor. nap. „, l. c..

(8) Cerasoli e Cipolla, 32 segg., nn. xliii-xlviii.

(9) *Ibidem*, 34 segg., nn. xlix-l.

osservano anzi che " Como presso Alba è luogo registrato nella *Bibliogr.* del MANNO, IV, 503 „. Ma " Como presso Alba „ sarebbe diocesi " albese „, non " astese „, com' è detto espressamente nei documenti addotti, e non dubito punto che " Comi „ debba correggersi in " Conii „, cioè Cuneo, il qual luogo rimase effettivamente sotto la chiesa d'Asti fin verso la metà del secolo XV (1). Noi sappiamo infatti che il 7, come scrive Gioffredo Della Chiesa, o il 17 luglio, come farebbe pensare il *Conto* Operti — per quanto la nomina del chiavaro possa essere di qualche giorno posteriore all'acquisto della terra da parte dei Sabaudi —, questi ottenevano Cuneo e vi nominavano " vicario „ Nicoletto Porcello, di Torino; " giudice delle cause civili „ Antonio Baudissone; " giudice dei malefizî „, o cause criminali, Domenico di Ulmeta; " torriero „ della torre della " piazza „ (attuale " via Nizza „) Giacomo Paudo; " chiavaro „ il ricordato Manfredo Operti (DOCUMENTO I). Anche Savigliano venne in potere di Amedeo VI — arrivato in persona a Susa il 23 giugno (2) e disceso quindi in Piemonte — e di Giacomo di Acaia, i quali si ritiravano quindi rispettivamente a Rivoli ed a Vigone, lasciando loro " vicario e capitano generale di tutto il paese oltre Po „ il cavaliere (*miles*) Ugone di Boczosel, cui fu mandato pagarsi parte dello stipendio sui redditi cuneesi (3).

Le rapide conquiste dei Sabaudi, acquisitori in breve tempo della maggior parte dei dominî angioini in Piemonte, dove la parte guelfa li preferiva manifestamente a Milano, a Monferrato, a Saluzzo, commosse, anzi esasperò queste altre potenze, di cui la prima aveva soltanto guadagnato Alessandria e Tortona, la seconda Valenza (19 giugno) e la terza Busca (1 luglio). Sopratutto il vedersi sfuggir Savigliano, su cui contavano affatto, portavane al colmo il dispetto; onde Milanesi e Monferrini avanzarono sul territorio di Acaia (4), dove fu subito un grande agitarsi a riparo (5). Il 17 luglio, Giacomo indiceva

---

(1) Mi si permetta rinviare al riguardo allo scritto *La vita in Cuneo alla fine del M. E.* nell'annunziato volume *Cuneo*, Torino, Roux, 1898.

(2) *Arch. Camer. di Tor.*, *Conto Castell. Susa*, Rot. XXX.

(3) *Ibidem*; Documento I; *St. del Piem.*, 229 segg.

(4) *St. del Piem.*, 227, 229, 231.

(5) *La camp. subalp.*, 117 segg.

l'esercito generale a Piobesi torinese (1): il 26 gli alleati giungevano a Lombriasco, forse sotto colore di un colloquio fra Giovanni II, Amedeo VI ed i suoi tutori per risolvere amichevolmente ogni questione, del che si parlava appunto, anche nelle sfere ufficiali, in quei giorni; il 29, riconvocate le milizie sabaude a Virle, si attendeva dovunque una battaglia campale pel 1° agosto. Pur non ne fu nulla (2). In principio di agosto i collegati di fatto si erano posti a Cavallermaggiore; il 16, Luchino Visconti, Giovanni II di Monferrato e il Delfino viennese stringevano fra loro una solenne alleanza contro Savoia ed Acaia; il 1° settembre essa veniva ratificata da Tomaso II di Saluzzo, che Savoia aveva cercato invano di trarre a sè con blandizie (3). Or questo fatto ci riconduce a Cuneo, dove la parte ghibellina si agitava, ed il *Conto* Operti ci rivela tutta una serie di fatti che dimostrano mirabilmente lo stato d'animo della fazione che desiderava un mutamento di signoria nella terra. Dal semplice sparlare dei " signori „ — il Conte ed il Principe — per cui Luchino Bergerio (od un pastore di nome Luchino?) è processato e condannato a multa, rimessagli poi a metà dal capitano generale Boczosel, si passa al reato più grave di Antonio Bellono, il quale, alla notizia appunto del trattato fra Saluzzo e gli altri nemici di Savoia, pel quale erano riservate al marchese Tomaso tutte le terre cuneesi a nord della Stura, ne dà tosto lieta notizia al fratello Giacomo, soggiungendo che prima del 26 settembre il luogo si sarebbe ribellato, " ed altre cose in derisione dei signori „, e da ultimo si arriva a vere relazioni cogli avversari dello Stato, nonostante tutte le gride in contrario, come fa quel Guglielmo Cutellerio, o coltellinaio, che è poi anch'egli multato in 6 lire astesi, indi graziato di 3 dal Boczosel (Documento I).

Di fronte all' incalzar del pericolo, i tutori di Amedeo VI si erano rivolti di nuovo al Papa per mezzo di Giacomo di Clermont, milite, cui rinviava quegli il 28 agosto con risposta orale, mandando poi l' 8 settembre Guidolo de Calice, milanese, a Luchino Visconti, per iscongiurarlo a metter fine alle sue

(1) *St. del Piem.*, 231.
(2) *La camp. subalp.*, 120 seg.
(3) *St. del Piem.*, 231 segg.

discordie coi Sabaudi (1). Intanto, però, gli avvenimenti precipitavano. Dopo aver minacciato più volte Cavour, di cui riempirono persino i fossati per procedere indi all' assalto (2), i confederati costringevano a patti il castello di Levaldigi (9 settembre), secondochè ci ha già appreso Gioffredo Della Chiesa, la cui data stavolta sembra esatta; quindi, stando al medesimo, venne il nembo a rovesciarsi sopra il distretto di Cuneo. A questo proposito è ad osservare che i documenti escludono in modo sicuro che l'esercito della lega sia rimasto fino all'11 novembre in quelle parti, poi sia venuto a Piobesi torinese, per ritrovarsi da capo il 29 novembre a Mondovì. Ma due ipotesi sono possibili: o la prima spedizione contro il distretto di Cuneo è realmente del novembre, ed allora va posta dopo la mossa su Piobesi; ovvero la data “ 11 novembre „ di Gioffredo vuolsi correggere in “ 11 settembre „. Altra volta io ho inclinato alla prima ipotesi (3), ma ora un miglior studio del testo del cronista e la conoscenza del *Conto* Operti mi fanno ricredere; onde correggendo me stesso — vorrei per l'ultima volta su questo punto —, parmi da ritenersi che dopo la presa di Levaldigi i Monferrino-viscontei facessero davvero una punta a mezzodì, pigliando Caraglio, Cervasca, Valgrana, Montemale ed altri luoghi, che vennero dati al marchese di Saluzzo: in qualche parte, almeno, Antonio Bellono la doveva saper lunga. E forse costui la sapeva più lunga ancora, parlando di una probabile ribellione di Cuneo: è notizia infatti che si era formata una congiura per tradir la terra ai nemici, ma sorpresa una tale Alaisona, moglie di Antonio Filippi, che era andata a far loro un'ambasciata ed ebbe perciò dipoi mozza la lingua, il tradimento fu prevenuto, ed i beni di una parte dei traditori, costretti a fuga, vennero staggiti dal governo. Come dei prodi, così dei tristi giova ricordare i nomi a vergogna ed ammaestramento, onde qui segniamo Bartolomeo, Gilio e Facio Anrici, Cassone Dalmazzo ed il bastardo d'Entraque; e forse, pur troppo, non furono i soli (Documento I). Probabilmente, la scoperta della congiura cuneese fece retrocedere e voltare i collegati da un'altra

(1) Cerasoli e Cipolla, 36 segg., nn. li-lii.

(2) *La camp. subalp.*, 121.

(3) *Ibidem*, 124.

parte. Il 21 settembre essi tentavano di notte Villafranca; il 25, facevano la bravata di porre il campo dinanzi a Torino; ma, il 27, l'accorrere di rinforzi da ogni parte alla città, già in precedenza abbastanza munita, li induceva a ritrarsi verso Piobesi, ch'ebbero allora e dove restarono tutto ottobre, mandando grosse partite a battere intorno la campagna fino a poca distanza da Pinerolo. Il 30, si rivolsero di nuovo a S.-E. (1), girarono intorno a Cherasco, presero Narzole e, l'8 novembre, Roccadebaldi (2). La decisione di Morozzo, di sottoporsi al Visconti mentre l'esercito di questo era accampato sotto Mondovì, fu considerata in Cuneo come un tradimento del chiavaro cuneese di quel luogo, di cui vennero pure sequestrati i beni (Documento I). Ma omai, caduta il 29 anche Mondovì (3), Cuneo stessa stava per essere investita, aprendo così la serie de' suoi lunghi assedî, tra cui questo primo vedemmo già aver durato più di tre mesi.

I difensori di Cuneo, dei quali omai sappiamo i nomi, cioè — giova ripeterli — il vicario Nicoletto Porcelli, il chiavaro Manfredo Operti, i due giudici Antonio Baudizono e Domenico di Ulmeta, il torriero Giacomo Paudo, cui da ultimo si aggiunse forse lo stesso Boczosel, avevano provveduto per tempo alla difesa del luogo. Comprate subito 40 braccia di bocaramo, ne avevano fatto fare o riparare 11 bandiere per distribuirle alle milizie del luogo e del distretto; provvedettero il castello di " porta Borgo „ di viveri — farina, fave, sale —, costrussero un nuovo balfredo ed un mulino a braccia nel castello medesimo, vi fecero riattare anche un forno affinchè non venisse a mancare il pane. Sorvegliati e colti parecchi traditori, come già si è detto, procuravano d'altronde gli ufficiali sabaudi di vivere in buon accordo coll'abate di S. Dalmazzo, al quale davano la sesta parte dei banni a lui spettante in virtù di antichi diritti; procuravano buona e pronta giustizia a norma degli *Statuti* locali, facendo impiccare un famoso ladro e mozzare un orecchio ad un altro;

(1) *La camp. subalp.*, 22 segg. Cfr. anche *Arch. Cam. di Tor.*, *Conto Castell. Riv.*, Rot. XLV; *Conto Castell. Susa*, Rot. XXXI; *Conto Castell. Tor.*, Rot. XXI.

(2) G. Della Chiesa, 984; *St. del Piem.*, 232, colle dovute correzioni, di cui sopra.

(3) *St. del Piem.*, l. c.

mandavano attorno, infine, numerosi informatori a spiar le mosse e gl' intendimenti nemici, e corrieri a Torino ed a Rivoli a trasmettere al governo centrale le notizie raccolte. Il vero nucleo della difesa — oltrechè nelle milizie cittadine dianzi armate, come si è veduto — consisteva in 23 clienti sotto i connestabili Bertolino di Pavia e Filippone Garrone, di Racconigi, i quali, sebbene mercenarî — ebbero in paga 48 lire astesi (L. 129,024 valore metallico; coll'aumento del terzo pel deprezzamento dell'oro, L. 172,032 moneta attuale) — si comportarono valorosamente resistendo così a lungo (1): sappiamo però che il 30 novembre vi erano state mandate anche altre genti da Pinerolo (2), e forse non da quel Comune soltanto. Ma a divertir le forze di Savoia e di Acaia da Cuneo, Giovanni II minacciava Chieri verso la metà di dicembre; tutti i luoghi intorno a Cuneo stessa si davano a Luchino Visconti ed a Tomaso di Saluzzo, secondochè erano sulla sinistra o sulla destra della Stura; pur di quel mese i confederati s' impadronivano d' Ivrea (3). Clemente VI, per vero, non abbandonava i Sabaudi: morto di fresco Lodovico il Bavaro, e rimasto Carlo IV di Boemia, nuovo re dei Romani, senza competitori, il Papa lo invitava il 1° dicembre 1347 ad intervenire in favore di Amedeo VI e di Giacomo di Acaia, facendogli rilevare la devozione che i loro antenati avevano mostrato verso l'avo di lui — Enrico VII — e la convenienza di conservar loro gli " accresciuti „ dominî; ed al Boemo anche il governo savoino mandava l'11 un ambasciatore. Il 16, anzi, veniva dal Pontefice deputato nuovo paciere Giovanni vescovo di Forlì (4), ma prima ch'egli potesse far valere l'opera sua, fallito un tentativo di soccorso per cui — probabilmente — fu mandato Corrado Borgna, chiavaro di Torino, a Savigliano, Fossano e Cherasco (5), Cuneo cedeva al diuturno assedio, forse per un tradimento riuscito dei ghibellini locali, se proprio si ha da leggere " *prodicionem* „ anzichè " *perdicionem* „ sulla fine del *Conto* Operti (6). La resistenza, ad ogni modo, era stata gloriosa,

(1) Documento I. Nel 1342 il denaro astese valeva metallicamente 0,224 (CIBRARIO, *Econ. polit.*, 4ª ed.).

(2) *Alc. acc. di st. subalp.*, 291, n. XVIII.

(3) *St. del Piem.*, 233 segg.

(4) CERASOLI E CIPOLLA, 40 segg., nn. LVII e LVIII, e note.

(5) *Arch. Camer. di Tor.*, *Conto Castell. Tor.*, Rot. XXI.

(6) Paleograficamente il " prodicionem „ è fuori dubbio.

ed i prigioni savoini furono presto liberati per la pace indi a poco stipulata a mediazione del vescovo forlivese — il 29 aprile 1348 (1).

II.

Non meno importante, e più ancora che per sè, per le sue cause e per le sue conseguenze, l'altro assedio del 1515, sebbene di durata molto più brevi. Le fonti sono le seguenti: 1° Un passo della *Cronaca* di Dalmazzo Grasso, edita da Domenico Promis (2); 2° Un altro passo del *Memoriale* di Giovanni Andrea Saluzzo-Castellar, testo edito anch'esso da Vincenzo Promis (3); 3° Un atto notarile del 5 agosto 1515 conservato solo per copia non sincrona nella *Biblioteca Civica* di Cuneo, contenente una convenzione fra il Comune di Cuneo ed alcuni capitani svizzeri (Documento II); 4° Una patente di Carlo II (III), duca di Savoia, dell'8 novembre 1516, esistente per minuta nell'*Archivio di Stato di Torino*, e per originale nell'*Archivio Comunale di Cuneo* (Documento III); 5° Alcuni " Ordinati „ del Comune di Cuneo, nell'*Archivio* del medesimo (Documento IV); 6° Una " Notizia „ accodata a certo " *Paschino* „, del sec. XVI cadente, nella *Biblioteca Civica di Cuneo*, ma pur essa soltanto in copia più tarda (Documento V); 7° Un passo del c. 20, inedito finora, di quella cronachetta latina di Cuneo (*Summarium breve chronicarum Cunei*) da cui Domenico Promis ha estratto e publicato la parte che riguarda il bandito Torresano (4), pel qual passo mi valgo, anzichè del codice confuso della *Biblioteca di S. M. in Torino*, di quello un po' migliore della *Biblioteca Civica di Cuneo* (Documento VI).

Siamo dunque in presenza di un fatto, di cui, se parecchie fonti sono finora inedite e sconosciute, altre si trovano a stampa o da tempo vennero adoperate anche manoscritte, ma per questo fatto non attrassero l'attenzione degli storici nostri (5). Con-

(1) *St. del Piem.*, 235. Il " 29 dicembre „ è ivi un errore grafico che, dato il contesto, il lettore intelligente corregge di per sè.

(2) In *Misc. st. ital.*, XII, 336.

(3) *Ibidem*, VIII, 531.

(4) *Ibidem*, XII, 399 segg.

(5) Non posso considerare come tale il troppo noto Partenio, *I secoli di Cuneo*, 114 segg., tante sono le sue confusioni ed invenzioni; e troppo breve è il Turletti, *St. di Savigl.*, I, 172, che vi consacra alcune parole.

viene pertanto prendere a base della narrazione il Grasso ed il Saluzzo-Castellar, ma tenendo sempre ben presenti le altre fonti, sia per compiere, sia per rettificare, sia anche solo per confermar quelle due, il che, trattandosi di cronache, è sempre opportuno a maggior sicurezza del racconto.

Dalmazzo Grasso e Giovan Andrea Saluzzo-Castellar si pongono, naturalmente, da un punto di vista molto diverso. Il secondo, che scrive memorie personali, essendosi trovato mescolato nella grande storia del tempo, ha dinanzi a sè un orizzonte più largo; il primo, all'incontro, non vede molto più in là del suo Borgo San Dalmazzo e della vicina Cuneo, al più spinge l'occhio fino a Mondovì o registra seccamente fatti generali di cui è giunta l'eco fino a lui, senza intravvederne, fuorchè per caso alcuna volta, la connessione cogli avvenimenti locali. Così il Saluzzo-Castellar descrive a lungo lo scorrere delle compagnie svizzere del vescovo eletto di Sion, mandate in Piemonte dai collegati — Papa, Spagna, Milano etc. — per impedire il valico ai Francesi che sotto il nuovo re Francesco I si apprestavano a superare le Alpi ed a ritentare la conquista della Lombardia. Egli non tralascia l'occasione del sacco di Saluzzo e di tutto il marchesato da parte di quei venturieri, che ricorda aver avuto a capo un rappresentante del duca di Milano, senza scagliarsi aspramente, in una digressione abbastanza lunga, contro la dissennata politica della marchesana Margherita di Foix; dopo di che prosegue: " L'anno sopradito (1515), a iorni XXVIII de lugno li Sviceri che herano a Saluce andareno a Centalo chon quatro pece (pezzi) de artegliaria grossa et circha pece XV de menuta et passareno per Votignascho, et per defecto de li homeni de la terra la asachamanarono et qussì lo chastelo et brusareno meza la terra, et a Centalo in la vila non gli fesano tropo dano se non de mangiare perchè gli homini gli aviano dati mile fiorini, il chastelo lo sachamanareno tuto et lo champo non gli stete che doi iorni et poi andò a Qunio lo primo iorno de osto (*agosto*), et queli de Qunio hamasareno asai Alamani li quali bombardaveno la terra, et queli dentro et masime lo populo menuto se defandiano benissimo: tuta[via], per essere in la terra parte giebelina et verfa, et poi che li Sviceri desfasiano le terre per lì intorno et le sachamanaveno et brusaveno le chasine che erano piene de biade et de feno.

se hachordareno con questi Sviceri che se ne andaseno et che gli dariano quatro milia duchati, et cussì li Sviceri acetareno volentera il partito perchè sentiano che li Fransosi pasavano li monti, et gli fu dato per ostagio quatro homeni et se levareno de là et poi ritornareno a Saluce et pasareno per Buscha alla quale gli dareno uno mezo sachamano, et questo a iorni VI de ost, et steno l'ultima volta a Saluce iorni sete et il setimo iorno se partireno et andareno dormire a Chavor per anderse unire chon quelli che herano a Pinerolo et chon il cardinale de Sion „. Per il Saluzzo-Castellar, adunque, la mossa degli Svizzeri su Cuneo è un episodio del loro aggirarsi pel Piemonte a depredare in attesa di battersi coi Francesi, che cominciarono a passare appunto il 10 agosto. Egli rileva solo che la notizia dell'avvicinarsi di questi li indusse volentieri a scendere ad accordi coi Cuneesi, e che questi si comportarono valorosamente, nonostante le divisioni interne, come rileva anche l'anonimo autore del *Summarium chronicarum Cunei*. Per contro, il Grasso, dopo aver ricordata sotto l' anno 1514 la formazione “ d'una liga guelpha con uno caporale appellato il Tonduto „ e le violenze di questi facinorosi “ quali . . . . non stimavano vicari, nè officiali, tutti minacciando, chiudevano le porte agli archieri del Duca, e non permettevano che entrassero dentro la terra „, facendo “ quello che a loro pareva e piaceva „, prosegue, dopo un'altra notizia che ora non interessa, in questi termini: “ Quest'anno (1515) per permissione del duca Carlo II vennero li Sguizeri, sotto il regimento del vescovo ovvero cardinale de Siono condotti, posero campo attornio Cunio per aver serrato le porte agli archieri ducali, volendo pigliar lo Tonduto con li leoni suoi compagni, et battendo le mura verso Nostra Donna del Bosco con morte di più valorosi da una banda e dall'altra, benchè già ruinato avessero parte delle muraglie. Avendo nuove della venuta del Xristianissimo re Francesco con suo esercito di Francia contro loro, partendosi dall'impresa menorono .... (1) Bollero, Gioanne Reuello et ....., quali pensando fugire se erano con corde sospesi giù delle mura, erano stati prigioni, conducendoli con loro, facendoli tirar le artiglierie, quali condussero in Alemagna, a Berna et Friborgo, avendo loro fatta la ransone di ..... scudi, la rimisero al duca loro signore „.

(1) Qui e sotto i puntini sono nel testo a stampa e rappresentano lacune.

Questo racconto del Grasso coincide in parecchie cose con quello del Saluzzo-Castellar, ed in altre le due narrazioni si compiono mirabilmente. Ma l'intonazione generale è sostanzialmente diversa. Pel Grasso, gli Svizzeri sono quasi mandati dal duca di Savoia per punire “ il Tonduto „ ed i “ leoni „ suoi compagni, e la loro spedizione è un fatto isolato. A tale proposito, noi possiamo veder subito come questo del Grasso sia un errore; ma, d'altra parte, dobbiamo proprio ritenere che l'assedio di Cuneo del 1515 sia puramente e semplicemente un episodio di “ scorrerie „ svizzere, e che il Tonduto ed i suoi siano dal cronista locale tirati in ballo senza ragione? I nuovi documenti illustrano e chiariscono tutto l'avvenimento, mettendolo nella sua vera luce e rilevandone tutta l'importanza, tanto più tenendo conto anche di altri dati che servono di necessario e mirabile contorno al quadro principale.

La condizione di Carlo II tra i collegati, da una parte, ed il re di Francia dall'altra, è ritratta con viva fedeltà dal suo storico ufficiale, Domenico Macaneo, il quale rileva da una parte i doveri del Duca verso l'Impero e l'antica alleanza coi Cantoni elvetici, dall'altra la parentela e la minacciosa potenza del giovane re di Francia suo nipote. Finge lo storico — ma è cosa assai probabile — che si discutesse nel suo consiglio questa situazione: certo, fu risolto di concedere il passo ad entrambi gli eserciti, con che rispettassero il suo territorio e pagassero quanto ognuno vi prendesse (1). Giovenale d'Acquino, altro cronista sabaudo del tempo, biasima questo provvedimento lodato dal Macaneo, e ne getta la colpa sui “ cattivi consiglieri „ di Carlo; ma entrambi si accordano, tra loro e col Saluzzo-Castellar, nel descrivere lo strazio del Piemonte per parte degli Svizzeri; anzi il D'Acquino attribuisce a questi l'intenzione di impadronirsi del paese, racconta che il celebre Prospero Colonna, comandante di una parte degli alleati, si faceva chiamare per ischerzo “ il conte di Carmagnola „, “ marchese di Saluzzo „ un fratello del vescovo di Sion, e “ duca di Savoia „ il vescovo stesso, e con quel suo dire bonariamente efficace conchiude: “ Il nostro illustrissimo signor Duca non sapeva che fare, se non aver pazienza; pur sperava in Dio come i suoi sudditi, cioè

(1) *Vitae novem ducum Sabaudiae,* in *M. h. p. ss.*, 820.

i buoni, perchè ve n'eran di quelli che davan mano a quei ribaldi Tedeschi „ (1). In questo stato d'animo, Carlo II, al quale il Castellar ci ha fatto sapere risparmiata solo Torino in cui risiedeva, non doveva certo conferire un incarico agli Svizzeri come quello che il Grasso vuol loro affidato contro Cuneo; ma noi sappiamo però che in Cuneo era veramente " parcialità grande „ (2), e che ad arrestare il " Tonduto „ fu mandato Girolamo Aiazza, cui gli abitanti, teneri di lor franchigie in materia giudiziaria, chiusero in faccia le porte (3). Ora lo stesso Grasso ci apprende poco dopo che, discesi in Piemonte i Francesi, " questi parziali delle compagnie dei Leoni, cioè il Tonduto con alquanti soi seguaci „, andarono " con lo esercito del re di Francia verso Milano „: essi erano dunque guelfi, fautori di Francesco I. È vero che alcune fonti (4) dicono esplicitamente che i borghesi di Cuneo furono concordi in ributtare gli Svizzeri; ma questo affermano non senza qualche meraviglia, e l'anonimo autore del *Summarium breve*, il quale prudentemente osserva quanto sia pericoloso resistere agli ordini della legittima autorità, consiglia ad obbedirvi e poi protestare dopo l'obbedienza prestata, e ricorda quanto accadde ad altre terre che vollero tener testa agli Svizzeri nel 1515 (5) — di tale concordia ringrazia ingenuamente Iddio, a cui ne attribuisce ogni merito (Documento VI). È dunque probabile che, se, considerato quanto accadeva intorno, tutti furono d'accordo di far fronte ai depredatori stranieri, il principal nerbo della resistenza fu del Tonduto e dei suoi, che il Grasso in particolar modo ricorda, mentre un altro documento, del secolo XVI indubbiamente, nota il " robur „ fermo di " pauci cives „ (Documento V). L'occupazione di Cuneo avrebbe chiuso a' Francesi il valico dell'Argentiera, per cui discese Francesco I col grosso delle sue forze, passando quindi per Borgo San Dalmazzo e per Cuneo,

(1) *Chron., ibidem*, 734 seg.

(2) Dalmazzo Grasso, 337. Cfr. i molti supplizî ch'ebbero luogo in Cuneo in quegli anni, in *Arch. Camer. di Tor.*, *Conto Castell. Cuneo*, voll. LXXII-LXXIII.

(3) Doc. III. Cfr. *Arch. Camer. di Tor.*, *Conto Tes. gen. Sav.*, vol. 1514-1515.

(4) Saluzzo-Castellar., l. c.; Documento VI.

(5) Caso di Chivasso, su cui Saluzzo-Castelar, 533; Miolo, *Cron.*, in *Miscell. st. ital.*, I, 163; Macaneo, 322; D'Acquino, 36.

dove fu accolto ed ospitato come amico (DOCUMENTO IV). Questa circostanza, mentre conferma ciò che or ora si è detto sulla resistenza di Cuneo specialmente da parte dei seguaci del Tonduto, mostra pure come la mossa degli Svizzeri su Cuneo avesse un obbiettivo militare di primissimo ordine. I capitani degli alleati dovevano comprendere, e saper forse per informazioni, che la discesa d'una parte delle truppe del Cristianissimo pel Colle dell'Agnello era solo una finta, od al più una mossa laterale: di qui la spedizione su Cuneo con artiglierie; l'assalto vivace, dopo aperta la breccia con un cannoneggiamento nutrito: la persistenza per ben quattro giorni, dall'1 al 4 agosto, con morti da ambe le parti. La forte difesa e l'annuncio dell'avvicinarsi dei Francesi — giacchè non possono essere che genti di Francia quelle che vennero indi a poco regalate dal Comune cuneese " per esser venute in soccorso „ oltre le truppe che già vi erano ausigliari ed i borghesi (DOCUMENTO IV) — decisero naturalmente gli Svizzeri a ritirarsi, conducendo seco qualche prigioniero, cioè quei tali catturati mentre tentavano calarsi con una fune dalle mura e che noi apprendiamo dai nuovi documenti esser stati Bernardino Bolleri, Lodovico Miglia e Giovanni di Revello. Il desiderio di liberare i prigioni e di affrettar la partenza di quei predoni che disertavano le campagne, ottenendo anzi la restituzione della preda, indusse i reggitori di Cuneo a mandare ambasciatori a negoziare coi capitani svizzeri, che i nuovi documenti si fanno pure conoscere nelle persone di Giachino o Gioachino de Molzanis, comandante in capo di quel corpo; Giovan Rodolfo de Gaspar, e Giovanni Cender, bernesi; Enrico Usar, di Luserna; Corrado de Fleur, di Unterwald, e Giovanni Hayd di Friburgo (DOCUMENTO II); — quando battevano omai già definitivamente in ritirata verso Saluzzo coi loro 6 o 7 mila uomini (1). Fu in Busca che si convenne il 5 agosto la partenza dei venturieri da tutto il territorio cuneese: la restituzione reciproca della preda non commestibile — ne avevano dunque fatta anche i borghesi e le loro genti sopra gli assalitori —; il riscatto, infine, dei prigionieri mediante sborso di 4000 scudi d'oro del Re del Sole, di cui 400 in giornata, 600 entro l'agosto e gli ultimi 3000 a tutto

(1) 6000 secondo il SALUZZO-CASTELLAR, 523; 7000 secondo il Docum. V.

il 5 settembre. Ma per queste somme dovevansi dar tre o quattro ostaggi, ed i negoziatori non ne seppero trovar neppur uno. Eppure erano dessi persone autorevoli, perchè se non è cenno del " vicario „ Sebastiano di Scalenghe dei conti di Piossasco, che forse era assente (1), rappresentavano il Comune in quel trattato suo fratello Giacomo, forse luogotenente del medesimo; il giudice Aimone de Feis dei signori di Piobesi, della stessa famiglia (2); Bernardino Chivaleoni, dottore in ambe leggi ed avvocato del Comune, e Bernardino Margaria, di uno dei più cospicui casati del luogo. Conseguentemente, a norma di un patto espresso della convenzione, gli Svizzeri ritennero come ostaggi i tre prigioni (Doc. II e III), di cui il Grasso ci ha narrato indi i casi pietosi, finchè interpostosi il duca Carlo II — il quale intanto aveva accolto e festeggiato molto in Torino Francesco I di Francia, e seguitolo poi a Milano (3) —, ottenne dai Cantoni la liberazione dei tre Cuneesi. Per il che il Comune, mandatigli in ottobre 1516 alcuni ambasciatori per aver pace e quitanza d'ogni debito al riguardo e d'ogni pena per la chiusura delle porte in faccia all'Aiazza, convenne di pagargli 1300 scudi del Sole. Ratificato l'accordo dal Consiglio comunale il 3 novembre (Documento IV), di nuovo andarono al Duca, in Fossano, Leonardo Grassi, giureconsulto, Francesco Ferreri, Giovan Raffaele Alasia ed Andrea Miglia, i quali, obbligatisi in detta somma di 1300 scudi d'oro del Sole verso Luigi Gallarate, tesorier generale di Savoia, ottennero da Carlo II che la considerasse come pagata e rilasciasse quindi l'8 lettere patenti di assoluzione e di quitanza (Documento III). Il pagamento effettivo fu deliberato in realtà soltanto cinque giorni dopo, presa visione delle lettere ducali; e finalmente il 23 gennaio 1517 fu saldato anche un ultimo conto con Filippo Corvo, che aveva ricevuto le somme già mutuate al Comune per pagar la prima rata agli Svizzeri ed il soldo agli armigeri " che erano stati alla difesa del luogo „ e di quelli " ch'erano venuti in soccorso „

(1) Ch'egli sia stato vicario di Cuneo dal 1° maggio 1515 al 15 maggio 1516 v. *Arch. di Tor.*, *Conto Castell. Cuneo,* Prot. XXIV, e cfr. anche *Arch. Com. di Cuneo, Ordin.*, Vol. IX, f. 45 *v.*

(2) Ch'egli fosse " giudice „, *Arch. Com. di Cuneo,* l. c., f. 51.

(3) Macaneo, 823; D'Acquino, 736; Lambert, *Mémoires*, 846.

nell'agosto 1515 (DOCUMENTO IV). È questo l'ultimo accenno all'assedio; e se vero, come ho cercato dimostrare, che la resistenza dei Cuneesi giovò a permettere od almeno a facilitare la discesa di Francesco I, la quale fu in tale circostanza salvezza al Piemonte, conculcato dagli eserciti della Lega, anche allora furono essi benemeriti di tutta la regione subalpina e della Casa Sabauda, cui negli assedî posteriori dovevano rendere non minori servigî (1).

---

## DOCUMENTI.

I. — *Estratto del Conto di Manfredo Operti chiavaro di Cuneo* (1347-1348).
(*Arch. Camer. di Tor., Conto Castell. Cuneo*, Rot. I).

Computus Manfredi Operti clavarii Cunei constituti . . . per septem menses et [? viginti quinque dies] videlicet a die decimaseptima mensis Iulii anno Domini millesimotricentesimoquadragesimoseptimo usque ad diem decimum [(? primum) mensis marcii anno Domini MCCCXLVIII].

Item reddit computum de . . . frumenti inventis in domo Gilii Hanrici et Bartholomei . . . propter prodicionem que fieri temptaverunt de dicto loco et poderii . . .

Recepit de bonis inventis in domo Cassoni Dalmacii pro eodem . . .

Recepit de bonis bastardi illorum de Intraguis pro eodem . . .

Recepit de bonis clavarii Morocii pro eodem . . . Pro quadam domo quæ fuit Facii Hanrici proditoris . . .

Recepit de Anthonio Bellono de dicto loco Cunei quia ad gaudium debuit intimare Iacobo Bellono, fratri suo, quod omnes terras ultra Sturiam de iurisdicione Cunei debebant reddi marchioni de Saluciis per eius literas, et quod antequam essent tres dies ante festum beati Michaelis locus rebellaretur, et plura alia in derisionem dominorum [comitis Sabaudie et principis Achaie], condempnato in quingentis libris astensibus, vj libras; et residuum debebat et non potuit ipsum residuum habere.

Recepit de Guillelmo Cutellerio (2) quia mittebat literas in terra[m] inimicorum contra cridas, et tantundem sibi remisit dominus Hugo

---

(1) Non posso terminare senza una parola di viva riconoscenza all'egregio direttore dell'*Archivio Camerale torinese*, cav. Giacomelli, per le continue cortesie, ed al signor Lorenzo Bertano di Cuneo, al quale stavolta, come sempre, sono debitore di quel copioso e valido aiuto ch'egli suol dare a quanti si occupano della sua città, da lui così ben illustrata per l'epoca 1198-1382.

(2) Nel *Conto* " cutellerius „ è scritto colla minuscola, e può esser tanto cognome quanto semplice designazione di mestiere.

[de Boczosello] capitaneus ex baylia ei concessa a dictis dominis . . . libras tres.

Recepit de Luchino Bergerio (1) quia dixit verba iniuriosa de dominis predictis, remissa sibi medietate per literas domini Hugonis capitanei . . .

. . . pro salario Anthonii Baudizoni iudicis civilium [causarum] . . .

Libravit in quodam balfredo facto intus castrum Cunei . . .

Libravit in quodam molandino de brachio facto de novo intus castrum pro municione dicti castri . . .

Libravit in quodam furno intus castrum altando . . .

In iusticiis factis de Mondano Mirano qui propter furta fuit suspenssus, et de Minacio, cui fuit incissa auricula, et de Alaysona, uxore Anthonii Philippi, cui fuit incissa linga pro quadam ambassata facta per ipsam inimicis et pro expensis ipsorum, et pro duabus aliis mulieribus frustandis, et pro eorum comestione per quadragintaquatuor dies, datis tribus denariis astensibus cuilibet ipsorum in die, in duobus paribus compedum emptis de novo, et pro uno magno soastro pro malefactoribus tormentandis, xxxi solidos vii denarios.

In pluribus et diversis nunciis missis et spicis pro pluribus et diversis negociis dictorum dominorum ad plura et diversa loca, tam ad partes terre inimicorum, quam apud Taurinum et Ripolas ad ipsos dominos causa notificandi nova per tempus de quo computat . . . et assendit ad magnam quantitatem occasione magne guerre — iiii$^{xx}$iiii libras, xii solidos,

. . . in salario Iacobi Paudi torresani turris platee . . .

Libravit in parte salarii domini Hugonis de Bozosello, militis, capitanei et vicarii generalis constituti per dominos supradictos tocius terre ipsorum dominorum ultra Padum . . . et allocantur per literas dominorum predictorum datas die xxv Iulii MCCCXLVII . . .

In parte salarii Nicoleti Porcelli, civis Taurini, vicarii constituti per predictos dominos in dicto loco Cunei et poderii . . .

Dominicus de Ulmeta iudex maleficiorum ibidem constitutus . . .

Libravit [clavarius] domino fratri Stephano vicario domini abbatis Burgi capientis sextam partem in omnibus bannis qui exiguntur in Cuneo et in Burgo ex consuetudine, que banna, de quibus supra computavit, assendunt ad quingentas sexaginta tres libras, duodecim solidos, decem denarios astenses — iiii$^{xx}$iii libras, vi solidos, v denarios.

Libravit ad stipendia Bertulini de Papia et Philiponi Garoni de Racunisio, conestabilibus (*sic*), recipientibus pro se et viginti tribus clientibus, qui steterunt in munitione Cunei — xlviii libras.

(1) Il caso è identico a quello di " cutellerio ". Cfr. nota precedente.

Librauit in trayta et precio quatraginta brachiorum bocharami emptis diversis preciis pro undecim banneriis faciendis et altandis in Cuneo et vilariis, et pro factura ipsarum; et allocantur per literas (supradicti) domini Hugonis (predictas) — XXVII libras, XV solidos.

In trayta et precio octo sextariorum farine empte de fratre Rolando, et trium eminarum cicerum, decem sextariorum fabarum et unius emine salis pro municione castri, que munitio tota remansit in castro, et perdita fuit propter prodicionem dicti loci; et allocantur per literas domini Hugonis predictas — XIX libras, XII solidos.

II. — *Convenzione fra il Comune di Cuneo e gli Svizzeri* (5 agosto 1515).
(*Bibl. civica di Cuneo, Codice Corvo, Cronache,* 109-114).

In nomine Domini nostri Jesu Christi amen. Anno a nativitate eiusdem domini sumpto millesimo quingentesimodecimoquinto, indittione tercia, et die quinta mensis augusti, actum in loco Busche, et in domo habitacionis infrascripti Michaelis Segnorilis, presentibus ibidem eodem Michaelle Segnorili, Ioannino Baudonerii et Iohanne Margheria, omnibus de eodem loco Busche, testibus ad infrascripta vocatis et rogatis. Huius publici instrumenti tenoris conctis fiat manifestum quod cum infrascripti magnifici domini capitanei Helvetiorum campum posuissent et exercitum armigerorum haberent seu habuissent circum circa locum Cuney cum bombardis et aliis armaturis, illud invadendo more hostili, decrevissentque locum predictum Cuney per vim intrare ac inde ipsum locum Cuney, intus existentibus, comburere, et ipsos Cunienses morti traddere, ipsumque locum sachegiare seu sachamanare, ecce quod cupientes ipsi domini Cunienses predicta scandala evitare, miserunt ipsi siquidem domini Cunienses et destina[ve]runt eorum et dicte Comunitatis Cuney legatos seu ambassatores, videlicet spectabiles dominos Aymonem de Feys ex comittibus Plozaschi et dominis Publiciarum, Iacobum de Scalengiis ex predictis comittibus, Bernardinum Chivaleoni, iuris utriusque doctorem et advocatum dicte Comunitatis Cuney, ac Bernardinum Margariam, de eodem loco Cuney, certasque alias personas de sepedicto loco, quas hic brevitatis causa inseri et nominari obmittuntur, videlicet ad infrascriptos dominos capitaneos Helvetiorum, pro cum eisdem concordium tractare et cum eisdem dominis (*Cod.*: domini) capitaneis nomine Comunitatis iamdicte paciscendo et transigendo; et qui quidem ambassatores, nomine et vice dicte Comunitatis Cuney et mandamenti eiusdem, Piperagnique et Bovixii, ad infrascriptas transactionem, conventiones et pacta cum infrascriptis magnificis dominis capitaneis Elvetiorum, mutuo consensu hinc inde interveniente (*Cod.*: intervenientibus), devenerunt, prout infra, ut ibidem (*Cod.*: ibidem) partes infrascripte asseruerunt (*Cod.*: assuerunt). — Et primo conventum fuit et transactum quod infrascripti ma-

gnifici domini capitanei Elvetiorum teneantur et debeant desistere a predictis bello, invasione et impresia, nec a modo in antea facere nec inferre aliquod bellum seu molestiam vel damnum dare quovis modo hominibus ac burgo dicti loci Cuney et eius mandamento, locisque Piperagni et Bovixii, tam in personis, quam in bonis mobilibus et immobilibus (*Cod.*: animalibus) quibuscumque, quin imo recedere debeant a dicto campo seu exercitu circumcirca dictum locum Cunei posito, finibusque dictorum locorum absque aliquali offensione, tam in eorum recessu, quam post. — Item transactum fuit et conventum, ut supra, quod prefacti magnifici domini capitanei Elvetiorum teneantur et debeant remittere et relaxare quoscumque captivos per eos captos, seu per eorum armigeros, de predictis locis et mandamento, nec non omnia bona mobilia et quecumque animalia ipsis de Cuneo ablata ac aliis de mandamento (*Cod.*: mandato) dicti loci Cunei, Piperagnique et Bovixii illico restituere et rellaxare, exceptis bonis comestibilus (*Cod.*: comestis); et hiis mediantibus, ipsi de Cuneo, et seu intervenientes (*Cod.*: interuendo) pro eadem Comunitate Cuney, promiserunt, transigendo cum eisdem magnificis dominis capitaneis, equidem omnia bona per eosdem de Cuneo ablata ipsis (*Cod.*: ab ipsis) Elvetiis ac animalia quecumque illico restituere, et ultra premissa dare, traddere et realiter solvere dictis magnificis dominis capitaneis infra nominatis, presentibus, stipulantibus et acceptantibus pro se et suis predictis, scutos quatuor milia in terminis infrascriptis, videlicet scutos quatuor centum infra et per totam diem presentem et scutos sexcentum infra et per totam diem duodecimam huius mensis augusti, reliquos veros scutos tres millia (*Cod.*: tres mille) infra unum mensem proxime venturum hodie inchoandum (*Cod.*: inchoando), et similiter die dicto, mense revoluto, finiendum, in pace et sine litigio, et in loco Saluciarum seu in alio loco ubi ipsos magnificos dominos Capitaneos tunc adesse contigerit, et hoc in patria pedemontana dumtaxat, et ulterius dare [et] traddere convenerunt in manibus ipsorum dominorum Capitaneorum tres seu quatuor personas idoneas in hostagium, videlicet de maioribus dicti loci Cuney, quod, si secus fieret, possint et valeant ipsi magnifici domini Capitanei, ac eis liceat et licitum [sit], detinere in hostagium infrascriptos de Cuneo per eosdem magnificos dominos Capitaneos captos in exitu dicti loci Cuney; que quidem (*Cod.*: ut ibidem) partes infrascripte vera esse dixerunt et asseruerunt (*Cod.*: assuerunt) omnia superius narrata et descripta.

Et quia dicti ambassatores loci Cuney non reperierunt personas idoneas de loco Cuney, que voluerint ire ad tenendum hostagium iuxta per eos (*Cod.*: eas) promissa, nec etiam intervenire [facere] potuerunt in huiusmodi contractu, ecce hinc fuit et est quod ibidem, in testium predictorum et mei (*Cod.*: mis) notarii publici subsignati presentia per-

sonaliter constituti nobiles Bernardinus Bolerii, Ludovicus Miglia et Joannes de Revello, capti et detenti existentes in manibus ipsorum magnificorum dominorum Capitaneorum, cupientes a dictis hostagio et dettentione relaxari, parte ex una, nec non magnifici domini Iachinus de Molzanis, capitaneus generalis dicti exercitus ac locumtenens Ill. d. d. ducis Mediolani in armata sive exercitu Elvetiorum: Ioannes Rodulfus de Gaspar, de Berna; Henricus Usar, de Lucerna; Conradus de Fleur, de Undrevaldo (*Cod.*: Andrenaldo); Ioannes Ayd, miles, de Filliburgo, et Ioannes Cender, de Berna, tam eorum nominibus propriis, quam vice et nomine totius exercitus predicti, et ipsi de Cuneo, nomine et vice dicte Comunitatis et hominum Cuney, muttuo consensu hinc inde interveniente, et quelibet pars pro facto suo ut (*Cod.*: et) unicuique eorum incombit, promiserunt et convenerunt sibi ipsis ad invicem et vicissim, solemnibus stipulationibus hinc inde intervenientibus, omnia et singula pacta superius descripta et inter ipsos dominos Capitaneos et Comunitatem Cuney, ut premittitur, inita, inviolabiliter et attendere et observare ac adimplere, et pecuniam superius conventam (*Cod.*: conuenta) nomine Comunitatis solvere iuxta conventiones predictas, et penitus (*Cod.*: presens) adimpletis adimplendis (*Cod.*: adimplenda) per eosdem magnificos dominos Capitaneos; qui quidem magnifici domini Capitanei ipsos detentos captivos rettinere in hostagium, ad mentem conventionis facte, voluerunt, et sic ex eorum propria auctoritate ipsos Cunienses retinuerunt, pro premissorumque (*Cod.*: promissorum que) observantia obligaverunt sibi ipsis ad invicem et (*Cod.*: ut) vicissim omnia eorum bona mobilia et immobilia, presentia et futura, et ea omnia vera esse asseruerunt (*Cod.*: assuerunt) et iuraverunt ad sancta Dei Evangelia, tactis corporaliter scripturis, in manibus mei (*Cod.*: mys) notarii subsignati et ad opus quorum interest vel intererit stipullantis et recipientis et renunciarunt et quilibet (*Cod.*: quelibet) in facto suo renunciavit omni iuris (*Cod.*: iurium) et facti beneficio auxilio et remedio quo mediante contra premissa facere vel venire posset, seu alias quomodolibet se thueri. De quibus omnibus iussum fuit per me notarium publicum infrascriptum scribere (*Cod.*: debere) duo eiusdem tenoris publica instrumenta, videlicet cuilibet parti unum traddendum. — Et ego Iacobus Averma (1) de Beinasco, taurinensis diocesis, publicus imperiali auctoritate notarius, hoc presens publicum instrumentum rogatus recepi, quod in hanc publicam formam levari feci per coadiutorem meum ex generali licentia super hoc michi atributa et vigore iniontionis mihi facte ad instantiam egregii

(1) Il doc. III, richiamandosi a questo, porta invece il nome di " Morinus ", che io ritengo preferibile, sebbene — trattandosi di nome proprio — non osi modificare nel testo.

sindici Comunitatis ac hominum loci Cuney, de mandamento magnifici Consilii residentis Thaurini (*Cod.*: Thaurinensis); et quia ipsum instrumentum cum proprio protocolo concordare inveni, hic me subscripsi, cum appositione signi mei tabellionatus, in fidem omnium premissorum.

### III. — *Patenti di quitanza di Carlo II, duca di Savoia, verso il Comune di Cuneo* (8 novembre 1516).

(*Arch. Com. di Cuneo, Privil. e concess.*, Vol. I, ff. 59-60: originale; *Arch. di st. di Tor., Serie Corte*, Vol. CXLIX, ff. 173-174: minuta).

Karolus dux Sabaudie etc. Universis sit manifestum quod cum fideles nostri sindici, homines et Comunitas Cunei nobis exponi fecerint quod de anno proxime preterito nonnulli capitanei exercitus Helvetiorum cum exercitu ipsorum accesissent ad ipsum locum nostrum Cunei, volentes ipsum locum intrare, et cum ipsi homines et Comunitas resistenciam fecissent eisdem Elvetiis, ipsi Elvetii locum ipsum obsessi et castrametati (*Cod. Cuneo, qui e sempre*: castramentati) fuerunt; et verentes ipsi homines ne predicti Elvetii per vim locum ipsum undique obsessum expugnarent, mandarunt ad eos nuncios, qui cum ipsis Elvetiis convenerunt de iis traddendo summam quatuor milium (*Cod. Cuneo, qui e altrove*: milia) scutorum Regis, de Sole, dummodo castra amoverent et de intrando ipsum locum abstinerent, et cum durante ipsa obsidione capti fuissent per ipsos Helvecios Bernardinus Bolerus, Iohannes Revelli et Ludovicus Migla, de eodem loco Cunei, qui cum adducerentur per dictos Helvecios et forent in loco Busche, nomine predicte Comunitatis et pro resta dictorum quatuor milium scutorum se obligaverunt erga capitaneos ipsorum Helveciorum et eosdem Helvecios in scutis tribus milibus et sexcentum, prout de ipsa obligacione conspicitur constare instromento recepto per Iacobum Morinum notarium: quos particulares ipsi Helvecii, dicta obligacione non obstante, secum captivos adduxerunt, dictam summam omnino exigere volentes; ob quod, parte ipsius Comunitatis et hominum, per eorum nuncios ad hoc ad nos transmissos variis et crebris partibus nobis supplicatum extitit ut pro nostra in ipsam Comunitatem dictosque particulares pietate et clemencia dignaremur auctoritatem nostram huic rei taliter interponere erga ipsos Elvecios, quod obligacio predicta canzelari, ipsique detenti relaxari et proprios lares repetere possent, promittentes se iamdicte Comunitatis nomine nobis realiter soluturos quicquid per nos occaxione earundem abolicionis (*Cod.*: abolacionis) sive canzellacionis solutum et exbursatum foret: — cumque opera, studio et non modica impensa nostra erga ipsos confederatos nostros taliter actum extiterit, quod ipsa obligacio de premencionata summa peccuniarum cassata, et ipsi capti relaxati fuerint, ob quod ipsi homines et Comunitas erga nos tenerentur, iuxta promissionem parte

ipsorum nobis ulterius factam, in expensis per nos circha dictam prosecucionem factis, ascendentibus ad egregiam peccuniarum summam; — cum insuper formidarent ipsi homines et Comunitas molestari ad solucionem penarum per ipsos incursarum (*Cod. Cuneo*: incursas) propter receptionem ipsam eisdem Helvetiis confederatis nostris recusatam, et propter (*I due codd.*: propterea) quod capitaneum Ieronimum, per nos ad capturam Tonduti et eius sequacium sceleratissimorum deputatum, admittere recusaverunt (*Cod. Cuneo*: recusarent; *Cod. Tor.*: recusarunt) et additum in dictum locum prohibuerunt; — ecce quod venerunt benedilecti fideles nostri dominus Leonardus de Grassis, iurium doctor, Franciscus Ferrerii, Ioannes Raphael de Alaxis et Andreas Migla, nuncii et ambasiatores per ipsos homines et Comunitatem destinati, humiliter nobis supplicando ut dignaremur predictam obligacionem, in qua erga nos pretextu premissorum tenebantur, eisdem remittere, et pretextu premissorum eos de cetero indempnes et illesos preservare . . . dignaremur, actentis maxime tot et tantis dampnis, expensis et interesse supportatis pretextu exercitus dictorum Helvetiorum per eosdem Comunitatem et homines . . . ; *ond'egli rimette e quitta ogni lor debito e pena* pro et mediantibus mille et tercentum scutisauri Regis, de Sole, per ipsos homines et Comunitatem retro oblatis et per nos ab eisdem habitis et receptis manibus spectabilis et benedillecti fidellis conscilliarii nostri Alloysi de Gallarate thesaurarii nostri . . . Datum Fossani, die octava mensis novembris Millesimoquingentesimodecimosexto.

IV. — *Estratti dagli " Ordinati " del Comune di Cuneo* (1516-1517).
(*Arch. Com. di Cuneo, Ordin.*, Voll. X e XII).

*Mancano gli* " Ordinati " *del 1515 dopo il 1° maggio.*

1516. IX. 3: *Il Consiglio ratifica l'operato degli ambasciatori al Duca*, ordinando fieri mandatum in quo constituantur aliqui qui nomine Comunitatis se obligent, iuxta conclusa, erga magnificum dominum Generalem Sabaudie [thesaurarium] ad solvendum summam scutorum mille et tricentum Solis promissorum prelibato illu$^{mo}$ d. d. nostro pro dicta causa canzellationis, obligationis et promissionis facte erga ipsum illu$^{mum}$ dominum pro causa Helvetiorum, canzellarique quamcumque penam per ipsam comunitatem incursam predicta causa . . . (Vol. XII, ff. 87-88).

1516. IX. 13: *Il Consiglio, intesa la relazione degli ambasciatori andati a Fossano, al Duca, e vedute le lettere di questo — cioè, senza dubbio, il Doc. II — delibera di provvedere al pagamento dei 1300 scudi* (Vol. XII, f. 92).

1517. I. 23: Universis sit manifestum quod facto computo cum nobili Philipo Corvi de mutuo per eum exacto de mense augusti Millesimoquingentesimodecimoquinto ad causam composicionis facte cum

Elvecis et pro solucione armigerorum qui stetterunt ad deffensionem loci Cuney et qui venerunt in succursum, visa ipsa recepta, *manda rilasciarsi il saldo a detto ricevitore.*

V. (1) — “ *Notizia* „ *del secolo XVI sull'assedio di Cuneo del 1515.* (*Bibl. Civ. di Cuneo, Cod. Corvo, Cron.,* p. 272).

MDXV, et die prima Augusti, exercitus Germanorum, qui erant circiter septem millia armatorum cum (*Cod., qui e dopo*: con) quinque magnis (*Cod.*: magni) tormentis ignivomis, missus (*Cod.*: misso) ab episcopo Sedunensi electo cum Ioachino, prefecto (*Cod.*: prefacto) germano, ad expugnandum Cuneum, vi tormentorum ignivomorum (*Cod.*: ignivognorum), murorum parte solo equata, die quarto Augusti, salvo oppido, abierunt.

Tercentum lustris terquinis Virginis annis
Post partum, primo sextillis, castra Gothorum
Cinxerunt Cuneum tellis, et menia magnis
Ictibus ignivomum rupuerunt, agmine facto;
Sed pauci cives (*cod.:* sives) tutantur robore firmo
Vanos conatus, ac (*cod.:* at) quarta luce recedunt.

VI. — *Dal “ Summarium breve chronicarum Cunei „,* c. 20. (*Bibl. Civ. di Cuneo,* pp. 22-23).

(1515). Nec omitendum videtur quod, dum Helvecii in magno numero et plurimum formidabili se Gallis opponerent descensuris pro ducatu Mediolani anno MDXV (*Cod.*: MDV), ac in omnibus locis (Taurino excepto pro Domini residencia) hospitarentur, si expediens erat, solus Cunei locus se illis oposuit, et prevaluit pluribus aggressionibus, presidio dumtaxat incolarum munitus: et Dei gratia (*Cod.*: quia) omnes in hoc concordarunt. Discant tamen posteri maturius in his agere; nam alii, qui id etiam attentarunt, in totale excidium devenerunt, quum certe vires oppidi perexigue essent tanto exercitui. Notent etiam quod dum unus incolarum loci mandatum ducale quod hospitarentur sprevisset, illud concidendo in frustra et proiiciendo, (post modum) [litere Domini fuissent] cum honore suscipiende, postea fuisset veridicum allegare gravamen; sed illas spernere contemptui equiparat[ur] domini sui, quod ultimum supplicium exigit.

(1) La seguente “ Notizia „ fu edita già dal Barelli, *Studî sull'assedio di Cuneo del 1557*, in “ Bollett. stor. bibliogr. subalp. „, II, 106 segg., con una nota interessante. Qui se ne dà il testo migliorato.

*L' Accademico Segretario*
Cesare Nani.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

# CLASSE

DI

# SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

In causa delle feste per l'apertura della Esposizione Generale Italiana non si è tenuta l'adunanza del 1° maggio 1898; è però stata data facoltà ai Soci che avessero avuto da presentare note per gli *Atti*, o proprie o di estranei sotto la loro responsabilità, di inviarle ugualmente entro il 1° maggio, alla Segreteria che ne avrebbe curata la stampa, salvo a farne regolare presentazione nella successiva Adunanza del 15 maggio.

Furono in seguito a tale avviso inviate alla Segreteria le seguenti note:

1° *Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque;* nota prima del Prof. Luigi Berzolari, presentata dal Socio Segre,

2° *Esame del compenso fra lo scavo ed il riporto nei progetti stradali;* nota dell'Ing. Vittorio Baggi, presentata dal Socio Jadanza,

3° *Sulla taratura del fasometro delle tangenti;* nota dell'Ingegnere Riccardo Arnò, presentata dal Socio Naccari.

Il Socio Segre presentò pure una memoria del Dott. Gino Fano, intitolata: *I gruppi di Jonquières generalizzati*, da inserirsi nei volumi accademici. Il Presidente diede l'incarico ai Soci D'Ovidio e Segre di esaminarla e di riferire in una prossima seduta.

# LETTURE

## *Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque;*

Nota I del Prof. LUIGI BERZOLARI.

In questa Nota, ed in un'altra successiva che presto verrà pubblicata, sono stabilite alcune proprietà generali delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque, le quali s'ottengono considerando quelle espressioni che, introdotte dapprima dal signor Lipschitz sulla scorta di analogie fornite dalla Meccanica analitica, furono poi studiate dal sig. Killing in forma completamente geometrica — e rappresentate coi simboli $(D_1)$, $(D_2)$, ... — nell'ultimo paragrafo del suo noto libro *Die nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* (Leipzig, 1885), al quale sempre ci riferiremo nel seguito. Si noterà in particolare la larga estensione che così vien data del teorema di Meusnier (*), come pure del concetto e delle principali proprietà della curvatura geodetica d'una linea descritta sopra una superficie dello spazio euclideo a tre dimensioni.

1. — La data varietà $V_m$ ad $m$ dimensioni sia immersa in uno spazio $S_n$ di $n$ dimensioni e di curvatura Riemanniana costante $\frac{1}{k^2}$, essendo $k$ reale (anche infinito), o puramente imagi-

(*) Finora, per quanto so, la generalizzazione di questo teorema non è stata fatta che per varietà di $n-1$ dimensioni immerse in uno spazio di $n$ dimensioni e di curvatura costante (cfr. Killing, l. c., § 11, e due mie Note nei " Rend. della R. Accad. dei Lincei ", 21 novembre 1897 e 2 gennaio 1898); e soltanto recentemente lo stesso teorema è stato esteso ad un caso diverso dal precedente, benchè molto particolare — cioè alle curve situate sopra una varietà a due dimensioni dello spazio euclideo a quattro dimensioni — dal sig. K. Kommerell nel § 4 della sua dissertazione inaugurale *Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von vier Dimensionen* (Tübingen, 1897), di cui debbo la conoscenza alla cortesia del sig. Prof. Brill.

nario. Gli elementi di questo spazio verranno riferiti ad un sistema di *coordinate di* WEIERSTRASS (cfr. KILLING, l. c., pag. 71), di cui per chiarezza qui richiamo brevemente il significato.

Per un punto 0, origine delle coordinate, si conducano $n$ iperpiani $E_1, \ldots, E_n$ a due a due fra loro perpendicolari, e, scelto un punto qualunque P, si chiamino $a_i$ la lunghezza della perpendicolare tirata da P sopra $E_i$, ed $\epsilon_i$ l'angolo formato da OP coll'asse coordinato normale ad $E_i$. Allora le coordinate del punto P sono le quantità $x_0, x_1, \ldots, x_n$ definite come segue:

$$x_0 = \cos \frac{\mathrm{OP}}{k},$$

$$x_i = k \operatorname{sen} \frac{a_i}{k} = k \operatorname{sen} \frac{\mathrm{OP}}{k} \cos \epsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

così che fra esse ha luogo la relazione

$$k^2 x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = k^2.$$

Inoltre, se si dicono $\rho$ la lunghezza della perpendicolare condotta dall'origine sopra un dato iperpiano, ed $\eta_i$ l'angolo che questa perpendicolare forma coll'asse normale ad $E_i$, e si pone

$$u_0 = -k \operatorname{sen} \frac{\rho}{k},$$

$$u_i = \cos \frac{\rho}{k} \cos \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

le quantità $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sono le coordinate dell'iperpiano proposto: esse son legate dalla relazione

$$\frac{u_0^2}{k^2} + u_1^2 + \ldots + u_n^2 = 1,$$

mentre

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n = 0$$

è l'equazione dell'iperpiano.

2. — Alcuni dei teoremi, di cui si tratterà in questa Nota, si dimostrano nel modo più semplice ponendo l'origine 0 nel

punto di $V_m$, ad un intorno del quale son limitate tutte le nostre considerazioni, ed assumendo come iperpiani

$$(1) \qquad x_{m+1}=0,\ x_{m+2}=0, \ldots, x_n=0$$

$n-m$ iperpiani passanti per lo spazio lineare $S_m$ ad $m$ dimensioni tangente a $V_m$ in quel punto. Dovendo studiare, come ora si è avvertito, soltanto un campo infinitesimo attorno all'origine, sarà $x_0=1$, il che val quanto dire che per un tal campo le coordinate di Weierstrass coincidono con un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Considerando quindi su $V_m$ le coordinate $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ come funzioni date delle coordinate indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_m$, la varietà $V_m$, nell'intorno dell'origine, può rappresentarsi con sviluppi della forma

$$(2) \qquad \begin{gathered} 2x_{m+i}=\sum_{rs} a_{rs}^{(i)} x_r x_s + P_i \\ (i=1,2,\ldots,n-m; \qquad r,s=1,2,\ldots m), \end{gathered}$$

dove $P_i$ è l'aggregato dei termini che nell'espressione di $2x_{m+i}$ sono di grado superiore al secondo nelle $x_1, \ldots, x_m$. E lo spazio lineare $S_{n-m}$ ad $n-m$ dimensioni normale in $0$ a $V_m$ è dato dalle equazioni

$$(3) \qquad x_1=0,\ x_2=0, \ldots, x_m=0.$$

Ora, per la maggiore intelligenza di ciò che segue, occorre che premettiamo, nell'attuale sistema di coordinate, le principali formole e proprietà di cui dovremo far uso, e che già trovansi dimostrate altrimenti nei n[i] 128, 129 e 130 del citato libro del sig. Killing.

Per lo spazio $S_m$ si conduca un arbitrario spazio lineare $S_{m+1}$ ad $m+1$ dimensioni, e sia $y_{m+1}=0$ l'equazione dell'iperpiano passante per $S_m$ e normale all'$S_{m+1}$, così che si potrà scrivere

$$(4) \qquad y_{m+1}=A_1 x_{m+1}+A_2 x_{m+2}+\ldots+A_{n-m} x_n,$$

con

$$(5) \qquad A_1^2+A_2^2+\ldots+A_{n-m}^2=1.$$

Sostituendo in (4) per le $x_{m+1}, \dots, x_n$ le espressioni (2), e ponendo

$$(6) \qquad B_{ij} = A_1 a_{ij}^{(1)} + A_2 a_{ij}^{(2)} + \dots + A_{n-m} a_{ij}^{(n-m)} \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m),$$

risulta

$$2y_{m+1} = \sum_{i,j=1}^{m} B_{ij} x_i x_j + \dots$$

come equazione, entro l'$S_{m+1}$, della proiezione di $V_m$ sullo spazio $S_{m+1}$, nell'intorno del punto 0. Perciò (*) le *curvature principali* di tale proiezione in 0 sono le radici della seguente equazione di grado $m$ in $\omega$:

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} B_{11} - \omega & B_{12} \dots\dots & B_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{m1} & B_{m2} \dots\dots & B_{mm} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

e la somma di queste curvature è espressa da

$$B_{11} + B_{22} + \dots + B_{mm},$$

ossia da

$$\sum_{i=1}^{n-m} A_i (a_{11}^{(i)} + a_{22}^{(i)} + \dots + a_{mm}^{(i)}).$$

Al variare di $S_{m+1}$ attorno all'$S_m$, cioè al variare delle $A_i$, vincolate dalla relazione (5), *la somma precedente ammette un valor massimo* $(D_1)$, dato da

$$(D_1)^2 = \sum_{i=1}^{n-m} (a_{11}^{(i)} + a_{22}^{(i)} + \dots\dots + a_{mm}^{(i)})^2,$$

e corrispondente ai seguenti valori delle A:

$$A_i = \frac{1}{(D_1)} (a_{11}^{(i)} + a_{22}^{(i)} + \dots\dots + a_{mm}^{(i)}) \qquad (i = 1, 2, \dots, n - m).$$

(*) Killing, l. c., pag. 215, equaz. (25), nella quale però devesi cambiare $\frac{\omega}{S}$ in $S\omega$.

In tal modo lo spazio $S_{m+1}$ relativo al massimo è del tutto individuato, poichè passa per l'$S_m$ tangente in 0 a $V_m$, e contiene la normale condotta pel punto 0 all'iperpiano

$$\sum_{i=1}^{n-m} (a_{11}^{(i)} + a_{22}^{(i)} + \ldots\ldots + a_{mm}^{(i)})\, x_{m+i} = 0.$$

Si riconosce poi subito che, proiettando la data varietà sopra un $S_{m+1}$ qualunque perpendicolare al precedente e passante, al pari di questo, per l'$S_m$ tangente, la somma testè considerata è nulla.

Se $m = 1$, se cioè la varietà $V_m$ è una curva, lo spazio $S_{m+1}$ relativo al massimo ne diventa il piano osculatore in 0, e la quantità $(D_1)$, la prima curvatura o flessione nel punto stesso. Quest'osservazione sussiste anche per altri riguardi, come può vedersi in KILLING (l. c., n. 129) e come si vedrà in nuove circostanze nel seguito: per tal ragione e per abbreviare il linguaggio, mi permetterò di chiamare *spazio osculatore* e *flessione* di una qualsiasi varietà $V_m$ in un punto 0 lo spazio $S_{m+1}$ e la quantità $(D_1)$ sopra definiti.

Tornando all'equazione (7), la somma dei prodotti delle sue radici a due a due, avuto riguardo alla (6), è data da

$$\sum_{r,s=1}^{n-m} c_{rs}\, A_r\, A_s\,,$$

essendosi posto

$$c_{rs} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} (a_{ii}^{(r)} a_{jj}^{(s)} + a_{ii}^{(s)} a_{jj}^{(r)} - 2 a_{ij}^{(r)} a_{ij}^{(s)}).$$

Al variare delle A, questa somma ammette $n-m$ valori massimi o minimi, che notoriamente sono le radici della seguente equazione in $\Delta$:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \Delta & c_{12} & \ldots\ldots & c_{1,n-m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-m,1} & c_{n-m,2} & \ldots\ldots & c_{n-m,n-m} - \Delta \end{vmatrix} = 0.$$

Queste radici son tutte reali e corrispondono ad $n-m$ spazi lineari ad $m+1$ dimensioni passanti per l'$S_m$ tangente e fra

loro perpendicolari a due a due: la loro somma $(D_2)$ è data da

$$(D_2) = c_{11} + c_{22} + \dots + c_{n-m, n-m},$$

ossia da

$$(8) \qquad (D_2) = \sum_{i,j=1}^{m} (a_{ii}^{(1)} a_{jj}^{(1)} - a_{ij}^{(1)2}) + \dots + \sum_{i,j=1}^{m} (a_{ii}^{(n-m)} a_{jj}^{(n-m)} - a_{ij}^{(n-m)2}).$$

Si riconosce altresì facilmente che, se per l'$S_m$ tangente si conducono ad arbitrio $n-m$ spazî $S_{m+1}$ fra loro perpendicolari a due a due, e si addizionano le somme dei prodotti delle radici della (7) a due a due, relativamente a ciascuno di siffatti spazî, la somma risultante è sempre uguale a $(D_2)$. Il sig. KILLING (l. c., n. 130) ha inoltre dimostrato che *la quantità* $(D_2)$ *rimane immutata in ogni flessione* (*Biegung*) *della varietà* $V_m$ (*).

**3.** — Ciò premesso, e mantenendo per $V_m$ tutte le notazioni date in principio del n. prec., sia $W_h$ una qualsiasi varietà di $h$ dimensioni ($h < m$), tracciata su $V_m$ e passante per l'origine. Possiamo supporre che gli assi coordinati siano stati scelti in guisa che lo spazio $S_h$ tangente a $W_h$ in 0 venga rappresentato dalle equazioni

$$(9) \qquad x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{m-h} = 0, \; x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0.$$

Così che, considerando le coordinate $x_1, x_2, \dots, x_{m-h}, x_{m+1}, \dots, x_n$ d'un punto di $W_h$ infinitamente vicino all'origine come funzioni delle coordinate indipendenti $x_{m-h+1}, x_{m-h+2}, \dots, x_m$,

(*) Le proprietà qui indicate dell'espressione $(D_2)$ erano già state prima stabilite dal sig. HOVESTADT (Programm des Münster'schen Realgymnasiums, 1880) pel caso di una varietà a due dimensioni ($m=2$). Che $(D_2)$ sia un *invariante di flessione* (*Biegungsinvariante*) per $V_m$, segue immediatamente dall'espressione (8) del testo, quando si faccia uso di alcuni risultati dovuti al sig. SCHUR (*Ueber die Deformation der Räume constanten* RIEMANN'*schen Krümmungsmaasses,* " Math. Annalen ", Bd. XXVII, 1886), e dimostrati di nuovo recentemente e in modo più diretto dal sig. STAECKEL nella Memoria *Ueber Biegungen von n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten* (" Giornale di CRELLE ", Bd. 113, 1894); cfr. le formole (J.) di questo Autore.

quelle si esprimeranno, per mezzo di queste, con sviluppi della forma:

$$2x_1 = \sum_{rs} b_{rs}^{(1)} x_r x_s + \Omega_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2x_{m-h} = \sum_{rs} b_{rs}^{(m-h)} x_r x_s + \Omega_{m-h},$$

$$2x_{m+1} = \sum_{rs} a_{rs}^{(1)} x_r x_s + \Omega_{m+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2x_n = \sum_{rs} a_{rs}^{(n-m)} x_r x_s + \Omega_n$$

$$(r, s = m - h + 1, m - h + 2, \dots, m),$$

essendo le $b$ quantità arbitrarie (dipendenti dalla $W_h$). La flessione $(D_1)$ di $W_h$ nell'origine sarà perciò data da

$$(10)\qquad \begin{aligned}(D_1)^2 = &\sum_{i=1}^{m-h} (b_{m-h+1,m-h+1}^{(i)} + \dots + b_{mm}^{(i)})^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{n-m} (a_{m-h+1,m-h+1}^{(i)} + \dots + a_{mm}^{(i)})^2.\end{aligned}$$

Chiameremo *flessione tangenziale* e *flessione normale* di $W_h$ nel punto 0 [e indicheremo con $(D_1^{(t)})$ e $(D_1^{(n)})$] le flessioni che hanno in 0 le proiezioni di $W_h$ fatte risp. sopra lo spazio $S_m$ tangente in 0 a $V_m$, e sopra lo spazio $S_{n-m+h}$ normale in 0 a $V_m$ e passante per lo spazio $S_h$ tangente a $W_h$: la flessione normale coincide, evidentemente, colla flessione di cui è dotata in 0 la varietà $W_h^{(n)}$ di $h$ dimensioni, che s'ottiene tagliando $V_m$ col detto spazio $S_{n-m+h}$. Per $n = 3$, $m = 2$, $h = 1$, cioè nel caso d'una linea situata sopra una superficie dello spazio ordinario, tali flessioni diventano la curvatura tangenziale o geodetica, e la curvatura normale di questa linea.

La varietà $W_h^{(t)}$ di $h$ dimensioni, che si ha proiettando $W_h$ sullo spazio $S_m$ tangente in 0 a $V_m$, è rappresentata, nell'intorno dell'origine, da sviluppi della forma:

$$2x_i = \sum_{rs} b_{rs}^{(i)} x_r x_s + \Omega_i^{(t)}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m - h; \qquad r, s = m - h + 1, \dots, m),$$

epperò

$$(11)\qquad (D_1^{(t)})^2 = \sum_{i=1}^{m-h} (b_{m-h+1,m-h+1}^{(i)} + \dots + b_{mm}^{(i)})^2.$$

Lo spazio normale $S_{n-m+h}$, di cui sopra si è parlato, passando per gli spazi rappresentati dalle (8) e dalle (9), ha per equazioni

$$x_1 = 0,\, x_2 = 0, \ldots, x_{m-h} = 0,$$

quindi, per i punti della sezione $W_h^{(n)}$ da esso prodotta in $V_m$ situati in prossimità dell'origine, le coordinate $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ saranno date, in funzione delle coordinate indipendenti $x_{m-h+1}, \ldots, x_m$, dalle formole

$$2x_{m+i} = \sum_{rs} a_{rs}^{(i)} x_r x_s + \Omega_i^{(n)}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-m; \qquad r, s = m-h+1, \ldots, m),$$

e si avrà:

$$(12) \qquad (D_1^{(n)})^2 = \sum_{i=1}^{n-m} (a_{m-h+1,m-h+1}^{(i)} + \ldots + a_{mm}^{(i)})^2.$$

Dalle (10), (11) e (12) segue

$$(13) \qquad (D_1)^2 = (D_1^{(t)})^2 + (D_1^{(n)})^2,$$

cioè il teorema:

*Se sopra una varietà qualunque di uno spazio ad n dimensioni e di curvatura costante è data una varietà arbitraria, il quadrato della sua flessione in ogni suo punto è uguale alla somma dei quadrati delle sue flessioni tangenziale e normale nello stesso punto* (*).

Considerando gli spazi ad $h+1$ dimensioni osculatori in O (n. 2) alle varietà $W_h$, $W_h^{(t)}$, $W_h^{(n)}$, e chiamandoli risp. $S_{h+1}$, $S_{h+1}^{(t)}$, $S_{h+1}^{(n)}$, essi passano tutti per lo spazio $S_h$ tangente in O a ciascuna di quelle varietà, e contengono risp. le normali condotte nell'origine agl'iperpiani

$$\sum_{i=1}^{m-h} (b_{m-h+1,m-h+1}^{(i)} + \ldots + b_{mm}^{(i)}) x_i + \sum_{i=1}^{n-m} (a_{m-h+1,m-h+1}^{(i)} + \ldots + a_{mm}^{(i)}) x_{m+i} = 0,$$

(*) Per una curva di una varietà ad $n-1$ dimensioni, immersa in uno spazio euclideo di $n$ dimensioni, vedasi l'ultima pagina della Memoria del Prof. Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque* (" Mem. della R. Accad. dei Lincei ", serie 5a, vol. II, 1896); e per una curva di una varietà a due dimensioni dello spazio euclideo a quattro dimensioni, vedasi il § 4 del citato lavoro del sig. Kommerell.

$$\sum_{i=1}^{m-h} (b^{(i)}_{m-h+1,m-h+1} + \dots + b^{(i)}_{mm}) x_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} (a^{(i)}_{m-h+1,m-h+1} + \dots + a^{(i)}_{mm}) x_{m+i} = 0,$$

dei quali gli ultimi due sono fra loro perpendicolari. Si deduce immediatamente

$$(\mathrm{D}_1) = \frac{(\mathrm{D}_1^{(n)})}{\cos(\mathrm{S}_{h+1}, \mathrm{S}^{(n)}_{h+1})}, \qquad (\mathrm{D}_1^{(t)}) = (\mathrm{D}_1)\cos(\mathrm{S}_{h+1}, \mathrm{S}^{(t)}_{h+1}),$$

ossia:

*Se sopra una varietà qualunque $V_m$ ad m dimensioni, immersa in uno spazio di n dimensioni e di curvatura costante, è data un'arbitraria varietà $W_h$ di h dimensioni, la sua flessione in ogni suo punto 0 è uguale a quella della sezione normale $W_h^{(n)}$ di $V_m$, che ha comune in 0 con $W_h$ lo spazio tangente ad h dimensioni, divisa pel coseno dell'angolo formato dagli spazî ad h + 1 dimensioni osculatori in 0 alle varietà stesse $W_h$ e $W_h^{(n)}$.*

*E la flessione tangenziale di $W_h$ in 0 è uguale alla sua flessione assoluta, moltiplicata pel coseno dell'angolo compreso fra gli spazii osculatori in 0 alla stessa $W_h$ ed alla proiezione $W_h^{(t)}$ di $W_h$ sopra lo spazio ad m dimensioni tangente in 0 a $V_m$* (*).

Chiamando per ultimo $(\mathrm{D}_2)$, $(\mathrm{D}_2^{(t)})$ e $(\mathrm{D}_2^{(n)})$ le espressioni $(\mathrm{D}_2)$ formate nel punto 0 per le varietà $W_h$, $W_h^{(t)}$ e $W_h^{(n)}$, si trova subito

$$(14) \qquad (\mathrm{D}_2) = (\mathrm{D}_2^{(t)}) + (\mathrm{D}_2^{(n)}),$$

cioè la proprietà: *Colle notazioni dei due precedenti teoremi, la quantità $(\mathrm{D}_2)$ formata nel punto 0 per la varietà $W_h$ è uguale alla somma delle quantità $(\mathrm{D}_2)$ formate nello stesso punto per le due varietà $W_h^{(t)}$ e $W_h^{(n)}$.*

---

(*) Il primo di questi due teoremi è una generalizzazione del teorema di Meusnier, e per $k=\infty$, $m=n-1$, $h=1$ fornisce l'estensione che del medesimo ha data per la prima volta il Kronecker (cfr. Killing, l. c., § 11, e le mie Note già citate); per $k=\infty$, $n=4$, $m=2$, $h=1$ si trova invece il teorema del sig. Kommerell a cui si è alluso in principio del lavoro.

Il secondo teorema del testo è l'estensione di una notissima proprietà della curvatura geodetica d'una linea tracciata sopra una superficie dello spazio ordinario: cfr. ad es. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale* (Pisa, 1894), pag. 140.

# *Esame del compenso fra lo scavo ed il riporto nei progetti stradali;*

Nota dell'Ing. VITTORIO BAGGI.

## I.

1. — Fra le molte condizioni alle quali si procura generalmente di soddisfare nello studio di un progetto di strada, merita speciale importanza quella di far sì che le materie scavate vengano esattamente utilizzate nei riporti.

Mediante opportuni procedimenti, fra i quali è specialmente raccomandato quello di Brückner, dopo che si è fatto lo studio del profilo longitudinale di una strada e si sono calcolati i volumi di terra compresi fra le singole sezioni trasversali, è facile determinare i *cantieri di compenso* longitudinali più convenienti, e per ciascuno di essi si ricava con speditezza la *distanza media di trasporto* del volume di terra da rimaneggiarsi.

Sovente però la linea di compenso che si traccia sul profilo di Brückner non riesce continua, e si è costretti a ricorrere a cave di prestito oppure a luoghi di deposito anche quando nello studio del profilo longitudinale della strada si ebbe cura di evitarli, il che si procura generalmente di fare quando riesce difficile aprire cave di prestito o trovare luoghi di deposito adatti nella località considerata, come succede generalmente per le strade di montagna. Inquantochè è noto che le materie di scavo accumulate sulle falde dei monti vanno facilmente ad otturare il letto dei rivi sottostanti, e le cave di prestito sono pericolose per gli spostamenti che determinano nelle masse sovrastanti agli scavi.

2. — Se dopo di aver fatto lo studio completo del progetto di una strada e di aver ponderati gli inconvenienti che possono nascere dalla presenza di parecchie cave di prestito o luoghi di

deposito, si vuol modificare l'andamento altimetrico della strada correggendone opportunamente le livellette, è giuocoforza, se vuolsi procedere con sufficiente esattezza, modificare tutte le sezioni trasversali della strada, spostando in altezza il piano di formazione, e ripetere la misura delle loro aree onde ricavare i nuovi volumi di scavo e di riporto nel tratto di strada che si considera e rifare, in base ai risultati ottenuti, il profilo di distribuzione delle terre.

Quando il progetto è semplicemente di massima, si può bensì passare dal profilo longitudinale alla linea degli sterri ed interri, senza calcolo e senza aver bisogno delle sezioni trasversali (*), ma quando il progetto è definitivo, tale procedimento non è più da adottarsi. Qualunque sia poi il metodo scelto, il problema della compensazione si risolve generalmente con successive prove, e quando necessita un esatto compenso fra lo scavo ed il riporto, i tentativi risultano numerosi.

Rifare più volte tali calcoli, siano essi grafici o numerici, è lavoro lungo e fastidioso, ed è perciò che fin dall'inizio dello studio del tracciato di una strada si ha cura di scegliere un profilo che ad occhio si giudichi *compensato*. Però in questo studio il problema riesce molto incerto, inquantochè dal profilo longitudinale si hanno bensì le *quote rosse* e le pendenze longitudinali del terreno e della strada, e dalla planimetria quotata, o dalle sezioni, si può ricavare la pendenza trasversale del terreno, ma con questi elementi è difficile stabilire ad occhio la linea di progetto che soddisfa il problema proposto.

La regola di tracciare le livellette di progetto in modo che le aree gialle e quelle rosse del profilo longitudinale di una strada risultino presso a poco equivalenti fra loro, allo scopo di avvicinarsi ad un adeguato compenso fra lo scavo ed il riporto, è erronea, ed il più delle volte conduce a risultati ben differenti da quelli desiderati.

Se, ad esempio, consideriamo un tratto di profilo longitudinale di strada (fig. 1) ed indichiamo con TT' la linea del terreno, con PQ una livelletta di progetto, con M ed N le due sezioni consecutive che comprendono il tratto esaminato, e supponiamo per semplicità che il punto di passaggio O fra lo scavo S

(*) Cfr. G. Crugnola, *Dei movimenti di terra*, pag. 85. Torino, 1891.

ed il riporto R sia equidistante da M e da N, affinchè vi sia equivalenza fra i volumi di scavo e di riporto compresi in queste due sezioni, le due aree POT, QOT′ non devono in generale riuscire equivalenti.

Colla teoria che ci proponiamo di svolgere in questa nota, riuscirà facile trovare le relazioni che devono passare fra le quote rosse $TP = h$ e $QT' = h'$ in qualunque caso, affinchè i volumi di scavo e di riporto compresi fra le due sezioni M ed N considerate risultino compensati.

Fig. 1. Fig. 2.

II.

3. — *Espressione generale dell'area di una sezione stradale. Notazioni.* Riferiamoci alla figura 2 e stabiliamo per semplicità le seguenti notazioni:

$q$ = pendenza delle scarpate laterali AB, A′B′ della sezione di strada considerata;
$p$ = pendenza del terreno naturale AA′;
$L$ = larghezza stradale BB′ (BC = B′C);
$\xi$ = ordinata rossa CD del punto d'asse.

Dalla figura si ricavano facilmente i seguenti valori:

$$EA = \frac{\xi + \frac{1}{2} Lq}{q - p}; \qquad E'A' = \frac{\xi + \frac{1}{2} Lq}{q + p}$$

e l'area A dell'intiera sezione risulta espressa da:

$$A = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\left(\xi + \frac{1}{2}Lq\right)^2}{q-p} - \frac{1}{4}L^2 q + \frac{\left(\xi + \frac{1}{2}Lq\right)^2}{q+p} - \frac{1}{4}L^2 q \right\}$$

ossia:

$$A = \frac{q}{q^2 - p^2}\left(\xi + \frac{1}{2}Lq\right)^2 - \frac{1}{4}L^2 q, \qquad (1)$$

od anche:

$$A = \frac{q}{q^2 - p^2}\xi^2 + \frac{q}{q^2 - p^2}Lq\xi + \frac{1}{4}\frac{q}{q^2 - p^2}L^2 p^2. \qquad (2)$$

Da queste formole generali conviene, per maggior chiarezza, ricavare quelle relative al caso di sezioni in rilevato e di sezioni in isterro.

4. — *Espressione dell'area della sezione stradale in rilevato.* Pongasi:

$$A = R \qquad q = q_r$$
$$\xi = x \qquad p = p_r$$
$$L = l$$

$$\frac{q_r}{q^2{}_r - p^2{}_r} = a$$

e notisi che in questo caso si ha sempre $a > 0$.

Per la (1) si ha:

$$R = a\left(x + \frac{1}{2}lq_r\right)^2 - \frac{1}{4}l^2 q_r \qquad (3)$$

e per la (2):

$$R = ax^2 + alq_r x + \frac{1}{4}al^2 p_r^2. \qquad (4)$$

Per il caso di terreni ordinari generalmente considerato in pratica si ha:

$$q_r = \frac{2}{3}; \qquad a = \frac{6}{4 - 9p^2{}_r}$$

quindi

$$R' = \frac{6}{4 - 9p^2}\left(x + \frac{l}{3}\right)^2 - \frac{1}{6}l^2:$$

od anche

$$R' = \frac{1}{4 - 9p^2{}_r}\left\{6x^2 + 4lx + \frac{3}{2}l^2 p_r^2\right\}.$$

Quando $p_r = 0$, cioè allorchè il rilevato stradale si insedia sopra terreno orizzontale, si ha:

$$R'' = \frac{3}{2}\left(x + \frac{l}{3}\right)^2 - \frac{1}{6}l^2; \quad \text{od anche} \quad R'' = \frac{3}{2}x^2 + lx.$$

5. — *Espressione dell'area della sezione stradale in isterro.*
Indichiamo con $f$ la larghezza di un fosso al piano di formazione della strada, e poniamo:

$$A = S; \quad \xi = y; \quad L = l + 2f; \quad q = q_s; \quad p = p_s;$$

$$\frac{q_s}{q^2_s - p^2_s} = b \text{ essendo sempre } b > 0.$$

Ritenendo, come si ha generalmente per le sezioni in terra, che la base di ciascun fosso sia uguale ad $\frac{1}{3}f$, l'area complessiva dei due fossi laterali che sempre si hanno nelle sezioni in trincea risulta espressa da $\frac{4}{9}f^2 q_s$, perciò la formola (1) diventa:

$$S = b\left\{y + \frac{1}{2}(l + 2f)q_s\right\}^2 - \frac{1}{4}(l + 2f)^2 q_s + \frac{4}{9}f^2 q_s$$

che si può scrivere:

$$S = by^2 + b(l + 2f)q_s y + \frac{1}{4}b(l + 2f)^2 p_s^2 + \frac{4}{9}f^2 q_s. \qquad (5)$$

Per il caso più comunemente considerato in pratica, pel quale si ha:

$$q_s = 1, \quad f = 1^{m},50, \quad b = \frac{1}{1 - p^2_s}$$

risulta:

$$S' = \frac{1}{1 - p^2_s}\left\{y^2 + (l + 3)y + \frac{1}{4}(l + 3)^2 p_s^2\right\} + 1.$$

Se $p_s = 0$, come generalmente avviene per le strade in pianura, si ha:

$$S'' = y^2 + (l + 3)y + 1. \qquad (6)$$

6. — *Equazione delle aree.*

La sezione R in rilevato sarà $\gtreqless$ di quella S di scavo secondochè nell'equazione

$$\frac{R}{S} = \alpha$$

risulta $\alpha \gtreqless 1$.

Per brevità di scrittura poniamo:

$$\left.\begin{array}{l} c = alq_r; \quad d = b(l+2f)q_s; \quad e = \frac{-1}{4\alpha} al^2p_r^2 + \frac{1}{4} b(l+2f)^2p_s^2 + \frac{4}{9} f^2q_s \\ \text{essendo ancora, come si è indicato precedentemente:} \\ a = \frac{q_r}{q^2_r - p^2_r}; \qquad b = \frac{q_s}{q^2_s - p^2_s}. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Per $q_r = \frac{2}{3}$ e $q_s = 1$, che sono i casi più comunemente considerati in pratica, si ha:

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{6}{4 - 9p^2_r}; \qquad b = \frac{1}{1 - p^2_s} \\ c = \frac{4}{4 - 9p^2_r} l; \quad d = \frac{1}{1 - p^2_s}(l+3), \quad e = \frac{-3}{2\alpha(4 - 9p^2_r)} l^2p_r^2 + \frac{(l+3)^2p_s}{4(1 - p^2_s)} + 1. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Se $p_r = p_s = 0$, cioè se il profilo del terreno naturale è orizzontale, si ha:

$$\left\{ a = \frac{3}{2}, \quad b = 1, \quad c = l, \quad d = l + 3, \quad e = 1 \right\}. \qquad (9)$$

L'equazione $\frac{R}{S} = \alpha$ si può quindi scrivere sotto la forma seguente:

$$f(x, y, \alpha) = ax^2 - \alpha by^2 + cx - \alpha dy - \alpha e = 0 \qquad (10)$$

la quale, quando si riferiscano le variabili $x$, $y$ ad una coppia di assi cartesiani, che supporremo ortogonali, è l'equazione di una semplice infinità di coniche, variando $\alpha$ fra 0 e $+\infty$.

Praticamente, per non dar luogo a formole complicate, sarà conveniente cercare prima i valori numerici dei coefficienti $a$, $b$, $c$, $d$, nonchè quello del termine noto $e$.

Risolvendo la (10) rispetto ad $x$ si ottiene:

$$x = -\frac{c}{2a} \pm \frac{\sqrt{4a\alpha(by^2 + dy + e) + c^2}}{2a} \tag{11}$$

essendo $a > 0$, $x$ sarà reale quando $by^2 + dy + e > 0$. E poichè è $b > 0$, per valori di $y \gtreqless 0$ infinitamente grandi, questa disuguaglianza è sempre soddisfatta, perciò avremo per $x$ sempre un valore reale.

La (10) è adunque l'equazione di una famiglia d'iperbole di centro comune definito dalle equazioni:

$$x_c = -\frac{c}{2a}, \qquad y_c = -\frac{d}{2b} \tag{12}$$

(che d'altronde si ottengono dalla $f(xy\alpha)$ uguagliandone a zero le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.) ed aventi gli assi diametrali comuni e paralleli agli assi coordinati.

Per le notazioni (7) si ha:

$$x_c = -\frac{1}{2}\, l q_r\,; \qquad y_c = -\frac{1}{2}\,(l + 2f)\, q_s\,;$$

il centro giace quindi nel quadrante negativo.

Per $q_r = \frac{2}{3}$, $q_s = 1$ risulta:

$$x'_c = -\frac{1}{3}\, l\,; \qquad y'_c = -\frac{1}{2}\,(l + 3).$$

7. — *Vertici delle iperbole.*

Per conoscere la disposizione della iperbole $f(x, y, \alpha) = 0$ conviene ricercare la situazione dei vertici sugli assi diametrali.

La (10) risolta rispetto ad $y$ dà:

$$y = -\frac{d}{2b} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 d^2 + 4\alpha b(ax^2 + cx - \alpha e)}}{2\alpha b}. \tag{13}$$

Posto $y = -\frac{d}{2b}$ si ha:

$$4abx^2 + 4bcx - \alpha(4be - d^2) = 0$$

da cui

$$x = -\frac{c}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2c^2 + \alpha(4be - d^2)ab}}{2ab}. \tag{14}$$

Può essere

$$bc^2 + \alpha a(4be - d^2) \gtreqless 0. \tag{15}$$

Nei primi due casi essendo $x$ reale, i vertici giaciono sull'asse diametrale parallelo all'asse delle $x$; nell' ultimo caso i vertici reali sono sull'altro asse diametrale.

Per le notazioni (7) la (15), dividendo per il termine positivo $ab$, diventa

$$l^2(q_r - \alpha q_s) - 4\alpha f q_s \left(l + \frac{5}{9} f\right) \gtreqless 0 \tag{16}$$

LA QUALE È INDIPENDENTE DALLA PENDENZA TRASVERSALE DEL TERRENO:

Quindi per una stessa strada, tutte le iperbole definite dalla $f(xy\alpha)$ per i diversi valori di $p_r$, $p_s$, per lo stesso valore di $\alpha$ hanno i vertici sullo stesso asse diametrale.

Per $q_r = \frac{2}{3}$, $q_s = 1$, $\alpha = 1$ la (16) diventa:

$$-l^2 - 18l - 15 < 0. \tag{17}$$

Il secondo termine del primo membro della 16 è sempre negativo, quindi $\left(\text{come avviene nel caso pratico per cui si ha } q_r = \frac{2}{3}, q_s = 1\right)$ se si ha $q_r < q_s$ ed $\alpha \geqq 1$, il primo membro della 16 è sempre negativo, ossia i vertici della iperbola $f(xy\alpha)$ giaciono sull'asse diametrale parallelo all'asse delle $y$.

In ogni caso quando ciò avviene, l'ordinata comune a questi vertici vale:

$$y = -\frac{d}{2b} \pm \frac{\sqrt{a^2\alpha^2b^2 - \alpha ab(4ae + c^2)}}{2a\alpha b} \tag{18}$$

che per i simboli (7) si trasforma in quest'altra:

$$y = -\frac{1}{2}(l + 2f) q_s \pm$$

$$\pm \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{q_r^2 - p_r^2}{q_s} \left\{ l^2\alpha(q_s\alpha - q_r) + 4\alpha^2 q_s^2 f \left(l + \frac{5}{9}\right) \right\}}. \tag{19}$$

Se poi i vertici giaciono sull'asse diametrale parallelo all'asse $x$, l'ascissa di essi è:

$$x = -\frac{c}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2c^2 - \alpha(4be - d^2)ab}}{2ab} \tag{20}$$

e per le (7):

$$x = -\frac{l}{3} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q^2_r - p^2_r}{q_r}\left\{ l^2(q_r - \alpha q_s) - 4\alpha f q_s\left(l + \frac{5}{9}f\right)\right\}}. \tag{21}$$

Per $q_r = \frac{2}{3}$, $q_s = 1$, $\alpha = 1$, le 19 e 21 diventano

$$y = -\frac{l+3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - p_s^2}\sqrt{\frac{l^2}{3} + 6l + 5};$$

$$x = -\frac{l}{3} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 - 9p^2_r}{6}}\sqrt{-\frac{l^2}{3} - 6l - 5}$$

la seconda delle quali dà per $x$ valori immaginari.

8. — *Equazione degli asintoti.*

Notoriamente i termini di 2° grado della $f(xy\alpha)$ uguagliati a zero dànno l'equazione complessiva delle due rette uscenti dall'origine degli assi parallelamente agli asintoti. Tale equazione è:

$$ax^2 - \alpha by^2 = 0.$$

Per ottenere le equazioni degli asintoti basterà porre per $x$ e per $y$ le espressioni $x - x_c$, $y - y_c$ che si ottengono sostituendo a $x_c$ e $y_c$ i valori trovati al num. 8. Con ciò l'equazione ora scritta diventa:

$$a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 - \alpha b\left(y + \frac{1}{2}\frac{d}{b}\right)^2 = 0$$

dalla quale si ricava:

$$x = -\frac{c}{2a} \pm \left\{ \frac{\alpha d}{2\sqrt{\alpha ab}} + \frac{\sqrt{\alpha ab}}{a} y \right\}. \tag{22}$$

Per le notazioni (7):

$$x = -\frac{lq_r}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2_r - p^2_s}{q^2_s - 9p^2_s}} \cdot \left\{ \frac{q^2_s \sqrt{\alpha}}{2\sqrt{q_r q_s}}(l + 2f) + \sqrt{\alpha \frac{q_s}{q_r}}\, y \right\} \tag{23}$$

e per $q_r = \frac{2}{3}$, $q_s = 1$:

$$x = -\frac{l}{3} \pm \sqrt{\frac{4-9p^2_r}{9-9p^2_s}} \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\alpha}{2} (l+3) + \sqrt{\alpha}\, y \right\}. \qquad (24)$$

Nel caso di terreno orizzontale, cioè $p_r = p_s = 0$, si ha:

$$x = -\frac{l}{3} \pm \sqrt{\frac{2}{3}\alpha} \left\{ \frac{l+3}{2} + y \right\}. \qquad (25)$$

Le equazioni separate degli asintoti sono poi:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &\equiv 2\sqrt{\alpha a b}\, x + 2\alpha b y + \left(\alpha d + \frac{c}{a}\sqrt{\alpha a b}\right) = 0 \\ s_2 &\equiv 2\sqrt{\alpha a b}\, x - 2\alpha b y - \left(\alpha d - \frac{c}{a}\sqrt{\alpha a b}\right) = 0 \end{aligned} \right\} \qquad (26)$$

Giova notare che, essendo il centro $c$ delle iperbole (fig. 3) nel quadrante negativo e gli assi diametrali paralleli ai coordinati, un asintoto deve necessariamente segare gli assi dalla parte negativa e, come facilmente si riconosce, questo asintoto è $s_1$.

L'asintoto $s_2$ poi, salvo il caso che passi per l'origine delle coordinate, segherà uno degli assi di riferimento dalla parte (+) e l'altro dalla parte (—). Segherà dalla parte (+) l'asse $x$ o l'asse $y$, o passerà per l'origine, secondochè sarà:

$$\alpha d \gtreqless \frac{c}{a}\sqrt{\alpha a b}, \quad \text{ossia} \quad \frac{d}{c} \gtreqless \sqrt{\frac{b}{\alpha a}}$$

oppure per i simboli (7):

$$\frac{l+2f}{l} \cdot \frac{q_s}{q_r} \gtreqless \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$$

che si può scrivere:

$$\frac{l+2f}{l} \gtreqless \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \left(\frac{q_r}{q_s}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{q^2_s - p^2_s}{q^2_r - p^2_r}}.$$

Per $p_r = \frac{2}{3}$, $q_s = 1$ si ha

$$\frac{l+3}{l} \gtreqless \frac{3}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-p^2_s}{4-p^2_r}}$$

Per $p_r = p_s = 0$ questa condizione diventa $l \gtreqless \dfrac{3\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{3} - \sqrt{\alpha}}$

e per $\alpha = 1$: $l \gtreqless \sqrt{6}$.

Fig. 3.

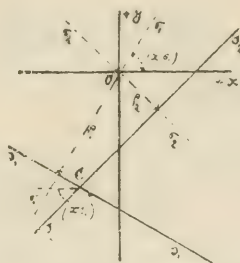



Fig. 4.

9. — *Semiangolo degli asintoti e distanza di questi dall'origine degli assi coordinati.*

Diciamo $\sigma_1$, $\sigma_2$ le normali condotte per l'origine 0 delle coordinate agli asintoti, e $\rho_1$, $\rho_2$ misurino i segmenti delle dette normali, compresi tra l'origine e gli asintoti $s_1$, $s_2$: riterremo $\rho_1$, $\rho_2$ sempre positivi (fig. 4).

Notoriamente i parametri delle variabili nell'equazione di una retta sono proporzionali ai coseni degli angoli formati dagli assi cartesiani colla normale alla retta, ed il rapporto di proporzionalità, a meno del segno, è quello del termine noto alla distanza normale della retta dalla origine.

Nel caso attuale, e ad esempio per la retta $s_1$ (ritenendo positivi gli archi da destra verso sinistra) si ha:

$$\frac{2\sqrt{\alpha ab}}{\cos(x\sigma_1)} = \frac{2\alpha by}{\cos(\sigma_1 y)} = -\frac{\alpha d + \frac{c}{a}\sqrt{\alpha ab}}{\rho_1},$$

da cui

$$\cos(x\sigma_1) = \frac{-2\sqrt{\alpha ab}}{\alpha d + \frac{c}{a}\sqrt{\alpha ab}}\,\rho_1; \quad \cos(\sigma_1 y) = \frac{-2ab}{\alpha d - \frac{c}{a}\sqrt{\alpha ab}}\,\rho_1.$$

D'altronde essendo $\widehat{x\sigma_1} + \widehat{\sigma_1 y} = \frac{\pi}{2}$ e quindi

$$\cos^2(x\sigma_1) + \cos^2(\sigma_1 y) = 1,$$

si ottiene:

$$\left(\alpha d + \frac{c}{a}\sqrt{\alpha ab}\right)^2 = \{4\alpha ab + 4\alpha^2 b^2\}\,\rho_1^2.$$

Ricavando da quest' equazione il valore di $\rho_1$ e sostituendolo nelle equazioni precedenti si ottiene facilmente:

$$\cos(x\sigma_1) = \frac{-\sqrt{a}}{\sqrt{a+\alpha b}} \; ; \quad \cos(\sigma_1 y) = \frac{-\sqrt{\alpha b}}{\sqrt{a+\alpha b}}$$

e pei simboli (7):

$$\cos(x\sigma_1) = \frac{-\sqrt{q_r}}{\sqrt{q_r + \alpha q_s \frac{q^2_r - p^2_r}{q^2_s - p^2_s}}} \; ; \quad \cos(\sigma_1 y) = \frac{-\sqrt{\alpha q_s}}{\sqrt{\alpha q_s + q_r \frac{q^2_r - p^2_r}{q^2_s - p^2_s}}} .$$

Analogamente per $s_2$ si ha:

$$\rho_2 = \frac{\pm \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{d}{\sqrt{b}} - \frac{c}{\sqrt{a}} \right\}}{2\sqrt{a+\alpha b}}$$

e dovendo essere $\rho_2 > 0$, sarà da prendere il segno $\pm$ secondochè il numeratore è $\gtrless 0$. Di più:

$$\cos(x\sigma_2) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+\alpha b}} , \quad \cos(\sigma_2 y) = \frac{-\sqrt{\alpha b}}{\sqrt{a+\alpha b}} .$$

Essendo poi $\cos(x\sigma_1) = \operatorname{sen}(xs_1)$, il semiangolo $\widehat{xs_1}$ degli asintoti sarà definito dall'equazione:

$$\operatorname{sen}(xs_1) = \frac{-\sqrt{a}}{\sqrt{a+\alpha b}} = \frac{-\sqrt{q_r}}{\sqrt{q_r + \alpha q_s \frac{q^2_r - p^2_r}{q^2_s - p^2_s}}} .$$

Conviene osservare che (salvo il caso in cui gli asintoti coincidano con gli assi diametrali), l'angolo $\widehat{xs_1}$ è sempre $> 90^\circ$.

Per $q_r = \frac{2}{3}$, $q_s = 1$, $p_r = p_s = 0$ si ha:

$$\operatorname{sen}(xs_1) = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3+2\alpha}}$$

e per $\alpha = 1$:

$$\operatorname{sen}(xs_1) = -\sqrt{\frac{3}{5}} .$$

**10.** — *Punto d'incontro degli asintoti con gli assi cartesiani.*
Se nella (22) poniamo dapprima $y=0$ e poscia $x=0$ si ottiene rispettivamente:

$$x = -\frac{c}{2a} \pm \frac{\sqrt{\alpha}\, d}{2\sqrt{ab}}\,; \qquad y = -\frac{d}{2b} \pm \frac{c}{2\sqrt{\alpha ab}}$$

e per i simboli (7) si ha:

$$x = -\frac{lq_r}{2} \pm \frac{q^2{}_s\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{q_s q_r}} \sqrt{\frac{q^2{}_r - p^2{}_r}{q^2{}_s - p^2{}_s}}\,(l+2f)\,;$$

$$y = -\frac{(l+2f)}{2} \pm \frac{q^2{}_r}{2\sqrt{\alpha q_r q_s}} \sqrt{\frac{q^2{}_s - p^2{}_s}{q^2{}_r - p^2{}_r}}\, l.$$

Per $q_r = \frac{2}{3}$, $q_s = 1$ risulta:

$$x = -\frac{l}{3} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\alpha\,.\sqrt{\frac{4-9p^2{}_r}{9-9p^2{}_s}}\,(l+3);$$

$$y = -\frac{(l+3)}{2} \pm \frac{2}{3}\,\frac{l}{\sqrt{6\alpha}} \sqrt{\frac{9-9p^2{}_s}{4-9p^2{}_r}}\,.$$

Per $p_r = p_s = 0$:

$$x = -\frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha}{6}}\,(l+3)\,; \quad y = -\frac{(l+3)}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{6\alpha}}\,.\,l.$$

**11.** — *Punto d'incontro della iperbole con gli assi.*
Nella (11) e nella (13) ponendo rispettivamente $y=0$ e $x=0$ si ha:

$$x = -\frac{c}{2a} \pm \frac{\sqrt{4a\alpha e + c^2}}{2a}\,; \quad y = -\frac{d}{2b} \pm \frac{\sqrt{d^2 - 4be}}{2b}$$

e per le notazioni (7):

$$x = -\frac{lq_r}{2} \pm \frac{\sqrt{(q^2{}_r - p^2{}_r)\left\{l^2 q_r + ab(l+2f)^2 p^2{}_s + \frac{16}{9}\alpha f^2 q_s\right\}}}{2\sqrt{q_r}}$$

$$y = -\frac{(l+2f)}{2} q_s \pm \frac{\sqrt{(q^2{}_s - p^2{}_s)\left\{(l+2f)^2 q_s + \frac{a}{\alpha} l^2 p^2{}_r - \frac{16}{9} f^2 q_s\right\}}}{2\sqrt{q_s}}\,.$$

Per $q_r = \frac{2}{3}$, $q_s = 1$, $f = 1^m,50$:

$$x = -\frac{l}{3} \pm \frac{\sqrt{4 - 9p^2_r \left\{ \frac{2}{3} l^2 - \alpha p^2_s \frac{(l+3)^2}{1-p^2_s} + 4\alpha \right\}}}{2\sqrt{6}}$$

$$y = -\frac{(l+3)}{2} \pm \frac{\sqrt{(1-p^2_s)\left\{ (l+3)^2 + \frac{6p^2_r}{4-9p^2_r} \frac{l^2}{\alpha} - 4 \right\}}}{2}$$

e nel caso di terreno orizzontale, cioè nel caso di $p_r = p_s = 0$:

$$x = -\frac{l}{3} \pm \frac{\sqrt{l^2 - 6\alpha}}{3}; \quad y = -\frac{(l+3)}{2} \pm \frac{\sqrt{l^2 + 6l + 5}}{2}.$$

**12.** — L'equazione $f(xy\alpha) = 0$ definisce una semplice infinità di iperbole, variando $\alpha$ fra 0 e $+\infty$.

Gli assi diametrali ed il centro (giacente nel quadrante negativo) sono invariabili al variare di $\alpha$.

Il caso di equivalenza delle aree R ed S è dato da $\alpha = 1$, e l'iperbole $f(x, y, 1)$ è caratteristica, *inquantochè essa divide il piano in due regioni, l'una luogo di punti per cui* $\alpha > 1$. *ossia per cui l'area della sezione in rilevato eccede quella della sezione in isterro; l'altra, luogo di punti per cui* $\alpha < 1$, *ossia per cui l'area della sezione in rilevato è minore di quella della sezione in isterro.*

La (16) decide della disposizione delle iperbole per ogni valore di $\alpha$. Per $\alpha = 1$ i vertici saranno sull'asse diametrale parallelo all'asse delle $x$, o su quello parallelo all'asse delle $y$, secondochè si ha $q_r \gtrless q_s$, epperciò pel caso pratico in cui $q_r = \frac{2}{3}$, $q_s = 1$, i vertici sono posti sul diametro parallelo all'asse $y$.

Ad ogni modo per taluni valori di $\alpha$, $q_r$, $q_s$, il 1° membro della (16) potrà essere $\gtreqless 0$.

Consideriamo ciascuno di questi casi.

**13.** — Suppongasi il 1° membro della (16) maggiore di zero. L'equazione (11) per $\alpha = 1$ diventa:

$$x_1 = -\frac{c}{2a} \pm \frac{\sqrt{4a(by^2 + dy + e_1) + c^2}}{2a}.$$

Ora, se si pone $x' = x - \frac{c}{2a}$, con che si trasporta l'asse $y$ parallelamente a sè stesso a passare pel centro dell'iperbole $f(xy\alpha) = 0$, essendo

$$[4a\alpha(by^2 + dy + e) + c^2] \gtreqless [4a(by^2 + dy + e_1) + c^2]$$

secondochè $\alpha \gtreqless 1$, si vede che per uno stesso valore di $y$, è

$$[x'] \gtreqless [x'_1]$$

secondochè è $\alpha \gtreqless 1$. Vale a dire: se $\alpha > 1$ l'iperbole $f(xy\alpha) = 0$ giace nella regione di piano interna alla $f(xy1) = 0$, mentre che per $\alpha < 1$ l'iperbole $f(xy\alpha) = 0$ giace nella regione di piano esterna alla $f(xy1) = 0$. Ma l'essere $\alpha \gtreqless 1$ equivale ad essere $R \gtreqless S$, perciò i *punti* $(x, y)$ *interni alla* $f(xy1) = 0$ *od esterni corrispondono a valori di* $x, y$, *per cui il rilevato eccede lo sterro e viceversa.*

Il semiangolo ottuso $(xs_1)$ degli asintoti della $f(xy\alpha) = 0$ definito dalla equazione:

$$\operatorname{sen}(xs_1) = \frac{-\sqrt{a}}{\sqrt{a + \alpha b}}$$

per $\alpha = 1$ diventa: $\operatorname{sen}(xs_1)_1 = \frac{-\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$. Ma siccome

$$\left| \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a\alpha + \alpha b}} \right| \lesseqgtr \left| \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} \right| \text{ secondochè è } \alpha \gtreqless 1 \text{ si ha,}$$

essendo $(xs_1) > 90°$:

$$\widehat{xs_1} \gtreqless (xs_1)_1.$$

Perciò per $\alpha \gtreqless 1$ il semiangolo ottuso $(xs_1)$ della $f(xy\alpha) = 0$ è $\gtreqless$ di quello $(xs_1)$ della $f(xy1) = 0$. Se $\alpha$ cresce all'$\infty$ gli asintoti tendono a confondersi coll'asse diametrale parallelo a quello delle $x$; se invece $\alpha$ diminuisce fino a zero, gli asintoti tendono a coincidere coll'asse diametrale parallelo a quello delle $y$.

Si potrebbe ancora facilmente dimostrare che i punti d'incontro della iperbole $f(xy\alpha) = 0$, o dei suoi asintoti, con l'asse $x$ distano maggiormente dall'origine che non i corrispondenti punti di $f(xy1) = 0$, per $\alpha > 1$ e viceversa.

**14.** — Supponiamo il 1° membro della 16 uguale a zero. I vertici della $f(xy\alpha)=0$ coincidono col centro e quindi la conica degenera in un paio di rette. Tra queste, quelle corrispondenti ad $\alpha=1$ godono della proprietà dianzi detta per la $f(xy1)=0$ di separare nel piano i punti per cui è $\alpha \gtreqless 1$.

Per $q_r=\frac{2}{3}$, $q_s=1$, $\alpha=1$, $f=1{,}5$ questo caso verificasi pel valore di $l$ dato dall'equazione:

$$l^2+18l+15=0$$

ossia per

$$l_1=-17{,}124;\ l_2=-0{,}876,$$

valori questi che praticamente non hanno significato.

**15.** — Supposto il 1° membro della 16 maggiore di zero, i vertici cadono allora sul diametro parallelo all'asse $y$: la discussione, analoga al caso del num. 13, fa vedere che i punti esterni od interni alla iperbole $f(xy1)=0$ dànno valori di $x$, $y$ per cui $\alpha \gtreqless 1$, ossia per cui il rilevato eccede lo scavo.

**16.** — *Uguaglianza delle quote rosse $x$, $y$.*

Se tra le variabili $x$, $y$, oltre alla $f(xy\alpha)=0$ deve passare una relazione $\varphi(xy)=0$, i punti comuni alle curve

$$f(xy\alpha)=0,\quad \varphi(xy)=0,$$

dànno i valori richiesti di $x$, $y$.

In particolare, se la quota rossa $x$ deve essere uguale alla quota rossa $y$, i punti di intersezione della retta $x=y$, bisettrice dell'angolo degli assi, con l'iperbole $f(xy\alpha)=0$ sono quelli che soddisfano al problema.

La (10) per $x=y$ dà:

$$(a-\alpha b)x^2+(c-\alpha d)x-\alpha e=0 \tag{27}$$

da cui

$$x=\frac{-(c-\alpha d)\pm\sqrt{(c-\alpha d)^2+4(a-\alpha b)\alpha e}}{2(a-\alpha b)}. \tag{28}$$

Per $\alpha=1$, $q_r=\frac{2}{3}$, $q_s=1$, $p_r=p_s=0$, $f=1{,}5$ si ha:

$$x_1=3\pm3{,}3166$$

e tenendo conto soltanto del segno + si ha:

$$x_1 = 6,3166.$$

Questo risultato è importante nella pratica, e dice che trattandosi di terreni ordinari e orizzontali, il procedimento suggerito dai pratici di tracciare le livellette di compenso in modo che nel profilo longitudinale risultino equivalenti le aree di scavo e di riporto, è vero nel solo caso che le quote rosse di scavo e di riporto di due sezioni equidistanti dal punto di passaggio fra esse compreso, valgano metri 6,316.

Ricavando $x$ dalla prima derivata della (27) si ottiene

$$x = \frac{\alpha d - c}{2(a - \alpha b)}$$

che per $\alpha = 1$ dà $x = 3^m,00$.

Per confortare con un esempio pratico questi risultati, consideriamo una strada insediata su terreno orizzontale, avente la larghezza di m. 6,00 da ciglio a ciglio; di due sezioni trasversali di essa, una in riporto e l'altra di scavo, calcoliamone le aree per diversi valori della quota rossa $h$.

Supponendo le scarpate della trincea inclinate a 45°, quelle del rilevato inclinate a 3 di base per 2 di altezza, e ritenendo che i fossi laterali della trincea abbiano una larghezza al fondo di $0^m,50$ ed una profondità di $0^m,50$, si hanno i seguenti valori per l'area di ciascuna sezione considerata:

| Valori di $h =$ | Area della sezione in riporto | Area della sezione di scavo | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1^m,00$ | $7^{m^2},50$ | $12^{m^2},00$ | eccesso | di scavo | | $m^2$ | 4,50 |
| 3,00 | 31,50 | 37,00 | " | " | | " | 5,50 |
| 5,00 | 67,50 | 71,00 | " | " | | " | 3,50 |
| 6,00 | 90,00 | 91,00 | " | " | | " | 1,00 |
| 6,3166 | 97,74 | 97,74 | differenza | | | " | 0,00 |
| 7,00 | 115,50 | 113,00 | eccesso | di riporto | | " | 2,50 |
| 10,00 | 210,00 | 191,00 | " | " | | " | 19,00 |
| 15,00 | 427,50 | 361,00 | " | " | | " | 66,50 |

Come già abbiamo dimostrato col ragionamento fatto precedentemente, per il caso considerato ora si ha il massimo eccesso di scavo allorchè $h = 3^m,00$, e si ha perfetto compenso allorchè $h = 6^m,3166$.

Dando a $p_r$ e $p_s$ varii valori, quelli più comuni in pratica, si potranno ottenere dalla 28 i valori di $h$ per i quali si ha equivalenza fra l'area di una sezione di riporto e quella di una sezione di scavo per ogni singola pendenza trasversale del terreno, e si potranno così tracciare le livellette di progetto con giusti criterii per ottenere il compenso fra i volumi di scavo e di riporto.

## III.

**17.** — Introducendo nell'equazione $\frac{R}{S} = \alpha$ le espressioni 3 e 5, l'equazione ora scritta si può porre sotto la forma:

$$a\left(x + \frac{1}{2}\, lq_r\right)^2 - \alpha b \left\{ y + \frac{1}{2}\,(l + 2f)\, q_s \right\}^2 -$$

$$- \frac{1}{4}\, l^2 q_r + \frac{\alpha}{4}\,(l + 2f)^2 q_s - \frac{4}{9}\,\alpha f^2 q_s = 0. \qquad (29)$$

Se si assumono come incognite le ordinate:

$$\left(x + \frac{1}{2}\, lq_r\right) = X; \qquad y + \frac{1}{2}\,(l + 2f)\, q_s = Y$$

che misurano rispettivamente la distanza del punto D del terreno naturale dall'intersezione F delle scarpate laterali della sezione in rilevato (fig. 2) e di quella di scavo. e se si pone

$$r = \frac{1}{4\alpha}\, l^2 q_r - \frac{1}{4}\,(l + 2f)^2 q_s + \frac{4}{9}\, f^2 q_s.$$

l'equazione delle aree diventa:

$$f(XY\alpha) = aX^2 - \alpha b Y^2 - \alpha r = 0.$$

Per $q_r = \frac{2}{3}$, $q_s = 1$ si ha

$$a = \frac{6}{4 - 9p_r^2}\,; \quad b = \frac{1}{1 - p_s^2}\,; \quad r = l^2\left(\frac{1}{6\alpha} - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2}\, l - \frac{5}{4}\,. \qquad (30)$$

La $f(XY\alpha)=0$ si può scrivere sotto la forma

$$\frac{X^2}{\left(\frac{\alpha r}{a}\right)} - \frac{Y^2}{\left(\frac{\alpha r}{b}\right)} = 1,$$

la quale, riferendo le variabili X, Y a due assi cartesiani ortogonali, è l'equazione di una semplice infinità di iperbole col centro sull'origine degli assi coordinati che sono anche assi diametrali della iperbole $f(XY\alpha)=0$. Risolvendo questa equazione rispetto ad X si ha:

$$X = \pm\sqrt{\frac{abY^2+\alpha r}{a}}.$$

Posto $X=0$ si ottiene:

$$bY^2+r=0 \quad \text{da cui} \quad Y=\sqrt{\frac{-r}{b}}.$$

Se $r<0$, Y è reale e l'equazione precedente dà allora le ordinate dei vertici della iperbole; se $r=0$, $Y=0$ l'iperbole degenera in due rette; se $r>0$ i vertici reali sono sull'asse $x$ e l'ascissa di essi è data dalla equazione:

$$X=\sqrt{\frac{\alpha r}{a}}.$$

L'equazione complessiva degli asintoti è:

$$aX^2-\alpha bY^2=0$$

da cui

$$X=\pm\sqrt{\alpha\frac{b}{a}}\,.\,Y.$$

e le equazioni separate sono:

$$s_1\equiv X+\sqrt{\frac{\alpha b}{a}}\,Y=0;\qquad s_2\equiv X-\sqrt{\frac{\alpha b}{a}}\,Y=0.$$

Il semiangolo degli asintoti è dato dall'equazione:

$$\operatorname{sen}(xs_1)=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+\alpha b}}.$$

Ripetendo per questo caso il ragionamento fatto precedentemente si deducono facilmente queste considerazioni pratiche:

1° Se l'iperbole $f(XY1)$ ha i vertici sull'asse Y i punti interni od esterni ad essa dànno valori di X, Y per cui $\alpha \gtreqless 1$, ossia per cui il rilevato è $\gtreqless$ dello scavo;

2° Se l'iperbole $f(XY1)$ ha i vertici sull'asse Y, i punti interni od esterni ad essa dànno valori di X, Y per cui $\alpha \lesseqgtr 1$, ossia per cui il rilevato è $\lesseqgtr$ dello scavo.

I punti della $f(XY1) = 0$ per cui le ordinate $x$, $y$ sono uguali, sono dati dalla intersezione di essa iperbole con la retta:

$$X - \frac{1}{2} lq_r = Y - \frac{1}{2} (l + 2f) q_s ,$$

ossia con la retta:

$$X - Y - \frac{1}{2} \left\{ lq_r - (l + 2f) q_s \right\} = 0 ,$$

che è inclinata a 45° sugli assi, che sega nei punti $X_1$, $Y_1$:

$$X_1 = \frac{1}{2} \left\{ lq_r - (l + 2f) q_s \right\} ; \quad Y_1 = - \frac{1}{2} \left\{ lq_r - (l + 2f) \right\} q_s .$$

Per $q_r = \frac{2}{3}$, $q_s = 1$ si ha:

$$X_1 = - \left( \frac{l}{6} + 1{,}50 \right) ; \quad Y_1 = \frac{l}{3} + 1{,}50 .$$

## IV.

18. — Se nell'equazione (29) poniamo:

$$\left( x + \frac{1}{2} lq_r \right)^2 = \xi ; \quad \left\{ y + \frac{1}{2} (l + 2f) q_s \right\}^2 = \eta ,$$

$$r = \frac{1}{4\alpha} l^2 q_r - \frac{1}{4} (l + 2f)^2 q_s + \frac{4}{9} f^2 q_s$$

essa assume la forma

$$s \equiv a \xi - \alpha b \eta - \alpha r = 0 , \tag{31}$$

la quale, quando si riferiscano le variabili $\xi$, $\eta$, ad una coppia

di assi cartesiani $\xi$, $\eta$, rappresenta una infinità di rette inclinate sull'asse $\xi$ dell'angolo dato da

$$\operatorname{sen}(\xi, s) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + \alpha^2 b^2}},$$

e seganti gli assi $\xi$, $\eta$, rispettivamente nei punti

$$\xi' = \frac{\alpha r}{a}; \qquad \eta' = -\frac{r}{b}.$$

Per $q_r = \frac{2}{3}$, $q_s = 1$ e per i valori di $a, b, r$, del num. 17 si ha:

$$\xi' = \frac{\alpha}{6}(4 - 9p_r^2)\left\{ l^2\left(\frac{1}{6\alpha} - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2}l - \frac{5}{4}\right\};$$

$$\eta' = 1 - p_s^2\left\{ l\left(\frac{1}{6\alpha} - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2}l - \frac{5}{4}\right\}$$

e per $\alpha = 1$:

$$\xi' = -\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}p_r^2\right)\left\{\frac{1}{12}l^2 + \frac{3}{2}l + \frac{5}{4}\right\};$$

$$\eta' = -(1 - p_s^2)\left\{\frac{1}{12}l^2 + \frac{3}{2}l + \frac{5}{4}\right\}.$$

Quando è $p_r = p_s = 0$, cioè quando la sezione trasversale del terreno è orizzontale, si ha:

$$\xi' = -\left\{\frac{1}{18}l^2 + l + \frac{5}{6}\right\}; \quad \eta' = -\left\{\frac{1}{12}l^2 + \frac{3}{2}l + \frac{5}{4}\right\}.$$

**19.** — La retta $s_1$, per cui $\alpha = 1$, separa il piano in due regioni, l'una luogo di punti per cui $\alpha > 1$, l'altra luogo di punti per cui $\alpha < 1$.

Essa retta, a seconda dei valori di $q_r$, $q_s$, può segare gli assi coordinati tanto dalla parte positiva quanto dalla parte negativa.

Supponagasi ad es. $r > 0$, allora è

$$\xi' = \frac{\alpha r}{a} > 0, \qquad \eta' = \frac{r}{b} < 0.$$

Dalla (31) si ha:

$$\xi = \frac{\alpha r}{a} + \frac{\alpha b}{a}\eta\,; \quad \eta = -\frac{r}{a} + \frac{a}{b}\xi$$

che per $\alpha = 1$ diventano:

$$\xi_1 = \frac{r_1}{a} + \frac{b}{a}\eta\,; \quad \eta_1 = -\frac{r_1}{a} + \frac{a}{b}\xi.$$

Si considerino le espressioni di $\xi$ e di $\xi_1$ e si supponga:

1° $\eta > 0$; allora $\xi > 0$, e sarà $\xi \gtrless \xi_1$ secondochè $\alpha \gtrless 1$, ossia la porzione di quadrante positivo a destra di $s_1$ è luogo di punti per cui il rilevato eccede lo scavo e viceversa (fig. 5).

2° $\eta < 0$, sarà $[r] > [b\eta]$, allora $\xi > 0$ e $\xi \lesseqgtr \xi_1$ secondochè è $\alpha \gtrless 1$, ossia la porzione di quadrante compreso tra gli assi $\xi$, $\eta$ e la retta $s_1$ compete a punti per cui il rilevato eccede lo sterro.

3° $\eta < 0$ e $\left|\frac{r}{b}\right| > \left|\eta\right|$, si ha $\xi < 0$ e $\left|\xi\right| \gtrless \left|\xi_1\right|$ secondochè $\alpha \gtrless 1$, ossia la porzione di piano compresa fra gli assi $-\xi$, $-\eta$ e la retta $s_1$ è luogo di punti per cui il rilevato eccede lo sterro.

Il caso più generale che si presenta in pratica è quando $r < 0$ (caso in cui $q_r = \frac{2}{3}$, $q_s = 1$).

Allora

$$\xi' = \frac{\alpha r}{a} < 0; \quad \eta' = -\frac{r}{b} > 0.$$

Mettendo in evidenza il segno di $r$ si ha dalla (31):

$$\xi = -\frac{\alpha r}{a} + \frac{\alpha b}{a}\eta; \quad \eta = +\frac{r}{a} + \frac{a}{\alpha b}\xi$$

e per $\alpha = 1$:

$$\xi_1 = -\frac{r_1}{a} + \frac{b}{a}\eta; \quad \eta_1 = +\frac{r_1}{a} + \frac{a}{b}\xi.$$

Si considerino le espressioni di $\xi$ e di $\xi_1$ e si supponga:

1° $\eta < 0$, allora $\xi < 0$ e sarà $\xi \lesseqgtr \xi_1$ secondochè $\alpha \gtrless 1$, ossia la porzione di quadrante negativo compresa tra l'asse

$-\xi$ e la retta $s_1$ (fig. 6) è luogo di punti per cui lo scavo eccede il rilevato e viceversa.

2° $\eta > 0$ ma $|r| > |b\eta|$; allora $\xi < 0$ e sarà $\xi \lesseqgtr \xi_1$ secondochè $\alpha \lesseqgtr 1$, ossia la porzione di piano compresa tra gli assi $-\xi$, $+\eta$ e la $s_1$ compete a punti pei quali lo scavo eccede il rilevato e viceversa.

3° $\eta > 0$ e $|r| < |b\eta|$, allora $\xi > 0$ e sarà $\xi \gtreqless \xi_1$ secondochè $\alpha \gtreqless 1$ ossia la porzione di piano compresa tra gli assi $+\xi$, $+\eta$ e la $s_1$ compete a punti pei quali lo scavo eccede il rilevato e viceversa.

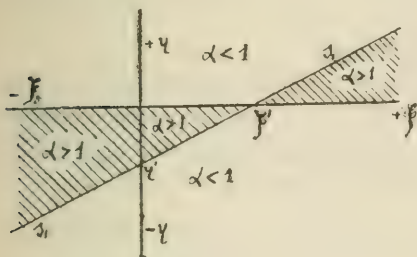
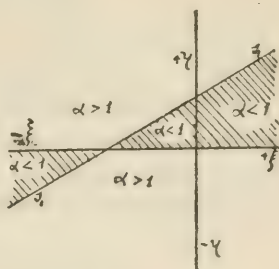



Fig. 5. Fig. 6.

**20.** — Il caso di uguaglianza delle quote rosse si ha ponendo:

$$\sqrt{\xi} - \frac{1}{2} lq_r = \sqrt{\eta} - \frac{1}{2}(l + 2f) q_s,$$

da cui, facendo

$$\Delta = \left\{ \frac{1}{2} lq_r - \frac{1}{2}(l + 2f) q_s \right\}^2,$$

si ottiene:

$$\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta - 2\xi\Delta - 2\eta\Delta + \Delta^2 = 0 \qquad (32)$$

che è l'equazione di una parabola simmetricamente posta rispetto agli assi.

Risolvendo rispetto a $\xi$ e a $\eta$ rispettivamente si ha:

$$\xi = \eta + \Delta \pm \sqrt{2\eta\Delta}\,; \qquad \eta = \xi + \Delta \pm \sqrt{2\xi\Delta}$$

e però, per essere $\Delta$ quadrato perfetto, rilevasi che la parabola giace tutta nel campo positivo e che gli assi sono ad essa tangenti nei punti

$$(\xi = 0,\ \eta = \Delta); \quad (\eta = 0,\ \xi = \Delta).$$

L'asse diametrale è poi la retta uscente dall'origine e bisecante la coppia di riferimento; per cui le coordinate del vertice sono:

$$\xi_v = \eta_v = \frac{\Delta}{4}.$$

Per $q_r = \frac{2}{3}$, $q_s = 1$ si ha:

$$\Delta = -\left(\frac{3}{2} + \frac{l}{6}\right)^2 = \frac{l^2}{36} + \frac{l}{2} + \frac{9}{4};$$

$$\xi_v = \eta_v = \frac{l^2}{144} + \frac{l}{8} + \frac{9}{16}.$$

21. — *Trasformazione degli assi.*

Per costruire speditamente la parabola, giova operare una trasformazione di assi, assumendo come nuova coppia di riferimento l'asse diametrale e la tangente nel vertice della parabola.

L'equazione (32) posta sotto la forma:

$$(\xi - \eta)^2 - 2\,\Delta\,\xi - 2\,\Delta\,\eta + \Delta^2 = 0$$

quando si metta

$$\xi_1 = \xi - \frac{\Delta}{4}; \quad \eta_1 = \eta - \frac{\Delta}{4},$$

con che si trasporta l'origine degli assi nel vertice della parabola, diventa:

$$(\xi_1 - \eta_1)^2 - 2\,\Delta\,(\xi_1 + \eta_1) = 0.$$

Si ruotino poi gli assi di 45° intorno al vertice da sinistra verso destra: per tal modo si trasformano le coordinate $\xi_1$, $\eta_1$ in altre $\xi_0$, $\eta_0$ definite dalle equazioni:

$$\xi_1 = \xi_0 \,.\, \cos 45^\circ - \eta_0 \,.\, \operatorname{sen} 45^\circ$$

$$\eta_1 = \xi_0 \,.\, \operatorname{sen} 45^\circ + \eta_0 \,.\, \cos 45^\circ$$

ossia

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(\xi_0 - \eta_0)$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(\xi_0 + \eta_0).$$

L'equazione della parabola prende perciò la forma

$$\eta_0^2 = \sqrt{2}\,\Delta\,\xi_0 = \delta\xi_0$$

ed il valore di $\delta$, che si può scrivere $\delta = \sqrt{2}\,\left(\frac{9+l}{6}\right)^2$, può in ogni caso, e per ogni valore di $l$, essere fornito da apposite tabelle numeriche.

**22.** — Per quanto si è detto, la retta $s$ sega sempre la parabola.

La segherà sugli assi $\xi$ oppure $\eta$ se avviene che sia

$$\frac{r}{a} = \Delta \quad \text{oppure} \quad \frac{r}{b} = \Delta$$

secondochè $r \lesseqgtr 0$.

Pel caso di $q_r = \frac{2}{3}$, $q_s = 1$ essendo $r < 0$ la retta $s$ sega la parabola sull'asse $\eta$ se

$$\Delta b - r = 0 \tag{33}$$

ossia se

$$\left(\frac{l^2}{18} + l + \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{l^2}{6} + 3l + \frac{5}{2}\right)(1 - p_s^2) = 0$$

ciò che avviene per il valore $p_0$ di $p_s$ dato da:

$$p_0 = \sqrt{\frac{l^2 + 48l - 48}{4l^2 + 8l + 60}}$$

oppure anche pel valore $l_0$ di $l$:

$$l_0 = -9 \pm \frac{3\sqrt{22}\,\sqrt{1 - p_s^2}}{\sqrt{2 - 3p_s^2}}$$

inquantochè la (33) può scriversi sotto la forma:

$$\frac{1}{18}\,l^2 \left\{1 - 3(1 - p_s^2)\right\} + l \left\{1 - 3(1 - p_s^2)\right\} + \frac{1}{2}\left\{9 - (1 - p_s^2)\right\} = 0.$$

In quest'ultimo caso deve essere $2 - 3\,p_s^2 > 0$ (essendo $1 - p_s^2 > 0$ perchè per ipotesi $a' > 0$) cioè $p \leqq \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Dunque per un dato valore di $l$ e per valori $p_s \gtreqless p_0$ della pendenza trasversale del terreno nella sezione in isterro considerata, la retta $s$ sega la parabola al disopra o al disotto del punto di tangenza della parabola stessa con l'asse $\eta$.

Ciò avviene analogamente per un dato valore di $p_s$ e per valori di $l \gtreqless l_0$.

Per $p_s = 0$ si ha $l_0 = -9 \pm 3\sqrt{11} = -9 \pm 3 \times 3{,}3166$.

Inoltre quando $s$ sega la parabola sull'asse $\eta$ si ha:

$$\xi = \left(x + \frac{1}{2}\, l q_r\right)^2 = 0.$$

che per $q_r = \frac{2}{3}$ dà

$$x = -\frac{1}{3}\, l$$

ciò che richiede per $l$ o per $x$ segno negativo.

Praticamente il caso della retta $s$ segante la parabola sull'asse $\eta$ non ha adunque importanza.

Nell'ipotesi che sia $p_s = 0$, si ha ancora:
$l'_0 = -18{,}3166$ e $x'_0 = 6{,}3166$; $l''_0 = +0{,}9498$ e $x_0'' = -0{,}3166$ i quali risultati concordano con quelli trovati al num. 16.

23. — Praticamente i valori che si devono considerare per $x$ e per $y$ sono positivi, come pure sono tali quelli di $\sqrt{\xi}$ e $\sqrt{\eta}$, e le quote rosse $x$, $y$, sono date dalle relazioni

$$x = \sqrt{\xi} - \frac{1}{2}\, l q_r\,; \qquad y = \sqrt{\eta} - \frac{1}{2}\,(l + 2f)\, q_s\,,$$

che per $q_r = \frac{2}{3}$, $q_s = 1$ diventano

$$x = \sqrt{\xi} - \frac{1}{3}\, l\,; \qquad y = \sqrt{\eta} - \frac{1}{2}\,(l + 3).$$

Si può quindi domandare:

“ *per un dato valore positivo di* $l$, *quali sono i valori limiti di* $\xi$, $\eta$, *per cui risultano uguali le aree delle sezioni di scavo e di riporto e le quote rosse hanno valori uguali e* POSITIVI? „.

Ed in altri termini, quali sono i valori di $\sqrt{\xi}$ e $\sqrt{\eta}$ al disotto dei quali si ha bensì l'uguaglianza delle quote rosse $x$ e $y$, ma queste hanno segno negativo?

Perchè le quote rosse siano $> 0$ è necessario che sia

$$\sqrt{\xi} > \frac{l}{3}, \qquad \sqrt{\eta} > \frac{1}{2}(l+3).$$

Se adunque si conducono (fig. 7) le rette

$$\bar{\xi} = \frac{l^2}{9}; \ \bar{\eta} = \frac{1}{4}(l+3)^2,$$

i punti giacenti nel rettangolo tratteggiato hanno coordinate minori di $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, e quindi la porzione di piano racchiusa dalle rette $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ e dagli assi compete a punti pei quali, per valori positivi di $l$, le quote rosse $x$ e $y$ sono negative.

È adunque inutile, nella pratica, tracciare il segmento di parabola giacente nel rettangolo tratteggiato, perchè i punti giacenti su di esso segmento, per valori di $l > 0$ dànno bensì valori di $x = y$, ma questi hanno segno negativo, e perciò non hanno significato in pratica.

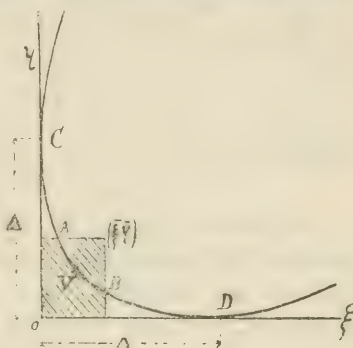



Fig. 7.

Si può quindi conchiudere che i valori limiti per $\xi$, $\eta$, al disotto dei quali le quote rosse benchè uguali non si presentano mai in pratica, sono le coordinate dei punti A, B, intersezione delle rette $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ con la parabola.

In particolare si può ancora notare che i punti A e B possono cadere tanto sul segmento parabolico finito CVD quanto sul segmento indefinito C $\infty$ D. Se entrambi i punti A e B cadono su quest'ultimo segmento è inutile tracciare l'arco parabolico CVD perchè tutto compreso nel rettangolo ($\xi$, $\eta$; $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$) che dà per $x = y$ segni negativi per $l > 0$. Perchè sul tratto CD esistano effettivamente punti pei quali per $l > 0$ si abbia $x = y > 0$ è necessario adunque che almeno uno dei punti A e B cada nel tratto parabolico CVD, e perciò deve essere $\Delta > \bar{\xi}$ ossia

$$\frac{l^2}{36} + \frac{l}{2} + \frac{9}{4} > \frac{l^2}{9}$$

cioè

$$l^2 - 6l - 27 > 0.$$

Se il primo membro di quest' ultima espressione è nullo si ha:

$$l_1 = 3 \pm 6.$$

Dunque per valori di $l > 0$ ma minori di $l_1 = 9^m,00$ non esistono sulla porzione di parabola punti pei quali le quote rosse hanno segni positivi; perciò detto segmento parabolico non ha importanza, in questo caso, nella pratica.

Ciò si verifica per l'esempio trovato al num. 22, in cui per $p_s = 0$ e per il valore di $l$:

$$l''_0 = 0,9498 < l_1$$

si ebbe appunto $x''_0 < 0$.

Dall'esame teorico fin qui svolto risulta chiaramente la facilità di poter ricavare in ogni caso gli elementi necessari per giudicare del compenso esatto fra i volumi di scavo e di riporto nei progetti stradali valendosi semplicemente del profilo longitudinale della strada e conoscendo la pendenza trasversale del terreno, senza ricorrere per ciò al calcolo delle aree delle sezioni trasversali, oppure ad altri metodi speditivi ma di limitata approssimazione.

Inoltre se nel tracciare le livellette di progetto sul profilo longitudinale di una strada si avrà presente la teoria qui esposta, si potranno evitare i profili di prova che sempre si fanno in questi studî.

Per rendere pratiche le cose fin qui dette, converrebbe tradurre in tavole grafiche oppure in tabelle numeriche i risultati dei ragionamenti precedenti, considerando e combinando insieme i vari valori che nella pratica possono assumere le quantità $l$, $p$, $q$, $\alpha$.

E ciò è quanto ci proponiamo di fare prossimamente.

Torino, Aprile 1898.

# *Sulla taratura del fasometro delle tangenti;*

Nota di RICCARDO ARNO'.

In una precedente Nota (*) ho esposto il principio di un apparecchio, a cui ho dato il nome di fasometro delle tangenti. Esso consiste essenzialmente nella combinazione di un elettrodinamometro e di un apparecchio di induzione a campo Ferraris, ed è destinato a dare il valore della tangente dell'angolo $\varphi$ di spostamento di fase fra due correnti alternative sinusoidali, qualunque siano i valori, e comunque diversi l'uno dall'altro, delle intensità efficaci $I_1$ e $I_2$ delle correnti stesse.

Dette rispettivamente $\alpha$ e $\beta$ le deviazioni, $K'$ e $K''$ le costanti relative ai due apparecchi, che costituiscono nel loro complesso il fasometro, si scrive

$$I_1 I_2 \cos\varphi = K'\alpha\,,$$
$$I_1 I_2 \operatorname{sen}\varphi = K''\beta\,,$$

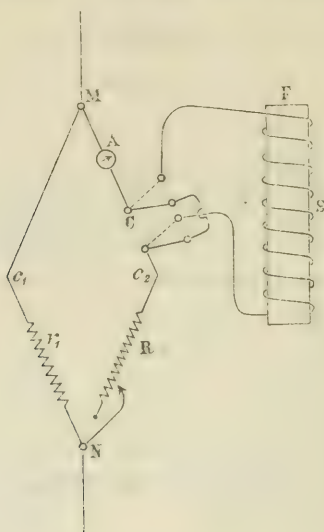
onde, detto $K$ il rapporto costante $\frac{K''}{K'}$, si ricava

$$\operatorname{tang}\varphi = K\,\frac{\beta}{\alpha}\,.$$

La presente Nota ha per oggetto l'esposizione di un metodo semplice e comodo per la taratura del fasometro delle tangenti, col quale metodo si determina la costante $K$ dello strumento semplicemente ricorrendo all'impiego di un reometro, che non ha neppure bisogno di essere tarato.

Si costituiscano due circuiti derivati $c_1$ e $c_2$, alle estremità M ed N dei quali sia mantenuta una differenza di potenziale alternativa di valore efficace costante V. Il primo circuito $c_1$

(*) " Atti ", Vol. XXXII, 21 marzo 1897: *Fasometro delle tangenti.*

comprenda una resistenza ohmica determinata $\gamma_1$, la quale non deve essere variata durante l'esperimento; il secondo circuito $c_2$ comprenda invece un reostato R, un reometro A ed un commutatore C, mediante il quale si possa inserire in circuito una

spirale S con nucleo di ferro sezionato F mobile nell'interno della spirale stessa.

Disposto allora il commutatore C nella posizione indicata in figura, con che rimane esclusa dal circuito $c_2$ la spirale S, e inserita mediante il reostato R una determinata resistenza $\gamma_2$, si disponga il fasometro per essere usato come semplice elettrodinamometro e si facciano passare le due correnti, che in quelle condizioni si hanno nei due circuiti derivati $c_1$ e $c_2$, attraverso alle spirali, fissa e mobile, dello strumento. Detta $\delta$ la deviazione si ha

$$I_1 I_2 = K'\delta, \qquad [I]$$

poichè in tal caso, non essendovi nei due circuiti nè induttanza nè capacità elettrostatica, si ha $\varphi = 0$ e quindi $\cos\varphi = 1$.

Ciò posto, fatta la lettura sul reometro A, si introduca nel circuito $c_2$, mediante il commutatore C, la spirale S col nucleo di ferro F in una determinata posizione, e si inserisca nello

stesso circuito, per mezzo del reostato R, una resistenza $\gamma'_2$ tale che sul reometro A si abbia la medesima deviazione di prima. In tali condizioni, pur rimanendo invariati i valori delle intensità efficaci delle due correnti, si ha però fra le correnti stesse uno spostamento di fase diverso da zero, causato dall'induttanza del circuito $c_2$; onde si scrive

$$I_1 I_2 \cos\varphi = K'\delta'. \qquad [II]$$

Dividendo a membro a membro l'equazione [II] per la [I], si ottiene quindi

$$\cos\varphi = \frac{\delta'}{\delta},$$

ossia

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{\delta'}\sqrt{\delta^2 - \delta'^2}.$$

Ma se, nelle condizioni del secondo esperimento, si fanno anche passare le due correnti derivate attraverso all'apparecchio a campo Ferraris, si ha ancora, detta $\delta''$ la deviazione che subisce la spirale indotta sotto l'azione del campo Ferraris generato da quelle correnti,

$$\operatorname{tang}\varphi = K\frac{\delta''}{\delta'}.$$

Onde si ricava

$$K = \frac{1}{\delta''}\sqrt{\delta^2 - \delta'^2}.$$

Un altro modo di operare è quello di stabilire a priori l'angolo $\varphi$ di spostamento di fase fra le due correnti $I_1$ e $I_2$. In tal caso converrà disporre le condizioni dell'esperimento per modo da avere $\varphi = 45^\circ$, sia perchè allora, pur essendo tale spostamento di fase facilmente ottenibile senza perciò dover ricorrere a grandi valori della induttanza nel circuito $c_2$ (*), si ha la massima sen-

(*) Perchè sia l'angolo di spostamento di fase fra $I_1$ e $I_2$, e quindi quello fra V ed $I_2$ uguale a 45°, per il circuito $c_2$, detta L l'induttanza ed $n$ la frequenza della corrente alternativa, deve essere soddisfatta la condizione $2\pi n L = \gamma'_2$.

sibilità del fasometro; e sia perchè allora $\tan \varphi = 1$, lo che semplifica l'espressione che serve a ricavare il valore di K, la quale si riduce alla seguente

$$K = \frac{\delta'}{\delta''} .$$

Ora perchè sia $\varphi = 45°$ basterà, operando convenientemente sul nucleo di ferro mobile della spirale S e sul reostato R, fare in modo che il circuito $c_2$ venga ad avere tale resistenza ohmica e tale induttanza che, pur rimanendo costante la lettura sul reometro A, quella $\delta'$ sull'elettrodinamometro sia tale da soddisfare alla relazione

$$\frac{\delta'}{\delta} = \cos 45° = 0{,}707,$$

ossia

$$\delta' = 0{,}707\,\delta.$$

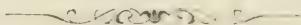
La deviazione $\delta'$ sull'elettrodinamometro nel secondo esperimento dovrà dunque essere uguale a $\frac{707}{1000}$ della deviazione $\delta$ nel primo esperimento.

Finalmente, se il fasometro delle tangenti è così costrutto che ne possa facilmente venire modificata la costante K, è sempre possibile, operando convenientemente sull'apparecchio, di ottenere che il valore di K risulti uguale all'unità, in guisa da avere la tangente dell'angolo di spostamento di fase fra le due correnti mediante il semplice rapporto delle due deviazioni $\beta$ ed $\alpha$.

Nel caso particolare di $\varphi = 45°$, si ha infatti $K = 1$ alla sola condizione che sia $\delta' = \delta''$. Basterà dunque modificare convenientemente la costante dell'uno o dell'altro o di ambedue gli apparecchi che costituiscono il fasometro, fino a che, per $\varphi = 45°$, si abbiano uguali deviazioni sui due apparecchi medesimi.

*L'Accademico Segretario*
ANDREA NACCARI.

# CLASSE

DI

# SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

In causa della solennità patriottica che si è celebrata domenica 8 maggio 1898, non si è tenuta la seduta, indetta per quel giorno; è però stata data facoltà ai Socii che avessero avuto da presentare note per gli *Atti* o proprie o di estranei sotto la loro responsabilità, di inviarle ugualmente alla Segreteria entro il detto giorno 8, salvo a farne regolare presentazione alla Classe nella successiva adunanza del 22 stesso mese.

*L'Accademico Segretario*
CESARE NANI.

Torino — VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

# CLASSE
DI
## SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

### Adunanza del 15 Maggio 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ALFONSO COSSA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Berruti, D'Ovidio, Mosso, Spezia, Camerano, Segre, Peano, Volterra, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti e Naccari Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della precedente seduta.

Il Presidente comunica una lettera del Ministro della Pubblica Istruzione che accompagna il R. Decreto con cui il Socio Bizzozero è nominato Direttore della Classe. Comunica inoltre una lettera di ringraziamento del Prof. Golgi per la sua nomina a Socio nazionale non residente e quelle dei professori Castelnuovo, Cesàro, Pacinotti e Stokes per la loro nomina a Soci corrispondenti.

Il Presidente dà notizia che si terrà in Liegi nel prossimo settembre un Congresso internazionale d'Idrologia e di Climatologia, il cui programma fu inviato all'Accademia.

Il Segretario presenta parecchi opuscoli inviati in omaggio all'Accademia dal Socio corrispondente Guglielmo Roux.

Il Presidente partecipa che, non essendosi tenuta seduta il 1° maggio, per l'inaugurazione dell'Esposizione, conforme all'avviso inviato ai Soci vennero presentate alla Segreteria entro il 1° maggio le seguenti note:

1° *Sulle curvature delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque,* nota prima del Prof. Luigi Berzolari, presentata dal Socio Segre,

2° *Esame del compenso fra lo scavo e il riporto nei progetti stradali,* nota dell' Ing. Vittorio Baggi, presentata dal Socio Jadanza,

3° *Sulla taratura del fasometro delle tangenti,* nota dell'Ing. Riccardo Arnò, presentata dal Socio Naccari.

Avendo il Socio Segre presentata entro il 1° maggio una memoria del Dott. Gino Fano, intitolata: *I gruppi di Jonquières generalizzati,* il Presidente ne affidò l' esame ai Soci D'Ovidio e Segre. Il Presidente invita il Socio Segre a leggere la relazione sulla memoria del Dott. Fano. Le conclusioni della relazione, che sono favorevoli alla lettura della memoria, vengono approvate, e compiuta la lettura, si delibera che la memoria venga accolta nei volumi accademici.

Vengono poscia accolte per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° *Sull'equazione differenziale del 2° ordine lineare omogenea,* nota del Prof. Mineo Chini, presentata dal Socio Peano,

2° *Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie,* nota del Prof. Onorato Niccoletti, presentata dal Socio Peano,

3° *Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque,* nota seconda del Prof. Luigi Berzolari, presentata dal Socio Segre,

4° *Ricerche mineralogiche sui giacimenti di anidrite e di gesso dei dintorni di Oulx,* nota del Dott. Luigi Colomba, presentata dal Socio Spezia.

Il Socio Naccari, a nome del Socio Gibelli, presenta una memoria del Prof. Edoardo Martel, intitolata: *Contribuzione all'anatomia dell' Hypecoum procumbens.* Verrà esaminata dai Soci Gibelli e Camerano.

# LETTURE

## *Sull'equazione differenziale del 2° ordine lineare omogenea;*

Nota di MINEO CHINI.

Ho diviso la Nota in due parti. Nella prima dimostro che se nell'equazione del 2° ordine lineare omogenea:

$$y'' + py' + qy = 0$$

si dà al coefficiente $p$ la forma $\frac{a'}{ma}$, con $m$ intero e positivo, allora come equazione differenziale lineare omogenea d'ordine $m+1$, alla quale soddisfa ogni forma di grado $m$, a coefficienti costanti, di due integrali qualunque della precedente, possiamo assumerne una, il cui primo membro è una funzione uguale o contraria alla sua *aggiunta*.

Nella seconda parte, fermandomi al caso di $m = 2$, faccio uso della precedente proprietà per esprimere l'integrale generale di ogni equazione differenziale della forma:

$$ay'' + \frac{a'}{2}y' + by = \frac{K}{y^3}$$

con $a$, $b$ funzioni qualunque della variabile indipendente e K costante arbitraria, per mezzo di due integrali fondamentali dell'equazione stessa priva del 2° membro.

### I.

Considerando l'equazione differenziale lineare omogenea del 2° ordine:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{1}$$

si sa che ogni forma di grado $m$, a coefficienti costanti, di due soluzioni particolari della medesima soddisfa all'equazione differenziale lineare omogenea d'ordine $m+1$:

$$S'_{m,m} + pm\,S_{m,m} + q\,S_{m,m-1} = 0$$

in cui le S sono delle espressioni differenziali che si ottengono mediante la formula ricorrente:

$$(2) \qquad (n+1)S_{m,n+1} = S'_{m,n} + np\,S_{m,n} + (m-n+1)q\,S_{m,n-1}$$

con $S_{m,0} = z$, $S_{m,1} = z'$ (*).

Moltiplicando ambo i membri della (2) per $n!$ abbiamo l'altra:

$$(n+1)!\,S_{m,n+1} = n!\,S'_{m,n} + n!\,np\,S_{m,n} + (n-1)!\,n(m-n+1)q\,S_{m,n-1}$$

Quindi, posto:

$$r!S_{m,r} = f_r,$$

possiamo dire che ogni forma di grado $m$ di due soluzioni della (1) soddisfa l'equazione:

$$f_{m+1}(z) = 0$$

essendo $f_{m+1}(z)$ l'espressione differenziale che si ottiene coll'uso ripetuto della formula:

$$(3) \qquad f_{r+1} = f'_r + rpf_r + r(m-r+1)qf_{r-1}$$

dando ad $r$ successivamente i valori $1, 2, \ldots m$, e prendendo

$$f_0 = z, f_1 = z'.$$

Ora, se il coefficiente $p$ lo scriviamo sotto la forma $\frac{a'}{ma}$, essendo $a$ una conveniente funzione della variabile indipendente, la (3) si trasforma nell'altra:

$$af_{r+1} = af'_r + \frac{r}{m}a'f_r + r(m-r+1)qaf_{r-1}.$$

(*) D. Besso, *Di alcune proprietà dell'equazione differenziale lineare omogenea del 2° ordine*, " Memorie della R. Accademia dei Lincei ", Vol. XIV, anno 1882-83.

Posto infine: $af_r = F_r$, questa relazione diventa:

$$F_{r+1} = F'_r - \frac{m-r}{m} \frac{a'}{a} F_r + r(m-r+1) q F_{r-1}.$$

E possiamo perciò concludere: Ogni forma di grado $m$ di due integrali dell'equazione differenziale:

$$(4) \qquad y'' + \frac{a'}{ma} y' + by = 0$$

essendo $a, b$ funzioni qualunque della variabile indipendente, soddisfa all'equazione

$$F_{m+1}(z) = 0,$$

dove $F_{m+1}(z)$ è un polinomio differenziale lineare omogeneo d'ordine $m+1$, che si ottiene coll'applicazione della formula ricorrente:

$$(5) \qquad F_{r+1} = F'_r - \frac{m-r}{m} \frac{a'}{a} F_r + r(m-r+1) b F_{r-1}$$

quando si faccia successivamente $r = 1, 2, \ldots . . m$, e si prenda $F_0 = az$, $F_1 = az'$.

Ora, ricordiamo che ad ogni polinomio differenziale lineare omogeneo ne corrisponde un altro detto l'*aggiunto* del primo, e che un polinomio d'ordine $n$:

$$\sum_0^n {}_r \alpha_r y^{(r)}$$

coincide col suo aggiunto (se $n$ è pari) o ne differisce solo per il segno (se $n$ è dispari) quando i coefficienti $\alpha$ siano legati dalla relazione:

$$\alpha_r = (-1)^{n+r} . \sum_0^{n-r} {}_s (-1)^s \binom{r+s}{s} \alpha_{r+s}^{(s)} \quad (*).$$

---

(*) Veggasi p. e. la mia Nota: *Sopra una classe di polinomi differenziali*, " Atti del R. Istituto veneto ", tomo V, serie VII, anno 1893-94.

Ne segue che un polinomio differenziale del primo ordine è il contrario del suo aggiunto quando sia della forma

$$\alpha y' + \frac{\alpha'}{2} y.$$

Quello del 2° ordine uguale al suo aggiunto deve essere della forma:

$$\alpha y'' + \alpha' y' + \beta y. \tag{6}$$

Quello analogo del 3° ordine:

$$\alpha y''' + \frac{3}{2} \alpha' y'' + \beta y' + \frac{1}{4} (2\beta' - \alpha''') y. \tag{7}$$

Quello del 4° ordine:

$$\alpha y^{\text{IV}} + 2\alpha' y''' + \beta y'' + (\beta' - \alpha''') y' + \gamma y. \tag{8}$$

Quello del 5°:

$$\alpha y^{\text{V}} + \frac{5}{2} \alpha' y^{\text{IV}} + \beta y''' + \frac{1}{2} (3\beta' - 5\alpha''') y'' + \tag{9}$$

$$+ \frac{\gamma}{2} y' + \frac{1}{4} (\gamma' - \beta''' + 2\alpha^{\text{V}}) y.$$

E così di seguito.

Ora, se coll'uso della (5) determiniamo il polinomio $F_2$ nel caso di $m = 1$, otteniamo:

$$F_2 = F_1' + bF_0 = az'' + a'z' + abz$$

cioè $F_2$ risulterà della forma (6). Analogamente, se $m = 2$, calcolando il polinomio $F_3$ per mezzo delle relazioni:

$$F_2 = F'_1 - \frac{1}{2} \frac{a'}{a} F_1 + 2bF_0$$

$$F_3 = F'_2 + 2bF_1$$

abbiamo:

$$F_3 = az''' + \frac{3}{2} a' z'' + \left( \frac{a''}{2} + 4ab \right) z' + 2(ab)' z$$

che è della forma (7).

Nel caso di $m = 3$, per avere $F_4$ dovremo usare le relazioni:

$$F_2 = F'_1 - \frac{2}{3} \frac{a'}{a} F_1 + 3bF_0$$

$$F_3 = F'_2 - \frac{1}{3} \frac{a'}{a} F_2 + 4bF_1$$

$$F_4 = F'_3 + 3bF_2$$

ed effettuando i calcoli, otterremo per $F_4$ un polinomio della forma (8).

Per $m = 4$ il calcolo di $F_5$ darebbe un polinomio della forma (9).

In generale possiamo dimostrare che, qualunque sia $m$, il corrispondente polinomio $F_{m+1}$ ottenuto coll'uso della (5) è uguale al suo aggiunto (se $m$ è dispari) o ne è il contrario (se $m$ è pari).

Infatti, supponiamo che quando $m = n$ il polinomio differenziale $F_{n+1}$ ricavato dalle $n$ uguaglianze:

$$F_2 = F'_1 - \frac{n-1}{n} \frac{a'}{a} F_1 + nbF_0$$

$$F_3 = F'_2 - \frac{n-2}{n} \frac{a'}{a} F_2 + 2(n-1)bF_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_n = F'_{n-1} - \frac{1}{n} \frac{a'}{a} F_{n-1} + (n-1)2bF_{n-2}$$

$$F_{n+1} = F'_n + nbF_{n-1}$$

con $F_0 = az$, $F_1 = az'$, risulti uguale o contrario al suo aggiunto. Ciò significa che nel polinomio

$$F_{n+1} = \alpha_0 z^{(n+1)} + \alpha_1 z^{(n)} + \dots + \alpha_{n+1-r} z^{(r)} + \alpha_{n+2-r} z^{(r-1)} + \dots$$
$$\dots + \alpha_n z' + \alpha_{n+1} z$$

il coefficiente di $z^{(r)}$ è legato ai precedenti dalla relazione:

$$\alpha_{n+1-r} = (-1)^{n+1+r} \cdot \sum_{0}^{n+1-r}{}_s (-1)^s \binom{r+s}{s} \alpha^{(s)}_{n+1-r-s}.$$

Se invece $m = n + 1$, calcolando il polinomio differenziale $\Phi_{n+2}$ per mezzo delle $n + 1$ uguaglianze:

$$\Phi_2 = \Phi'_1 - \frac{n}{n+1} \frac{a'}{a} \Phi_1 + (n+1) b \Phi_0$$

$$\Phi_3 = \Phi'_2 - \frac{n-1}{n+1} \frac{a'}{a} \Phi_2 + 2nb\Phi_1$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

$$\Phi_n = \Phi'_{n-1} - \frac{2}{n+1} \frac{a'}{a} \Phi_{n-1} + (n-1)3b\Phi_{n-2}$$

$$\Phi_{n+1} = \Phi'_n - \frac{1}{n+1} \frac{a'}{a} \Phi_n + n2b\Phi_{n-1}$$

$$\Phi_{n+2} = \Phi'_{n+1} + (n+1) b \Phi_n$$

con $\Phi_0 = az$, $\Phi_1 = az'$, avremo:

$$\Phi_{n+2} = \beta_0 z^{(n+2)} + \beta_1 z^{(n+1)} + \ldots + \beta_{n+2-r} z^{(r)} + \ldots + \beta_n z'' + \beta_{n+1} z' + \beta_{n+2} z.$$

Ora, poichè $\Phi_r$ altro non è che $F_r$ in cui si è cambiato $n$ in $n + 1$, ed essendo il numero delle $\Phi$ che seguono $\Phi_r$ superiore di 1 a quello delle F che seguono $F_r$, ne deduciamo che il coefficiente di $z^{(r)}$ in $\Phi_{n+2}$ risulterà legato ai precedenti della medesima relazione che lega il coefficiente di $z^{(r-1)}$ in $F_{n+1}$ a tutti quelli che lo precedono. Cioè avremo:

$$\beta_{n+2-r} = (-1)^{n+r} . \sum_{0}^{n+2-r}{}_s (-1)^s \binom{r+s}{s} \beta^{(s)}_{n+2-r-s} .$$

Quindi il polinomio differenziale $\Phi_{n+2}$ sarà uguale o contrario al suo aggiunto, secondo che il precedente $F_{n+1}$ era il contrario o l'uguale del proprio aggiunto. Ed avendo verificata tale proprietà per $m = 1, 2, 3, 4$ ne segue che essa varrà per ogni valore di $m$.

Dunque: *Ogni forma di grado m, a coefficienti costanti, di due soluzioni della* (4) *soddisfa ad un' equazione* $F_{m+1}(z) = 0$, *il*

*cui primo membro è un polinomio differenziale lineare omogeneo d'ordine* $m+1$, *che è uguale o contrario al suo aggiunto* (secondo che $m$ è dispari o pari).

È poi evidente che ogni equazione differenziale lineare omogenea del 2° ordine è sempre riducibile alla forma della (4).

## II.

Come applicazione della precedente proprietà, fermiamoci più specialmente a considerare una forma quadratica di due soluzioni dell'equazione:

$$(10) \qquad y'' + \frac{a'}{2a} y' + by = 0.$$

Se $y_1$ e $y_2$ sono due integrali fondamentali della (10) l'espressione

$$C_{11}y_1^2 + 2C_{12}y_1y_2 + C_{22}y_2^2$$

essendo $C_{11}, C_{12}, C_{22}$ delle costanti arbitrarie, soddisferà l'equazione:

$$(11) \qquad 2az''' + 3a'z'' + (a'' + 8ab)z' + 4(ab)'z = 0.$$

Di guisa che l'integrale generale della (11) sarà:

$$z = C_{11}y_1^2 + 2C_{12}y_1y_2 + C_{22}y_2^2.$$

Ora, essendo il primo membro della (11) un polinomio differenziale che è il contrario del suo aggiunto, se lo moltiplichiamo per $z$, il prodotto risulterà, come è noto, una derivata esatta (*). In questo caso tale prodotto è la derivata dell'espressione

$$\varphi(z) = 2azz'' + a'zz' + 4abz^2 - az'^2.$$

(*) Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, 2ª parte, p. 110.

Perciò ogni soluzione della (11) soddisfa l'equazione:

$$\varphi(z) = K \tag{12}$$

essendo K una costante il cui valore dipende dalla soluzione che si considera. Reciprocamente, ogni soluzione della (12), qualunque sia K, soddisfa la (11); e quindi è una forma quadratica di due soluzioni fondamentali della (10), che perciò potrà sempre ridursi al prodotto di due particolari soluzioni di questa.

Vediamo ora di determinare il valore della costante K per ogni integrale particolare della (11), cioè corrispondentemente ad ogni particolare forma quadratica degli integrali $y_1$ e $y_2$ della (10).

A tale scopo osserviamo che se in $\varphi(z)$ poniamo per $z$ il prodotto di due integrali qualunque $y_r, y_s$ della (10), si ha:

$$\varphi(y_r y_s) = -a(y'_r y_s - y'_s y_r)^2.$$

Ne segue che:

$$\varphi(y_1^2) = \varphi(y_2^2) = 0, \text{ mentre } \varphi(y_1 y_2) = -a\Delta^2$$

essendo

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

Ed è noto che la quantità $a\Delta^2$ è una determinata costante.

Ora, se in $\varphi(z)$ facciamo $z = C_{11}y_1^2 + 2C_{12}y_1y_2 + C_{22}y_2^2$, come resultato di questa sostituzione si trova, dopo alcune semplificazioni, la quantità costante

$$4a\Delta^2(C_{11}C_{22} - C_{12}^2),$$

che sarà dunque il valore di K. Si deduce che se K è una costante qualunque, l'integrazione dell'equazione differenziale (12) può farsi dipendere da quella della (10); giacchè l'integrale generale della prima è evidentemente:

$$z = C_1 y_1^2 + C_2 y_2^2 + 2y_1y_2\sqrt{C_1C_2 - \frac{K}{4a\Delta^2}}$$

con $C_1$ e $C_2$ costanti arbitrarie.

E poichè se in $\varphi(z)$ poniamo $z = u^2$, si ha:

$$\varphi(u^2) = 2u^3(2au'' + a'u' + 2abu)$$

ne deduciamo che l'integrale generale dell'equazione:

$$u'' + \frac{a'}{2a}u' + bu = \frac{K}{au^3}$$

qualunque sia la costante K, è:

$$u^2 = C_1 y_1^2 + C_2 y_2^2 + 2y_1 y_2 \sqrt{C_1 C_2 - \frac{K}{a\Delta^2}}\,. \tag{13}$$

D'altra parte, essendo il 2° membro della (13) sempre riducibile al prodotto di due particolari soluzioni della (10), potremo concludere:

*L'integrazione di un'equazione differenziale della forma:*

$$ay'' + \frac{a'}{2}y' + by = \frac{K}{y^3}$$

*dipende da quella dell'equazione lineare omogenea:*

$$ay'' + \frac{a'}{2}y' + by = 0$$

*ed ogni integrale della prima risulta medio proporzionale di due particolari integrali della seconda.*

Caserta, 1898.

# *Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie;*

Nota di ONORATO NICCOLETTI a Modena.

## § I. — Alcuni lemmi.

**1.** — Siano $a, b \dots l$ dei numeri reali qualunque; $\alpha, \beta \dots \lambda$ dei numeri intieri e positivi (maggiori od uguali ad 1), la cui somma indichiamo con $n$: poniamo quindi:

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \dots\dots (x-l)^{\lambda}. \tag{1}$$

Essendo allora $F(x)$ un polinomio qualunque di grado $n-1$, e ponendo per brevità:

$$\varphi(x) = (x-a)^{\alpha}\frac{F(x)}{f(x)}, \quad \psi(x) = (x-b)^{\beta}\frac{F(x)}{f(x)}, \dots\dots,$$

$$\omega(x) = (x-l)^{\lambda}\frac{F(x)}{f(x)},$$

si ha la formula:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \sum_{a} \frac{1}{(\alpha-1)!}\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}}\left(\frac{\varphi(a)}{x-a}\right), \tag{2}$$

essendo la somma estesa a tutti i punti $a, b \dots l$ (*).

La (2) si può trasformare. Si osservi infatti che si ha:

$$\varphi(a) = \lim_{x=a} \varphi(x) = \lim_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha}F(x)}{f(x)}$$

(*) Cf. Serret, *Algebra superiore*, ediz. 1885, tomo I, pag. 497 e Jacobi, *Opere*, vol. III, pag. 11.

e per la regola di L'Hospital:

$$\varphi(a) = \alpha!\,\frac{F(a)}{f^{(\alpha)}(a)},$$

donde immediatamente:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left( \frac{\alpha\, F(a)}{f^{(\alpha)}(a)\,(x-a)} \right), \tag{2'}$$

che dà sotto una forma molto concisa la decomposizione della $\frac{F(x)}{f(x)}$ in elementi semplici (*).

Sviluppando le derivazioni indicate nel secondo membro, vengono in esso a comparire le quantità

$$F(a),\ F'(a) \ldots F^{(\alpha-1)}(a);\ F(b),\ F'(b) \ldots F^{(\beta-1)}(b); \ldots;\ F(l),\ F'(l) \ldots F^{(\lambda-1)}(l);$$

e, quando queste si diano, come evidentemente è possibile, in modo affatto arbitrario, la (2') (moltiplicandone primo e secondo membro per $f(x)$), si riduce ad una formula di Hermite, che dà la forma di un polinomio di grado $n-1$ quando siano assegnati i valori del polinomio e delle sue prime $\alpha-1$ derivate per $x=a$, del polinomio e delle sue prime $\beta-1$ derivate per $x=b, \ldots\ldots$ del polinomio e delle sue prime $\lambda-1$ derivate per $x=l$ (**).

Un altro risultato notevole segue ancora dalla (2'). Poniamo

$$F(x) = P_0 x^{n-1} + P_1 x^{n-2} + \ldots + P_{n-1}; \tag{3}$$

e moltiplicata la (2') per $f(x)$, confrontiamo nei due membri il coefficiente di $x^{n-1}$. Avremo la formula:

$$P_0 = \sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\alpha\, F(a)}{f^{(\alpha)}(a)} \right\}; \tag{4}$$

donde in particolare:

(*) Integrando si ha la formula notevole:

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = \sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\alpha\, F(a)}{f^{(\alpha)}(a)} \log(x-a) \right\} + C.$$

(**) Cf. "Giornale di Crelle", vol. 84°, pag. 70.

*Se* $F(x)$ *è un polinomio di grado minore di* $n-1$, *si ha identicamente:*

$$\text{(I)}\qquad \sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}}\left\{\frac{\alpha\,F(a)}{f^{(\alpha)}(a)}\right\}=0;$$

*per* $F(x)=x^{n-1}$, *si ha invece:*

$$\text{(II)}\qquad \sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}}\left\{\frac{\alpha\,a^{n-1}}{f^{(\alpha)}(a)}\right\}=1.$$

Le formule (I) e (II) sono la generalizzazione di notissime formule d'algebra.

2. — Sia ora l'equazione differenziale di ordine $n$:

$$(5)\qquad y^{(n)}=\varphi(x).$$

*La funzione* $y$ *definita dall'uguaglianza:*

$$\text{(III)}\quad y=\frac{1}{(n-1)!}f(x)\sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}}\left\{\frac{\alpha}{f^{(\alpha)}(a)\,(x-a)}\int_a^x (a-z)^{n-1}\varphi(z)\,dz\right\}$$

*è un integrale della* (5) *che soddisfa alle condizioni iniziali seguenti:*

*Nei punti* $a, b, c \ldots l$ *l'integrale* $y$ *si annulla rispettivamente insieme colle sue prime* $\alpha-1,\ \beta-1, \ldots \lambda-1$ *derivate.*

È facile fare la verifica.

Derivando infatti la (III) $\rho$ volte rispetto ad $x$, con $\rho<n$, è facile vedere che, per la (I), la parte priva di segni integrali è identicamente nulla: e si ha allora, con facili riduzioni:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{d^\rho y}{dx^\rho}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_0^\rho{}_i\,(-1)^i\frac{\rho!}{(\rho-i)!}\,\frac{d^{\rho-i}f(x)}{dx^{\rho-i}}\,.\\ &\sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}}\left\{\frac{\alpha}{f^{(\alpha)}(a)\,(x-a)^{i+1}}\int_a^x (a-z)^{n-1}\varphi(z)\,dz\right\};\end{aligned}\right.$$

quando poi si abbia $\rho=n$, si ha dapprima:

$$y^{(n)}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_0^n{}_i\binom{n}{i}\frac{d^{n-i}f(x)}{dx^{n-i}}\sum_a\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}}\left\{\frac{\alpha}{f^{(\alpha)}(a)}\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x (a-z)^{n-1}\varphi(z)\,dz\right)\right\}.$$

Sviluppando ora il secondo membro, esso si può separare

in due parti, una con integrali, l'altra esplicita. La prima parte è identicamente nulla, in quanto ogni integrale viene moltiplicato per la derivata $n^{ma}$ di un polinomio di grado inferiore ad $n$: la parte esplicita si riduce in forza della (I) a:

$$y^{(n)} = f(x) \cdot \varphi(x) \sum_1^n {}_k (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\alpha}{f^{(\alpha)}(a)(x-a)} \right\}.$$

Ma per la (2′) e per una nota proprietà dei coefficienti binomiali:

$$f(x) \sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\alpha}{f^{(\alpha)}(a)(x-a)} \right\} = 1; \quad \sum_1^n {}_k (-1)^{k-1} \binom{n}{k} = 1;$$

e quindi finalmente:

$$y^{(n)} = \varphi(x).$$

È poi chiaro che la $y$ si annulla ad es. per $x = a$ insieme colle sue prime $\alpha - 1$ derivate: infatti, finchè $\rho < \alpha$, si ha $f^{(\varrho-i)}(a) = 0$ e quindi per la (6) anche $\left(\frac{d^\varrho y}{dx^\rho}\right)_{x=a} = 0$; se invece $\rho = \alpha$, nella (6) si annulla la parte che si riferisce al punto $a$, ma non le altre, in quanto $f^{(\alpha)}(a) \neq 0$.

Aggiungendo alla funzione $y$ data dalla (III) il polinomio di Hermite di grado $n - 1$, che assume valori assegnati insieme colle sue prime $\alpha - 1$ derivate (e risp. $\beta - 1 \dots \lambda - 1$) nel punto $x = a$ (e risp. in $x = b, c \dots l$), *si ha un integrale dell'equazione* (5) *che prende nel punto $a$ valori assegnati* (*arbitrari*) *insieme colle sue prime* $\alpha - 1$ *derivate, nel punto $b$ insieme colle sue prime* $\beta - 1, \dots,$ *nel punto $l$ insieme colle sue prime* $\lambda - 1$ *derivate.*

Queste condizioni iniziali si indicheranno brevemente nel seguito sotto il nome di condizioni (A) *(Cf. la nota in fine).*

## § II. — Il teorema fondamentale.

3. — Sia l'equazione differenziale ordinaria dell'ordine $n$:

$$\text{(IV)} \qquad y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$$

dove il secondo membro è una funzione finita e continua dei

suoi argomenti e rispetto ad $y, y' \ldots y^{(n-1)}$ soddisfa alle condizioni fondamentali di Lipschitz:

$$(7) \quad \left| \varphi(x,y,y',y'' \ldots y^{(n-1)}) - \varphi(x,y_1,y'_1 \ldots y_1^{(n-1)}) \right| < A \sum_0^{n-1}{}_k \left| y^{(k)} - y_1^{(k)} \right|,$$

dove A è una costante positiva e finita.

Vogliamo dimostrare il teorema:

*Finchè i punti $a, b \ldots l$ ed il punto variabile $x$ sono in un intervallo convenientemente piccolo, si può trovare un integrale della* (IV) *che soddisfi alle condizioni iniziali* (A).

Procediamo per questo col metodo delle approssimazioni successive (o integrazioni successive secondo il Peano) (*). Sostituiamo perciò nel secondo membro della (IV) al posto della $y$ e delle sue derivate delle costanti arbitrarie e, chiamando $\varphi_0(x)$ il risultato della sostituzione, integriamo l'equazione iniziale:

$$y_1^{(n)} = \varphi_0(x)$$

colle condizioni iniziali (A). Poniamo quindi:

$$\varphi(x, y_1, y'_1 \ldots y_1^{(n-1)}) = \varphi_1(x),$$

e integriamo sotto le condizioni iniziali (A) l'equazione:

$$y_2^{(n)} = \varphi_1(x);$$

e così continuiamo indefinitamente. In generale sarà:

$$\varphi(x, y_k, y'_k, \ldots y_k^{(n-1)}) = \varphi_k(x),$$

ed $y_{k+1}$ sarà l'integrale, sotto le condizioni iniziali (A), dell'equazione:

$$y_{k+1}^{(n)} = \varphi_k(x). \qquad (k = 1, 2 \ldots)$$

*In un intervallo convenientemente limitato per la $x$ e i punti $a, b \ldots l$, la $y_{k+1}$ tende uniformemente ad un limite, che è un integrale della* (IV) *sotto le condizioni iniziali* (A).

(*) Cf. Peano, *Generalità sulle equazioni differenziali ordinarie*, " Atti dell'Accademia di Torino ", 21 novembre 1897.

Consideriamo infatti le serie:

$$(8)\quad \begin{cases} y_1+(y_2-y_1)+(y_3-y_2)+\ldots+(y_{k+1}-y_k)+\ldots \\ y_1^{(\varrho)}+(y_2^{(\varrho)}-y_1^{(\varrho)})+(y_3^{(\varrho)}-y_2^{(\varrho)})+\ldots+(y_{k+1}^{(\varrho)}-y_k^{(\varrho)})+\ldots \\ \qquad\qquad(\rho=1,2\ldots n-1) \\ \varphi_1+(\varphi_2-\varphi_1)+(\varphi_3-\varphi_2)+\ldots+(\varphi_{k+1}-\varphi_k)+\ldots \end{cases}$$

Indicando con M il massimo valore assoluto della $\varphi_1(x)-$ $-\varphi_0(x)$ nell'intervallo che si considera, si avrà evidentemente, per la (III) e per la (6):

$$\left|y_2-y_1\right|<\frac{M}{n!}\left|f(x)\right|\sum_a\left|\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}}\left(\frac{\alpha(x-a)^{n-1}}{f^{(\alpha)}(a)}\right)\right|;$$

$$\left|y_2^{(\varrho)}-y_1^{(\varrho)}\right|<\frac{M}{n!}\sum_0^{\varrho}{}_i\left|\frac{\rho!}{(\rho-i)!}\frac{d^{\varrho-i}f(x)}{dx^{\varrho-i}}\right|.\sum_a\left|\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}}\left\{\frac{\alpha(x-a)^{n-i-1}}{f^{(\alpha)}(a)}\right\}\right|,$$

$$\rho=1,2\ldots n-1$$

dove il simbolo $\sum_a\left|\ldots\ldots\right|$ indica che eseguita la derivazione $\alpha-1$ volte ripetuta rispetto ad $a$ (e analog. per $b\ldots l$) si debba prendere la somma dei moduli dei termini ottenuti. Se quindi chiamiamo con $P_\varrho$ (per $\rho=0,1,2\ldots n-1$) il massimo valore assoluto di

$$\frac{1}{n!}\sum_0^{\varrho}\left|\frac{\rho!}{(\rho-i)!}\frac{d^{\varrho-i}f(x)}{dx^{\varrho-i}}\right|\sum_a\left|\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}}\left\{\frac{\alpha(x-a)^{n-i-1}}{f^{(\alpha)}(a)}\right\}\right|,$$

con P la somma $P_0+P_1+P_2+\ldots+P_{n-1}$, avremo evidentemente, tenendo conto della (7):

$$|y_2-y_1|<P_0M,\quad |y_2^{(\varrho)}-y_1^{(\varrho)}|<P_\varrho M,\quad |\varphi_2-\varphi_1|<APM.$$

Seguitando avremo:

$$|y_3-y_2|<P_0.APM;\ |y_3^{(\varrho)}-y_2^{(\varrho)}|<P_\varrho.APM;\ |\varphi_3-\varphi_2|<A^2P^2M;$$

$$|y_4-y_3|<P_0.A^2P^2M;\ |y_4^{(\varrho)}-y_3^{(\varrho)}|<P_\varrho.A^2P^2M;\ |\varphi_4-\varphi_3|<A^3P^3M;$$

e in generale, per qualunque $k$:

$$(9)\quad |y_{k+1}-y_k|<P_0\,.\,A^{k-1}P^{k-1}M\,;\quad |y^{(\varrho)}{}_{k+1}-y^{(\varrho)}{}_k|<P_\varrho\,.\,A^{k-1}P^{k-1}M\,;$$
$$|\varphi_{k+1}-\varphi_k|<A^kP^kM.$$

*Se quindi è* $AP<1$, tutte le serie (8) convergeranno uniformemente nell'intervallo che si considera, donde col noto ragionamento (*) deduciamo che la $y_{k+1}$ tende uniformemente ad un limite $y$, che è l'integrale cercato.

4. — Tutto dunque si riduce a soddisfare la disuguaglianza:

$$(V)\qquad P<\frac{1}{A}\,.$$

La (V) non è facile a discutere in modo generale: si può tuttavia far vedere che essa sarà certamente soddisfatta, quando i punti $a, b \ldots l, x$ rimangono un intervallo convenientemente piccolo.

Una via è la seguente: Indichiamo con L l'intervallo che contiene i punti $a, b\,..\,l$ ed il punto variabile $x$, con $l$ la *minima* distanza tra due dei punti $a, b \ldots l$. Sviluppando l'espressione di $P_\varrho$, è facile vedere che, essendo $\mu_{t\varrho}$ dei numeri positivi, dipendenti solo da $\rho$ e dagli esponenti $\alpha, \beta \ldots \lambda$, sarà certamente:

$$P_\varrho<\Sigma_t\,\mu_{t\varrho}\,\frac{L^{2n-t-\varrho}}{l^{n-t}}\,,$$

dove $t$ prende i valori da 1 fino al massimo dei numeri $\alpha, \beta \ldots \lambda$ (ad es.: $\alpha$) e $\rho$ va da 0 fino ad $n-1$.

Ne segue allora:

$$P<\sum_1^{\alpha}{}_t\,\sum_0^{n-1}{}_\varrho\,\mu_{t\varrho}\,\frac{L^{2n-t-\varrho}}{l^{n-t}}$$

e quindi, per soddisfare la (V), basterà che si abbia:

$$(10)\qquad \sum_1^{\alpha}{}_t\,\sum_0^{n-1}{}_\varrho\,\mu_{t\varrho}\,\frac{L^{2n-t-\varrho}}{l^{n-t}}<\frac{1}{A}\,.$$

---

(*) Cf. ad es. PICARD, *Traité d'Analyse,* tomo II, pag. 304, od anche tomo III, pag. 98.

Se inoltre i punti $a, b \dots l$ sono in numero di $s+1$, sarà anche evidentemente

$$sl \leq \mathrm{L}. \tag{11}$$

Conviene dunque discutere insieme le due disuguaglianze (10) ed (11).

Noi procederemo come segue. Osserviamo innanzi tutto come, assegnato ad $l$ un valore arbitrario, si possa certo soddisfare alla (10); basta per questo prendere L minore dell'unica radice positiva $c$ dell'equazione in $x$

$$\sum_{1}^{\alpha}{}_{t} \sum_{0}^{n-1}{}_{\varrho} \mu_{\varrho t} \frac{x^{2n-t-\varrho}}{l^{n-t}} = \frac{1}{\mathrm{A}}. \tag{12}$$

Se poi dovrà essere soddisfatta anche la (11), dovrà essere *a fortiori*

$$\sum_{1}^{\alpha}{}_{t} \sum_{0}^{n-1}{}_{\varrho} \mu_{\varrho t} s^{2n-t-\varrho} l^{n-\varrho} < \frac{1}{\mathrm{A}}. \tag{13}$$

Inversamente, sia $l$ un numero che soddisfa la (13) (ed è possibile soddisfarvi con numeri positivi, in quanto il primo membro è nullo per $l=0$ e cresce insieme con $l$): sarà allora evidentemente $sl$ minore della radice positiva $c$ della (12), nella quale per $l$ sia sostituito il valore trovato: basta allora prendere per L un numero qualunque compreso tra $sl$ e $c$, e prossimo a $c$ tanto quanto si vuole.

Assegnato adunque $l$ in guisa da soddisfare alla (13), ma del resto affatto arbitrariamente, si può quindi determinare L in guisa da soddisfare alla (V).

Il teorema fondamentale enunciato è così completamente dimostrato.

5. — Alcune osservazioni sui risultati che precedono.

Si rammenti bene innanzi tutto, per non esser tratti a deduzioni che potrebbero sembrare paradossali o per lo meno poco naturali, che le condizioni suesposte sono soltanto *sufficienti, ma niente affatto necessarie* per la convergenza delle serie integrali,

che possono convergere ed in generale convergeranno in un intervallo più ampio di quello trovato.

È facile inoltre dimostrare le proprietà seguenti dell'integrale $y$:

*a) L'integrale $y$ e le sue derivate fino all'$n^{ma}$ sono funzioni finite e continue dei valori iniziali* (*).

*b) Nell'intervallo di convergenza l'integrale è unico* (**).

*c) Se il secondo membro della* (IV) *ha le derivate prime rispetto ai suoi argomenti finite e continue, l'integrale $y$ e le sue prime $n$ derivate ammettono derivate rispetto ai valori iniziali, pure finite e continue* (***).

6. — Il teorema fondamentale sopra dimostrato si estende senza alcuna difficoltà ai sistemi di equazioni simultanee della forma:

$$y_i^{(n_i)} = \varphi_i(x, y_1, y_2 \dots y_p; y'_1, y'_2 \dots y'_p; \dots), \qquad (i = 1, 2 \dots p) \tag{14}$$

risolute cioè rispetto alle derivate delle funzioni incognite di ordine superiore.

Assegnato per ogni funzione $y_i$ un gruppo di punti $x_{i1}, x_{i2}, \dots x_{is_i}$, e risp. di numeri intieri positivi $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots \alpha_{is_i}$, tali che $\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \dots + \alpha_{is_i} = n_i$; si può determinare, almeno finchè i punti $x_{ik}$ ed il punto $x$ rimangono in un intervallo convenientemente piccolo, un sistema di funzioni $y_i$ $(i = 1, \dots p)$, integrale delle equazioni (14), tale che la $y_i$ assuma nel punto $x_{ik}$ (per $i = 1, 2 \dots p$, $k = 1, 2 \dots s_i \dots\dots$) valori assegnati arbitrarî insieme colle sue prime $\alpha_{ik} - 1$ derivate.

La dimostrazione di questo teorema è affatto simile a quella data nel caso di una sola equazione: alla disuguaglianza fondamentale (V) se ne sostituisce una perfettamente simile, e alla quale si può soddisfare nello stesso modo, chiamando ancora

(*) Cf. ad es. Niccoletti, *Sugli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, considerati come funzioni dei loro valori iniziali*, “Rend. Lincei„, 15 dicembre 1895.

(**) Cf. Picard, *Traité d'analyse*, tomo III, pag. 99 e 100.

(***) Cf. Peano, nota citata, pag. 11 e 12.

con L l'intervallo totale, con $l$ la minima distanza *tra due punti* $x_{ik}$ *del medesimo gruppo* (aventi cioè lo stesso primo indice).

Il sistema integrale soddisfa inoltre alle condizioni di continuità, unicità e derivabilità, di cui sopra abbiamo discorso.

7. — Tornando per semplicità al caso di una sola equazione, il teorema fondamentale dimostrato dà luogo, quando si scelgano in modo particolare i punti $a, b \dots l$ e gli esponenti relativi $\alpha, \beta \dots \lambda$, a tanti casi particolari, alcuni dei quali notevoli.

Se si suppone che tutti i punti $a, b \dots l$ coincidano in uno (che avrà allora naturalmente come esponente il numero $n$) si ricade nel teorema classico di esistenza, dovuto a Cauchy. In questo caso la disuguaglianza fondamentale (V) prende una forma molto più semplice e più facile per la discussione.

Se si suppone invece che i punti $a, b \dots l$ siano in numero di $n$ (e quindi ciascuno coll'esponente 1), si ha un integrale dell'equazione data che assume in $n$ punti valori assegnati (*).

Teoremi affatto analoghi valgono evidentemente per gli integrali del sistema (14).

Sostituendo poi all'equazione data (o al sistema (14)) un sistema equivalente, introducendo come nuove funzioni incognite delle derivate delle funzioni primitive, oppure anche prendendo come nuove funzioni incognite delle funzioni note delle funzioni incognite date e delle loro derivate, dal teorema fondamentale si deducono tanti teoremi particolari, che in casi speciali possono riuscire molto utili: ma a queste ed altre ovvie deduzioni del teorema fondamentale basti avere appena accennato.

## § III. — Estensione del teorema fondamentale ad una classe di equazioni a derivate parziali.

8. — Può forse interessare l'estensione dei risultati precedenti a quella classe di equazioni a derivate parziali, delle quali diedi alcune proprietà in una memoria pubblicata negli " Atti dell'Accademia di Napoli „ del 1896 (**).

---

(*) Cfr. PICARD, *Traité d'Analyse*, tomo III, pag. 94-100.

(**) Cf. NICCOLETTI, *Sull'estensione dei metodi di Picard e di Riemann ad una classe di equazioni a derivate parziali*, " Atti dell'Accademia delle Scienze di Napoli „, vol. VIII, serie II, n° 2, 1896.

Limitiamoci per semplicità al caso di due variabili indipendenti e di una sola equazione:

$$\text{(VI)} \qquad \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \, \partial y^n} = \varphi\left(z, p, q, \dots \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}, \dots\right)$$

$$(\text{con } i = 0, 1 \dots m, k = 0, 1, \dots n, \; i + k \leq m + n - 1),$$

di cui il secondo membro soddisfi alle solite condizioni di Lipschitz.

Indichiamo con $x_0, x_1 \dots x_s (s \leq m)$; $y_0, y_1 \dots y_t (t \leq n)$ dei numeri reali arbitrarî, con $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_s$; $\beta_0, \beta_1 \dots \beta_t$ dei numeri interi e positivi tali che $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_s = m$, $\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_t = n$; e poniamo:

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} f(x) &= (x - x_0)^{\alpha_0} (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_s)^{\alpha_s}; \\ g(y) &= (y - y_0)^{\beta_0} (y - y_1)^{\beta_1} \dots (y - y_t)^{\beta_t}. \end{aligned}$$

Consideriamo poi l'equazione:

$$\text{(16)} \qquad \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \, \partial y^n} = 0,$$

il cui integrale generale è:

$$z = \sum_0^{m-1} x^i \mathrm{Y}_i + \sum_0^{n-1}{}_k \, y^k \mathrm{X}_k,$$

dove le X sono funzioni arbitrarie della sola $x$, le Y della sola $y$. Mediante risoluzione di equazioni lineari è possibile determinare le X e le Y in guisa da avere un integrale $z_1$ della (16), che soddisfi alle condizioni iniziali seguenti (che diremo *condizioni* (B)):

*Lungo la caratteristica* $x = x_i$ (*o* $y = y_k$) *l'integrale* $z_1$ *prende valori assegnati arbitrarî insieme colle sue prime* $\alpha_i - 1$ (*o* $\beta_k - 1$) *derivate rispetto ad* $x$ (*o ad* $y$), $(i = 0, 1 \dots s, k = 0, 1 \dots t)$.

Considerando poi la funzione:

$$\text{(17)} \qquad z_2 = \frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!} f(x) g(y) \sum_{x_0} \sum_{y_0} \frac{\partial^{\alpha_0 + \beta_0 - 2}}{\partial x_0^{\alpha_0 - 1} \partial y_0^{\beta_0 - 1}} \mathrm{A}(x_0 y_0),$$

dove:

$$\text{(17')} \qquad \mathrm{A}(x_0 y_0) =$$

$$= \left\{ \frac{\alpha_0 \beta_0}{f^{(\alpha_0)}(x_0) g^{(\beta_0)}(y_0) (x - x_0)(y - y_0)} \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} (x_0 - x)^{m-1} (y_0 - y)^{n-1} \varphi(xy) \, dx \, dy \right\},$$

essa è un integrale dell'equazione:

$$\text{(18)} \qquad \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \, \partial y^n} = \varphi(xy),$$

il quale lungo la caratteristica $x = x_i (y = y_k)$ si annulla insieme colle sue prime $\alpha_i - 1$ $(\beta_k - 1)$ derivate prese rispetto ad $x$ (o ad $y$).

Ne segue che la funzione

$$z = z_1 + z_2 \tag{19}$$

è un integrale della (18) che soddisfa alle condizioni iniziali (B).

Posto ciò, il solito metodo delle approssimazioni successive dimostra il teorema:

*Almeno finchè le caratteristiche $x = x_i$, $y = y_k$ ed il punto variabile $(xy)$ rimangono in un'area rettangolare convenientemente piccola, è possibile determinare un integrale della* (VI), *che soddisfi alle condizioni iniziali* (B).

Il metodo di dimostrazione è identico a quello tenuto per la equazione (IV); alle quantità $P_k$ vanno sostituite delle altre $P_k$, $Q_r$ relative risp. alla sola variabile $x$ (od $y$); la P prende la forma:

$$P = \sum_0^m{}_k \sum_0^n{}_r P_k Q_r ; \qquad (r + k \leq m + n - 1)$$

e la disuguaglianza $P < \frac{1}{A}$ si può discutere in guisa affatto analoga a quella del n° 4: si vedrà anzi in questo caso una latitudine molto maggiore ed una certa arbitrarietà nel fissare l'area rettangolare di convergenza.

## NOTA al § 1.

La formula (III) è un caso particolare della seguente, che enuncio soltanto. Sia.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x) \tag{$\alpha$}$$

un'equazione lineare completa a coefficienti costanti: e l'equazione caratteristica della equazione omogenea abbia le radici distinte $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_p$ degli ordini $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_p$ (con $\mu_1 + \dots + p_p = n$); e sia:

$$\varphi(\sigma) = (\sigma - \sigma_1)^{\mu_1} (\sigma - \sigma_2)^{\mu_2} \dots (\sigma - \sigma_p)^{\mu_p}. \tag{$\beta$}$$

Poniamo inoltre:

$$A = y(a) + \int_a^x h(z,a) g(z) dz ; \dots ; \; L = y(l) + \int_l^x h(z,l) g(z) dz. \tag{$\gamma$}$$

dove:

$$h(z,t) = \sum_1^p{}_i \frac{\partial^{\mu_i - 1}}{\partial \sigma_i^{\mu_i - 1}} \left\{ \frac{\mu_i e^{-\sigma_i(z-t)}}{\varphi^{(\mu_i)}(\sigma_i)} \right\}, \tag{$\delta$}$$

coll'avvertenza che ove una delle $\sigma$, ad es.: $\sigma_1$ sia zero, si eseguiscano le derivazioni ad essa relative supponendola diversa da zero e quindi si faccia uguale a zero nel risultato.

Poniamo infine per brevità

$$\Delta_a^h f = \frac{\partial^h f}{\partial a^h}, \quad \Delta_b^k f = \frac{\partial^k f}{\partial b^k} \; .....$$

*Con queste convenzioni, l'equazione:*

$$(\epsilon) \quad \begin{vmatrix} y & e^{\sigma_1 x} & x e^{\sigma_1 x} \; ..... \; x^{\mu_1 - 1} e^{\sigma_1 x} \; .... \; e^{\sigma_p x} & x e^{\sigma_p x} \; ..... \; x^{\mu_p - 1} e^{\sigma_p x} \\ A & e^{\sigma_1 a} & a e^{\sigma_1 a} \; ..... \; a^{\mu_1 - 1} e^{\sigma_1 a} \; ... \; e^{\sigma_p a} & a e^{\sigma_p a} \; ..... \; a^{\mu_p - 1} e^{\sigma_p a} \\ \Delta_a A & \Delta_a e^{\sigma_1 a} & \Delta_a a e^{\sigma_1 a} \; ... \; \Delta_a a^{\mu_1 - 1} e^{\sigma_1 a} ... \Delta_a e^{\sigma_p a} & \Delta_a a e^{\sigma_p a} \; .... \; \Delta_a a^{\mu_p - 1} e^{\sigma_p a} \\ \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \Delta_a^{\alpha-1} A & \Delta_a^{\alpha-1} e^{\sigma_1 a} & \Delta_a^{\alpha-1} a e^{\sigma_1 a} ... \Delta_a^{\alpha-1} a^{\mu_1 - 1} e^{\sigma_1 a} ... \Delta_a^{\alpha-1} e^{\sigma_p a} & \Delta_a^{\alpha-1} a e^{\sigma_p a} ... \Delta_a^{\alpha-1} a^{\mu_p - 1} e^{\sigma_p a} \\ \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ L & e^{\sigma_1 l} & l e^{\sigma_1 l} \; ..... \; l^{\mu_1 - 1} e^{\sigma_1 l} \; ... \; e^{\sigma_p l} & l e^{\sigma_p l} \; ..... \; l^{\mu_p - 1} e^{\sigma_p l} \\ \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \Delta_l^{\lambda-1} L & \Delta_l^{\lambda-1} e^{\sigma_1 l} & \Delta_l^{\lambda-1} l e^{\sigma_1 l} ... \Delta_l^{\lambda-1} l^{\mu_1 - 1} e^{\sigma_1 l} ... \Delta_l^{\lambda-1} e^{\sigma_p l} & \Delta_l^{\lambda-1} l e^{\sigma_p l} ... \Delta_l^{\lambda-1} l^{\mu_p - 1} e^{\sigma_p l} \end{vmatrix} = 0$$

*dove per* $y(a)$, $y'(a) \dots y^{(\alpha-1)}(a)$; $y(b)$, $y'(b) \dots y^{(\beta-1)}(b)$; ..... $y(l)$, $y'(l) \dots y^{(\lambda-1)}(l)$ *si pongano dei valori arbitrarii definisce un integrale* $y$ *della* ($\alpha$), *che soddisfa alle condizioni iniziali* (A).

La dimostrazione, non difficile, della formula ($\epsilon$) si fonda sulla derivazione dei determinanti e sulle uguaglianze (I) e (II) del § 1.

Facendo nella ($\epsilon$) $p = 1$, $\sigma_1 = 0$, $\mu_1 = n$, si ricade nella (III).

Quando i coefficienti $a_0, a_1 \dots a_n$ siano reali ed alcune delle $\sigma$ complesse (a coppia coniugate) è facile dare una forma priva di immaginarii all'equazione ($\epsilon$).

---

## *Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque;*

Nota II del Prof. LUIGI BERZOLARI.

Le proposizioni, che nella Nota precedente (*) furono dimostrate ricorrendo ad una scelta speciale degli assi coordinati, si possono altresì stabilire facendo uso d'un sistema di coordinate di Weierstrass affatto arbitrario: questo nuovo metodo, che certamente è meno semplice di quell'altro, ha però su esso il vantaggio di condurre nel medesimo tempo ad ulteriori notevoli conseguenze.

Come in quella Nota, le nostre ricerche riguarderanno una varietà $V_m$ ad $m$ dimensioni, immersa in uno spazio $S_n$ di $n$ dimensioni e di curvatura Riemanniana costante $\frac{1}{k^2}$, essendo $k$ reale (anche infinito), o puramente imaginario. Data sopra $V_m$ una qualsiasi varietà $W_h$ di $h$ dimensioni, e fissato su essa ad arbitrio un punto P, chiameremo ancora $W_h^{(t)}$ la varietà di $h$ dimensioni, che si ottiene proiettando $W_h$ sullo spazio lineare $S_m$ ad $m$ dimensioni tangente in P a $V_m$, e $W_h^{(n)}$ la varietà ad

(*) *Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque*, Nota I (" Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XXXIII, p. 692).

$h$ dimensioni che risulta tagliando $V_m$ collo spazio $S_{n-m+h}$ determinato dallo spazio $S_{n-m}$ normale in P a $V_n$ e dallo spazio $S_h$ tangente nello stesso punto a $W_h$.

1. — Le coordinate $x_0, x_1, \dots, x_n$ dei punti di $V_m$ siano espresse, almeno in prossimità del punto P, come funzioni di $m$ variabili indipendenti $u_1, u_2, \dots, u_m$, mediante le formole

$$x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \dots, u_m) \qquad (i = 0, 1, \dots, n), \tag{1}$$

così che nel punto P avranno luogo le identità

$$k^2\varphi_0^2 + \varphi_1^2 + \dots + \varphi_n^2 = k^2, \tag{2}$$

$$k^2\varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_i} + \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_i} + \dots + \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_i} = 0, \tag{3}$$

ed il quadrato dell'elemento lineare sarà

$$ds^2 = \sum_{ij} a_{ij}\, du_i\, du_j\,, \tag{4}$$

dove

$$a_{ij} = k^2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_i}\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_j} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_i}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_j} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_i}\frac{\partial \varphi_n}{\partial u_j}. \tag{5}$$

Qui e in tutto il seguito, a meno che non si dica esplicitamente il contrario, converremo che gl'indici scritti con lettere latine o greche debbano variare risp. nella serie $1, 2, \dots, m$, o nella serie $1, 2, \dots, h$; invece gl'indici da cui sono accompagnate le $\varphi$ (e, in genere, le coordinate) varieranno nella serie $0, 1, \dots, n$. Il determinante delle $a_{ij}$ — cioè il discriminante della forma differenziale quadratica (4) — verrà supposto diverso da zero, almeno nell'intorno del punto P, ed il complemento algebrico di $a_{ij}$, diviso pel determinante stesso, s'indicherà con $A_{ij}$, onde sarà

$$\sum_r A_{ir}\, a_{jr} = \delta_{ij}\,, \tag{6}$$

convenendo che $\delta_{ij}$ significhi lo zero o l'unità, secondo che $i, j$

sono fra loro diversi od uguali. Così pure, considerando il determinante $\sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{hh}$, denoteremo con $B_{\varrho\sigma}$ il complemento algebrico del suo elemento $a_{\varrho\sigma}$, diviso pel determinante stesso, di guisa che si avrà

$$(7) \qquad \sum_\lambda B_{\varrho\lambda} a_{\sigma\lambda} = \delta_{\varrho\sigma} .$$

Faremo uso dei *simboli di* Christoffel *di prima specie*

$$(8) \qquad \begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ri}}{\partial u_s} + \frac{\partial a_{si}}{\partial u_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial u_i}\right),$$

e di quelli *di seconda specie*

$$(9) \qquad \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} = \sum_j A_{ij} \begin{bmatrix} rs \\ j \end{bmatrix},$$

sicchè questi ultimi s'intenderanno sempre costruiti rispetto alla forma (4). I simboli di 1ª specie si possono esprimere alla loro volta per mezzo di quelli di 2ª specie, poichè dalla (9) si ricava

$$(10) \qquad \begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix} = \sum_j a_{ij} \begin{Bmatrix} rs \\ j \end{Bmatrix}.$$

Inoltre dalle (5) e (8) si deduce la seguente identità, di cui spesso dovremo far uso:

$$(11) \qquad \begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix} = \sum_j \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial u_r \partial u_s} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_i},$$

e da questa, mediante derivazione, quest'altra che pure ci sarà utile:

$$(12) \qquad \frac{\partial \begin{bmatrix} ri \\ s \end{bmatrix}}{\partial u_j} - \frac{\partial \begin{bmatrix} rj \\ s \end{bmatrix}}{\partial u_i} = \sum_v \left( \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial u_r \partial u_i} \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial u_s \partial u_j} - \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial u_r \partial u_j} \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial u_s \partial u_i} \right),$$

nelle quali formole, come in altre che scriveremo in appresso, i termini corrispondenti al valor zero dell'indice $v$ (apposto alle $\varphi$ e, in genere, alle coordinate) s'intenderanno moltiplicati per $k^2$.

Infine avremo da considerare *i simboli di* Riemann a quattro indici, definiti come segue:

$$(13)\qquad (rs, ij) = \frac{\partial \left[ {ri \atop s} \right]}{\partial u_j} - \frac{\partial \left[ {rj \atop s} \right]}{\partial u_i} + \sum_{ef} A_{ef} \left( \left[ {rj \atop f} \right] \left[ {is \atop e} \right] - \left[ {ri \atop f} \right] \left[ {js \atop e} \right] \right).$$

2\. — Volendo studiare le proprietà della varietà $W_h$ ad $h$ dimensioni segnata sopra $V_m$, possiamo supporre, per semplicità, che essa sia quella che vien definita uguagliando le $u_{h+1}, u_{h+2}, \ldots, u_m$ ad $m-h$ costanti arbitrarie, laonde le coordinate $x_0$, $x_1, \ldots, x_n$ dei punti di $W_h$ saranno fornite dalle stesse (1) in cui si pensino variabili soltanto le $u_1, u_2, \ldots u_h$. Pel nostro scopo ci occorre di trovare come si esprimono nel punto P, per le varietà $W_h^{(t)}$ e $W_h^{(n)}$, le prime e seconde derivate delle coordinate rapporto alle $u_1, u_2, \ldots u_h$, ed inoltre i simboli di Christoffel di 1ª specie ed i simboli di Riemann.

Cominciando dalla $W_h^{(t)}$, osserviamo che un punto X di coordinate $X_0, X_1, \ldots, X_n$ giace nello spazio $S_m$ tangente in P a $V_m$, se

$$(14)\qquad X_i = \varphi_i p_0 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1} p_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_m} p_m,$$

dove le $\varphi_i$ e le derivate s'intendono formate nel punto P, e le $p$ sono quantità variabili vincolate dalla sola relazione

$$(15)\qquad k^2 p_0^2 + \sum_{ij} a_{ij} p_i p_j - k^2 = 0.$$

Chiamando $y_0, y_1, \ldots, y_n$ le coordinate d'un punto $y$ di $W_h$ e $d$ la sua distanza da X, per una nota formola (*) si ha

$$(16)\qquad k^2 \cos \frac{d}{k} = k^2 X_0 y_0 + X_1 y_1 + \ldots + X_n y_n.$$

Se si vuole che X sia la proiezione del punto $y$ sopra $S_m$, bisogna render minimo il secondo membro di quest'equazione,

(*) Killing, *Die nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* (Leipzig, 1885), n. 37.

considerato come funzione delle $p$ in forza delle formole (14). Indicando con $\lambda$ un parametro, si hanno così le equazioni di condizione

$$(17)\quad \begin{cases} k^2\varphi_0 y_0 + \varphi_1 y_1 + \dots + \varphi_n y_n + 2\lambda k^2 p_0 = 0, \\ k^2 \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial u_1} y_0 + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} y_1 + \dots + \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial u_1} y_n + 2\lambda \sum_i a_{1i} p_i = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k^2 \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial u_m} y_0 + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_m} y_1 + \dots + \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial u_m} y_n + 2\lambda \sum_i a_{mi} p_i = 0. \end{cases}$$

Sommandole dopo averle moltiplicate risp. per $p_0, p_1, \dots, p_m$, e tenendo conto delle (14), (15) e (16), risulta

$$2\lambda = -\cos\frac{d}{k},$$

epperò, nel punto P,

$$2\lambda + 1 = 0.$$

Le equazioni precedenti dànno allora, nel punto P,

$$(18)\qquad p_0 = 1, \qquad \sum_i a_{ri} p_i = 0.$$

Derivando le (14) rapporto ad $u_\varrho$, abbiamo

$$(19)\qquad \frac{\partial X_i}{\partial u_\varrho} = \varphi_i \frac{\partial p_0}{\partial u_\varrho} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_1}\frac{\partial p_1}{\partial u_\varrho} + \dots + \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_m}\frac{\partial p_m}{\partial u_\varrho}.$$

Ma, derivando pure rapporto ad $u_\varrho$ una qualunque delle ultime $m$ fra le (17), si ha

$$(20)\qquad \sum_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_r}\frac{\partial y_i}{\partial u_\varrho} + 2\lambda \sum_i a_{ri}\frac{\partial p_i}{\partial u_\varrho} + 2\frac{\partial\lambda}{\partial u_\varrho}\sum_i a_{ri} p_i = 0,$$

la quale nel punto P diviene

$$\sum_i a_{ri}\frac{\partial p_i}{\partial u_\varrho} = a_{r\varrho}.$$

Risolvendo queste equazioni, si ottengono i valori delle derivate prime di $p_1, p_2, \dots, p_m$ nel punto P:

$$\frac{\partial p_i}{\partial u_\varrho} = \delta_{i\varrho}. \tag{21}$$

Quanto alla derivata di $p_0$, dalla (15) si ha

$$k^2 p_0 \frac{\partial p_0}{\partial u_\varrho} + \sum_{ij} a_{ij}\, p_i \frac{\partial p_j}{\partial u_\varrho} = 0, \tag{22}$$

laonde nel punto P, per le (18) e (21),

$$\frac{\partial p_0}{\partial u_\varrho} = 0. \tag{21'}$$

Dalle (19) si ricava dunque, nel punto P,

$$\frac{\partial X_i}{\partial u_\varrho} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\varrho}, \tag{23}$$

formole che si potevano anche prevedere geometricamente. Esse mostrano che i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare della varietà $W_h^{(l)}$ assumono in P risp. gli stessi valori delle quantità $a_{\varrho\sigma}$.

Circa le derivate seconde, abbiamo dalla (19):

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} = \varphi_i \frac{\partial^2 p_0}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1} \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_m} \frac{\partial^2 p_m}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma}. \tag{24}$$

Ma, derivando rapporto ad $u_\varrho$ la prima delle (17) e facendo uso delle formole precedenti, si ha, nel punto P,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_\varrho} = 0.$$

Perciò, derivando la (20) rapporto ad $u_\sigma$ e applicando l'identità (11), si deduce

$$\sum_i a_{ri} \frac{\partial^2 p_i}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} = \begin{bmatrix} \rho\sigma \\ r \end{bmatrix},$$

da cui, risolvendo,

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial u_\rho \partial u_\sigma} = \left\{ {\rho\sigma \atop i} \right\}. \tag{25}$$

Infine, derivando la (22) rapporto ad $u_\sigma$ e tenendo conto delle formole sopra trovate, abbiamo, nel punto P,

$$\frac{\partial^2 p_0}{\partial u_\rho \partial u_\sigma} = -\frac{1}{k^2} a_{\rho\sigma}. \tag{26}$$

Pertanto dalla (24) risulta, nel punto P,

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial u_\rho \partial u_\sigma} = -\frac{1}{k^2} \varphi_i a_{\rho\sigma} + \sum_r \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_r} \left\{ {\rho\sigma \atop r} \right\}. \tag{27}$$

Passando ora a considerare i simboli di CHRISTOFFEL di 1ª specie, indichiamo con $b_{\rho\sigma}$ i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare di $W_h^{(l)}$; sarà

$$b_{\rho\sigma} = \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial u_\rho} \frac{\partial X_i}{\partial u_\sigma}. \tag{28}$$

Sostituendo alle derivate delle $X_i$ le espressioni date dalle (19), poscia derivando rapporto ad $u_\lambda$, e tenendo conto delle (3), (21), (21)′ e (24), abbiamo, nel punto P,

$$\frac{\partial b_{\rho\sigma}}{\partial u_\lambda} = \sum_i \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\rho} \frac{\partial^2 X_i}{\partial u_\lambda \partial u_\sigma} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\sigma} \frac{\partial^2 X_i}{\partial u_\lambda \partial u_\rho} \right).$$

Di qui, facendo uso successivamente delle (27) e delle (3) e (10), ed osservando che

$$\begin{bmatrix} \lambda\rho \\ \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda\sigma \\ \rho \end{bmatrix} = \frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial u_\lambda},$$

si deduce che nel punto P si ha

$$\frac{\partial b_{\rho\sigma}}{\partial u_\lambda} = \frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial u_\lambda},$$

così che, contrassegnando coll'indice $t$ ciò che si riferisce alla varietà $W_h^{(t)}$, nel punto P sarà pure

$$\begin{bmatrix}\rho\sigma\\ \lambda\end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix}\rho\sigma\\ \lambda\end{bmatrix}. \tag{29}$$

Venendo infine ai simboli di Riemann, si sostituiscano nelle (28) le espressioni (14), indi si faccia la seconda derivata dei due membri rapporto ad $u_\lambda$ ed $u_\mu$; in virtù delle (2), (3), (21), (21)', (25) e (26) si trova facilmente, nel punto P,

$$\frac{\partial^2 b_{\varrho\sigma}}{\partial u_\lambda \partial u_\mu} = \frac{1}{k^2}(a_{\lambda\varrho}a_{\mu\sigma} + a_{\lambda\sigma}a_{\mu\varrho}) + \sum_{ij} a_{ij}\left(\begin{Bmatrix}\lambda\rho\\ i\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ j\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\lambda\sigma\\ i\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\mu\rho\\ j\end{Bmatrix}\right)$$

$$+ \sum_i \left(\frac{\partial^3 p_i}{\partial u_\lambda \partial u_\mu \partial u_\varrho} a_{i\sigma} + \frac{\partial^3 p_i}{\partial u_\lambda \partial u_\mu \partial u_\sigma} a_{i\varrho}\right).$$

Ma, per la (8),

$$\frac{\partial\begin{bmatrix}\varrho\sigma\\ \lambda\end{bmatrix}_t}{\partial u_\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 b_{\lambda\varrho}}{\partial u_\mu \partial u_\sigma} + \frac{\partial^2 b_{\lambda\sigma}}{\partial u_\mu \partial u_\varrho} - \frac{\partial^2 b_{\varrho\sigma}}{\partial u_\lambda \partial u_\mu}\right),$$

quindi, sostituendo, nel punto P si ha

$$\frac{\partial\begin{bmatrix}\varrho\sigma\\ \lambda\end{bmatrix}_t}{\partial u_\mu} = \frac{1}{k^2} a_{\lambda\mu}a_{\varrho\sigma} + \sum_{ij} a_{ij}\begin{Bmatrix}\lambda\mu\\ i\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\rho\sigma\\ j\end{Bmatrix} + \sum_i \frac{\partial^3 p_i}{\partial u_\mu \partial u_\varrho \partial u_\sigma} a_{i\lambda}.$$

Pertanto, costruendo nel caso presente i primi due termini dei simboli di Riemann secondo la (13), le terze derivate delle $p$ si elidono a vicenda, ed applicando successivamente la (9) e la (6), e poi la (29), si ricava infine la formola cercata, valida nel punto P:

$$(\rho\rho', \sigma\sigma')_t = \frac{1}{k^2}(a_{\varrho\sigma}a_{\varrho'\sigma'} - a_{\varrho\sigma'}a_{\varrho'\sigma}) \tag{30}$$

$$+ \sum_{rs} A_{rs}\left(\begin{bmatrix}\rho\sigma\\ r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho'\sigma'\\ s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\rho\sigma'\\ r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho'\sigma\\ s\end{bmatrix}\right) - \sum_{\lambda\mu} B_{\lambda\mu}\left(\begin{bmatrix}\rho\sigma\\ \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho'\sigma'\\ \mu\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\rho\sigma'\\ \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho'\sigma\\ \mu\end{bmatrix}\right).$$

3. — Considerando ora la varietà $W_h^{(n)}$, siano

$$k^2\xi_{r0}x_0 + \xi_{r1}x_1 + \dots + \xi_{rn}x_n = 0 \qquad (r = 1,2,\dots, m-h) \tag{31}$$

le equazioni dello spazio lineare $S_{n-m+h}$ di cui si è parlato al principio del lavoro. Passando per lo spazio $S_h$ tangente in P a $W_h$, esso conterrà le tangenti condotte in P alle $h$ curve che si ottengono uguagliando a costanti arbitrarie non soltanto le $u_{h+1}, \dots, u_m$, ma anche tutte le $u_1, \dots, u_h$ all'infuori di una; sicchè nel punto P le $\xi$ soddisfaranno alle equazioni

$$(32) \qquad k^2 \xi_{r0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_\rho} + \xi_{r1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_\rho} + \dots + \xi_{rn} \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_\rho} = 0$$

$$(r = 1, 2, \dots, m-h; \qquad \rho = 1, 2, \dots, h).$$

D'altra parte, le quantità

$$\frac{k^2}{\sqrt{a_{ii}}} \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_i}, \quad \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_i}, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_i}$$

sono le coordinate di $m$ iperpiani passanti per l'$S_{n-m}$ normale in P a $V_m$; quindi, denotando con $\theta_{ij}$ opportuni coefficienti, le $\xi$ dovranno avere la forma

$$(33) \qquad \xi_{rs} = \frac{\theta_{r1}}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_1} + \frac{\theta_{r2}}{\sqrt{a_{22}}} \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_2} + \dots + \frac{\theta_{rm}}{\sqrt{a_{mm}}} \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_m}$$

$$(r = 1, 2, \dots, m-h; \qquad s = 0, 1, \dots n),$$

e le (32) diverranno

$$(34) \qquad \frac{\theta_{r1}}{\sqrt{a_{11}}} a_{1\rho} + \frac{\theta_{r2}}{\sqrt{a_{22}}} a_{2\rho} + \dots + \frac{\theta_{rm}}{\sqrt{a_{mm}}} a_{m\rho} = 0$$

$$(r = 1, 2, \dots, m-h; \qquad \rho = 1, 2, \dots, h).$$

Lo spazio $S_{n-m+h}$ è dunque rappresentato dalle (31), essendo le $\xi$ espresse nella forma (33) colle $\theta$ soddisfacenti alle relazioni (34). Per conseguenza le coordinate $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ del punto variabile Y di $W_h^{(n)}$ sono date dalle stesse formole (1), nelle quali le $u_1, u_2, \dots, u_m$ si pensino legate fra loro mediante le relazioni che si ottengono dalle (31) sostituendo, al posto delle $x_0, x_1, \dots, x_n$, le funzioni $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$. In forza di tali relazioni potremo riguardare, sopra $W_h^{(n)}$, le $u_1, u_2, \dots, u_h$ come variabili indipendenti, e le $u_{h+1}, \dots, u_m$ come funzioni di esse:

cominciamo allora col trovare i valori che nel punto P assumono le derivate di queste ultime rapporto alle prime. Derivando a tal fine le (31) rapporto ad $u_\varrho$, abbiamo

$$(35) \qquad \sum_i \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\varrho} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_{h+1}} \frac{\partial u_{h+1}}{\partial u_\varrho} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial u_\varrho} \right) \xi_{ri} = 0$$

$$(r = 1, 2, \dots, m-h; \qquad \rho = 1, 2, \dots, h),$$

le quali nel punto P, in virtù delle (32), dànno

$$(36) \qquad \frac{\partial u_{h+1}}{\partial u_\varrho} \sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_{h+1}} \xi_{ri} + \dots + \frac{\partial u_m}{\partial u_\varrho} \sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_m} \xi_{ri} = 0.$$

Per ogni valore di $\rho$ si hanno di qui $m-h$ equazioni lineari omogenee fra le derivate di $u_{h+1}, \dots, u_m$ rapporto ad $u_\varrho$; ponendo per le $\xi$ i valori dati dalle (33), il determinante di tali equazioni, per le (5), risulta il prodotto delle due matrici

$$(37) \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\theta_{11}}{\sqrt{a_{11}}} & \frac{\theta_{12}}{\sqrt{a_{22}}} & \dots & \frac{\theta_{1m}}{\sqrt{a_{mm}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\theta_{m-h,1}}{\sqrt{a_{11}}} & \frac{\theta_{m-h,2}}{\sqrt{a_{22}}} & \dots & \frac{\theta_{m-h,m}}{\sqrt{a_{mm}}} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} a_{1,h+1} & a_{2,h+1} & \dots & a_{m,h+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mm} \end{matrix} \right\|,$$

e quindi è la somma dei prodotti dei determinanti tratti dalla prima per gli analoghi determinanti tratti dalla seconda. Ma poichè gli elementi che stanno in una medesima orizzontale della prima matrice sono, in virtù delle (34), una soluzione del seguente sistema di $h$ equazioni lineari omogenee fra le $m$ incognite $\lambda_1, \dots, \lambda_m$:

$$a_{1\varrho} \lambda_1 + a_{2\varrho} \lambda_2 + \dots + a_{m\varrho} \lambda_m = 0,$$

per un noto teorema di GRASSMANN-CLEBSCH (*) i suddetti deter-

(*) GRASSMANN, *Ausdehnungslehre,* 1862, n. 112; CLEBSCH, *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie,* " Abhandl. der K. Gesell. d. Wissens. zu Göttingen ", Bd. XVII, 1872, § 2. — Cfr. anche D'OVIDIO, *Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari,* " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XII, 1877, § II.

minanti della prima matrice sono proporzionali ai determinanti *supplementari* della matrice formata coi coefficienti di queste ultime equazioni. Per conseguenza il prodotto delle due matrici (37), a meno d'un fattore essenzialmente diverso da zero, coincide collo sviluppo del determinante delle $a_{ij}$, eseguito secondo la regola di LAPLACE. Il prodotto stesso è quindi, nel punto P, diverso da zero, onde dalle (36) si deduce che nel punto P deve aversi

$$\frac{\partial u_{h+1}}{\partial u_\varrho} = \frac{\partial u_{h+2}}{\partial u_\varrho} = \dots = \frac{\partial u_m}{\partial u_\varrho} = 0. \tag{38}$$

Ciò posto, abbiamo

$$\frac{\partial Y_i}{\partial u_\varrho} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\varrho} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_{h+1}} \frac{\partial u_{h+1}}{\partial u_\varrho} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial u_\varrho}, \tag{39}$$

le quali, per le (38), dànno, nel punto P,

$$\frac{\partial Y_i}{\partial u_\varrho} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\varrho}. \tag{40}$$

Queste provano che in P i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare della varietà $W_h^{(n)}$ prendono risp. gli stessi valori delle $a_{\varrho\sigma}$.

Passando alle derivate seconde, deriviamo la (39) rapporto ad $u_\sigma$, e, dovendo tener conto soltanto di ciò che avviene nel punto P, omettiamo di scrivere i termini che sono nulli per effetto delle (38); abbiamo così, nel punto P,

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_{h+1}} \frac{\partial^2 u_{h+1}}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_m} \frac{\partial^2 u_m}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma}. \tag{41}$$

Ma derivando le (35) rapporto ad $u_\sigma$ e ponendo mente alle (38), otteniamo, nel punto P,

$$\sum_i \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_{h+1}} \frac{\partial^2 u_{h+1}}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_m} \frac{\partial^2 u_m}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} \right) \xi_{ri} = 0,$$

la quale, sostituendo alle $\Xi$ le espressioni date dalle (33) e facendo uso dell'identità (11), diventa:

$$\frac{\partial^2 u_{h+1}}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma}\sum_i \frac{\theta_{ri}}{\sqrt{a_{ii}}} a_{i,h+1} + \dots + \frac{\partial^2 u_m}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma}\sum_i \frac{\theta_{ri}}{\sqrt{a_{ii}}} a_{im} + \sum_i \frac{\theta_{ri}}{\sqrt{a_{ii}}}\begin{bmatrix}\rho\sigma\\ i\end{bmatrix} = 0$$

$$(r = 1,2,\dots, m-h; \qquad \rho,\sigma = 1,2,\dots, h).$$

Per ogni coppia di valori di $\rho, \sigma$ si hanno di qui $m-h$ equazioni lineari non omogenee fra le seconde derivate delle $u_{h+1}, \dots, u_m$ rapporto ad $u_\varrho$ e $u_\sigma$, e il determinante di tali equazioni è quello stesso di cui precedentemente si è discorso. Risolvendo coll'aiuto del teorema di Grassmann-Clebsch testè richiamato, e ricordando la (9), si trova, nel punto P,

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} = -\begin{Bmatrix}\rho\sigma\\ i\end{Bmatrix} \quad (i = h+1, \dots, m; \quad \rho,\sigma = 1,2,\dots h),$$

epperò, per la (41), nel punto P si avrà

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} - \sum_{r'} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_{r'}}\begin{Bmatrix}\rho\sigma\\ r'\end{Bmatrix}, \tag{42}$$

dove, qui come in seguito, gl'indici rappresentati da lettere latine munite d'accento s'intende che variino nella serie $h+1$, $h+2, \dots, m$.

Cerchiamo ora come si esprimano nel punto P, per la varietà $W_h^{(n)}$, i simboli di Christoffel di 1ª specie. Denotando a tale scopo con $c_{\varrho\sigma}$ i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare di $W_h^{(n)}$, abbiamo

$$c_{\varrho\sigma} = \sum_i \frac{\partial Y_i}{\partial u_\varrho}\frac{\partial Y_i}{\partial u_\sigma}, \tag{43}$$

da cui, derivando rapporto ad $u_\lambda$ e facendo uso successivamente delle (40) e (42) e della (11), otteniamo, nel punto P,

$$\frac{\partial c_{\varrho\sigma}}{\partial u_\lambda} = \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial u_\lambda} - \sum_{r'}\left(a_{\varrho r'}\begin{Bmatrix}\lambda\sigma\\ r'\end{Bmatrix} + a_{\sigma r'}\begin{Bmatrix}\lambda\rho\\ r'\end{Bmatrix}\right).$$

Perciò, ponendo l'indice $n$ per designare ciò che si riferisce alla varietà $W_h^{(n)}$, risulta, nel punto P,

$$\left[\begin{smallmatrix}\rho\sigma\\ \lambda\end{smallmatrix}\right]_n = \sum_\mu a_{\lambda\mu} \left\{\begin{smallmatrix}\rho\sigma\\ \mu\end{smallmatrix}\right\}. \tag{44}$$

Considerando da ultimo i simboli di RIEMANN, formiamo la seconda derivata della (43) rapporto ad $u_\lambda$ e $u_\mu$, e trasformiamola, pel punto P, nel solito modo ricorrendo alle (40) e (42) e poi alla (11); osservando allora che

$$\frac{\partial \left[\begin{smallmatrix}\varrho\sigma\\ \lambda\end{smallmatrix}\right]_n}{\partial u_\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 c_{\lambda\varrho}}{\partial u_\mu \partial u_\sigma} + \frac{\partial^2 c_{\lambda\sigma}}{\partial u_\mu \partial u_\varrho} - \frac{\partial^2 c_{\varrho\sigma}}{\partial u_\lambda \partial u_\mu}\right),$$

si trova, nel punto P,

$$\frac{\partial \left[\begin{smallmatrix}\varrho\sigma\\ \lambda\end{smallmatrix}\right]_n}{\partial u_\mu} = \sum_\iota \frac{\partial^2 \varphi_\iota}{\partial u_\lambda \partial u_\mu}\, \frac{\partial^2 \varphi_\iota}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} + \sum_\iota \frac{\partial \varphi_\iota}{\partial u_\lambda}\, \frac{\partial^3 Y_\iota}{\partial u_\mu \partial u_\varrho \partial u_\sigma}$$

$$-\sum_{r'}\left(\left[\begin{smallmatrix}\lambda\mu\\ r'\end{smallmatrix}\right]\left\{\begin{smallmatrix}\rho\sigma\\ r'\end{smallmatrix}\right\} + \left[\begin{smallmatrix}\rho\sigma\\ r'\end{smallmatrix}\right]\left\{\begin{smallmatrix}\lambda\mu\\ r'\end{smallmatrix}\right\}\right) + \sum_{r's'} a_{r's'} \left\{\begin{smallmatrix}\lambda\mu\\ r'\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\rho\sigma\\ s'\end{smallmatrix}\right\}.$$

Formando quindi i primi due termini dei simboli di RIEMANN, le terze derivate delle $Y_\iota$ si distruggono mutuamente; facendo poi uso dell'identità (12), e notando inoltre che, in virtù della (44),

$$\left[\begin{smallmatrix}\rho\sigma\\ \lambda\end{smallmatrix}\right]_n \left[\begin{smallmatrix}\rho'\sigma'\\ \mu\end{smallmatrix}\right]_n - \left[\begin{smallmatrix}\rho\sigma'\\ \lambda\end{smallmatrix}\right]_n \left[\begin{smallmatrix}\rho'\sigma\\ \mu\end{smallmatrix}\right]_n = \sum_{\tau\tau'} a_{\lambda\tau} a_{\mu\tau'} \left(\left\{\begin{smallmatrix}\rho\sigma\\ \tau\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\rho'\sigma'\\ \tau'\end{smallmatrix}\right\} - \left\{\begin{smallmatrix}\rho\sigma'\\ \tau\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\rho'\sigma\\ \tau'\end{smallmatrix}\right\}\right),$$

si ottiene, nel punto P,

$$(\rho\rho', \sigma\sigma')_n = \frac{\partial \left[\begin{smallmatrix}\varrho\sigma\\ \varrho'\end{smallmatrix}\right]}{\partial u_{\sigma'}} - \frac{\partial \left[\begin{smallmatrix}\varrho\sigma'\\ \varrho'\end{smallmatrix}\right]}{\partial u_\sigma}$$

$$-\sum_{r'}\left(\left[\begin{smallmatrix}\rho\sigma\\ r'\end{smallmatrix}\right]\left\{\begin{smallmatrix}\rho'\sigma'\\ r'\end{smallmatrix}\right\} + \left[\begin{smallmatrix}\rho'\sigma'\\ r'\end{smallmatrix}\right]\left\{\begin{smallmatrix}\rho\sigma\\ r'\end{smallmatrix}\right\} - \left[\begin{smallmatrix}\rho\sigma'\\ r'\end{smallmatrix}\right]\left\{\begin{smallmatrix}\rho'\sigma\\ r'\end{smallmatrix}\right\} - \left[\begin{smallmatrix}\rho'\sigma\\ r'\end{smallmatrix}\right]\left\{\begin{smallmatrix}\rho\sigma'\\ r'\end{smallmatrix}\right\}\right)$$

$$+\sum_{r's'} a_{r's'}\left(\left\{\begin{smallmatrix}\rho\sigma\\ r'\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\rho'\sigma'\\ s'\end{smallmatrix}\right\} - \left\{\begin{smallmatrix}\rho\sigma'\\ r'\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\rho'\sigma\\ s'\end{smallmatrix}\right\}\right)$$

$$-\sum_{\lambda\mu\tau\tau'} B_{\lambda\mu} a_{\lambda\tau} a_{\mu\tau'} \left(\left\{\begin{smallmatrix}\rho\sigma\\ \tau\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\rho'\sigma'\\ \tau'\end{smallmatrix}\right\} - \left\{\begin{smallmatrix}\rho\sigma'\\ \tau\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\rho'\sigma\\ \tau'\end{smallmatrix}\right\}\right).$$

Il secondo membro si può semplificare di molto: per tale scopo conviene far variare gl'indici $r'$, $s'$ nella serie $1, 2, \ldots, m$ sottraendo termini opportuni, indi esprimere, colla (9), tutti i simboli di 2ª specie per mezzo dei simboli di 1ª specie; dopo ciò, con alcune trasformazioni che non è il caso di qui esporre distesamente (*), si trova

$$(45)\quad (\rho\rho', \sigma\sigma')_n = \frac{\partial \left[{\rho\sigma' \atop \varrho'}\right]}{\partial u_{\sigma'}} - \frac{\partial \left[{\rho\sigma' \atop \varrho'}\right]}{\partial u_{\sigma}} - \sum_{rs} A_{rs} \left( \left[{\rho\sigma \atop r}\right] \left[{\rho'\sigma' \atop s}\right] - \left[{\rho\sigma' \atop r}\right] \left[{\rho'\sigma \atop s}\right] \right).$$

4. — Colle formole dei nⁱ 2 e 3 siamo in grado di trovare le effettive espressioni che hanno nel punto P le quantità $(D_1^{(l)})$, $(D_1^{(n)})$ e $(D_2^{(l)})$, $(D_2^{(n)})$, definite nella Nota precedente ed alle prime due delle quali abbiamo dato risp. il nome di *flessione tangenziale* e *flessione normale* di $W_h$ nel punto P. Quanto alla flessione tangenziale, applicando la formola (14) data dal sig. KILLING (l. c., pag. 244) per la flessione d'una varietà qualsiasi, abbiamo

$$(D_1^{(l)})^2 = \sum B_{\varrho\sigma} B_{\varrho'\sigma'} \frac{\partial^2 X_i}{\partial u_{\varrho} \partial u_{\sigma}} \frac{\partial^2 X_i}{\partial u_{\varrho'} \partial u_{\sigma'}}$$
$$- \sum B_{\varrho\sigma} B_{\varrho'\sigma'} B_{\tau\tau'} \left[{\rho\sigma \atop \tau}\right]_l \left[{\rho'\sigma' \atop \tau'}\right]_l - \frac{h^2}{k^2},$$

---

(*) Per dare almeno un cenno di questo calcolo, notiamo che colle operazioni indicate nel testo si presenteranno i due termini

$$-\sum_{rs\lambda\mu} A_{r\lambda} A_{s\mu} a_{\lambda\mu} \left[{\rho\sigma \atop r}\right] \left[{\rho'\sigma' \atop s}\right] - \sum_{rs\lambda r'} A_{r\lambda} A_{sr'} a_{\lambda r'} \left[{\rho\sigma \atop r}\right] \left[{\rho'\sigma' \atop s}\right];$$

la loro somma può scriversi così:

$$-\sum_{rs\lambda} A_{r\lambda} \left[{\rho\sigma \atop r}\right] \left[{\rho'\sigma' \atop s}\right] \left( \sum_{\mu r'} (A_{s\mu} a_{\lambda\mu} + A_{sr'} a_{\lambda r'}) \right);$$

ma

$$\sum_{\mu r'} (A_{s\mu} a_{\lambda\mu} + A_{sr'} a_{\lambda r'}) = \sum_r A_{sr} a_{\lambda r} = \delta_{s\lambda};$$

per avere termini non nulli, deve quindi prendersi $s = \lambda$, sicchè infine i due termini considerati equivalgono a

$$-\sum_{r\lambda} A_{r\lambda} \left[{\rho\sigma \atop r}\right] \left[{\rho'\sigma' \atop \lambda}\right].$$

Questo termine viene poi distrutto da un altro della somma totale.

dove, come in seguito, le somme si riferiscono a tutte le lettere latine e greche che compariscono come indici dopo ogni segno $\Sigma$, colle convenzioni già fatte al n. 1. Per le (27), (2) e (3), la prima somma diviene

$$\frac{1}{k^2}\sum B_{\rho\sigma}B_{\rho'\sigma'}a_{\rho\sigma}a_{\rho'\sigma'}+\sum B_{\rho\sigma}B_{\rho'\sigma'}a_{rs}\left\{ {\rho\sigma \atop r} \right\}\left\{ {\rho'\sigma' \atop s} \right\};$$

il primo termine, per la (7), equivale ad $\frac{h^2}{k^2}$; il secondo, colle (9) e (6), si trasforma in

$$\sum A_{ij}B_{\rho\sigma}B_{\rho'\sigma'}\left[ {\rho\sigma \atop i} \right]\left[ {\rho'\sigma' \atop j} \right],$$

laonde, sostituendo e ricordando la (29), si ha infine la formola notevole:

$$(46)\qquad (D_1^{(l)})^2=\sum A_{ij}B_{\rho\sigma}B_{\rho'\sigma'}\left[ {\rho\sigma \atop i} \right]\left[ {\rho'\sigma' \atop j} \right]-\sum B_{\rho\sigma}B_{\rho'\sigma'}B_{\tau\tau'}\left[ {\rho\sigma \atop \tau} \right]\left[ {\rho'\sigma' \atop \tau'} \right].$$

Poichè nel secondo membro non entrano che i coefficienti $a_{rs}$ del quadrato dell'elemento lineare della data varietà $V_m$ e le loro derivate rapporto alle $u_1, u_2, \ldots, u_m$, ma non figurano nè $n$ nè $k$, si conclude:

*La flessione tangenziale di una varietà descritta sopra una varietà qualsiasi $V_m$ ad $m$ dimensioni, immersa in uno spazio $S_n$ di $n$ dimensioni e di curvatura costante, è una quantità che non cambia per flessioni (Biegungen) di $V_m$, e non dipende nè dalla differenza $n-m$, nè dal valore della curvatura dello spazio $S_n$.*

Se $h=1$, se cioè la varietà $W_h$ è una curva, si ha

$$B_{11}=\frac{1}{a_{11}},\qquad \left[ {11 \atop 1} \right]=\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial u_1},$$

sicchè la (46) assume la forma semplice

$$(D_1^{(l)})^2=\frac{1}{a^2_{11}}\sum A_{ij}\left[ {11 \atop i} \right]\left[ {11 \atop j} \right]-\frac{1}{4a^3_{11}}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial u_1}\right)^2.$$

E se si tratta di una curva situata sopra una superficie dello spazio ordinario, e si fa uso delle notazioni usuali, cioè si pone

$u_1 = u$, $u_2 = v$, e si chiamano E, F, G i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare, si ha

$$a_{11} = E, \qquad a_{12} = F, \qquad a_{22} = G,$$

$$A_{11} = \frac{G}{EG - F^2}, \quad A_{12} = -\frac{F}{EG - F^2}, \quad A_{22} = \frac{E}{EG - F^2}.$$

Estraendo allora le radici quadrate, la formola precedente dà:

$$(D_1^{(l)}) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{F}{\sqrt{E}} \right) - \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right],$$

che è l'espressione che si ricava dalla nota formola di Bonnet (*) per la curvatura geodetica d'una linea $v = \text{cost}$. Se introduciamo i parametri differenziali, osservando che

$$\Delta_1 v = \frac{E}{EG - F^2}, \quad \Delta_2 v = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left( -\frac{\partial}{\partial u} \frac{F}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}} \right),$$

$$\nabla \left( v, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 v}} \right) = \frac{1}{EG - F^2} \left( -F \frac{\partial}{\partial u} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} + E \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \right),$$

la relazione precedente diviene

$$-(D_1^{(l)}) = \frac{\Delta_2 v}{\sqrt{\Delta_1 v}} + \nabla \left( v, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 v}} \right),$$

che è la nota formola del prof. Beltrami (**).

Tornando al caso generale, e considerando la flessione normale di $W_h$, la formola del sig. Killing testè richiamata porge:

$$(D_1^{(n)})^2 = \sum B_{\varrho\sigma} B_{\varrho'\sigma'} \frac{\partial^2 Y_i}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} \frac{\partial^2 Y_i}{\partial u_{\varrho'} \partial u_{\sigma'}}$$

$$- \sum B_{\varrho\sigma} B_{\varrho'\sigma'} B_{\tau\tau'} \begin{bmatrix} \rho\sigma \\ \tau \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} \rho'\sigma' \\ \tau' \end{bmatrix}_n - \frac{h^2}{k^2},$$

(*) V. ad es. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale* (Pisa, 1894), pag. 145.

(**) Beltrami, *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, " Giornale di Mat. ", vol. III, 1865, § XXI. Cfr. pure Bianchi, l. c., pag. 145.

ossia, applicando al primo termine le (42) e la (11) ed al secondo la (44) e poi la (7),

$$(D_1^{(n)})^2 = \sum B_{\varrho\sigma} B_{\varrho'\sigma'} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_{\varrho'} \partial u_{\sigma'}} - 2\sum B_{\varrho\sigma} B_{\varrho'\sigma'} \left\{ {\rho\sigma \atop r'} \right\} \left[ {\rho'\sigma' \atop r'} \right]$$

$$+ \sum B_{\varrho\sigma} B_{\varrho'\sigma'} a_{r's'} \left\{ {\rho\sigma \atop r'} \right\} \left\{ {\rho'\sigma' \atop s'} \right\} - \sum B_{\varrho\sigma} B_{\varrho'\sigma'} a_{\lambda\lambda'} \left\{ {\rho\sigma \atop \lambda} \right\} \left\{ {\rho'\sigma' \atop \lambda'} \right\} - \frac{h^2}{k^2}.$$

Il secondo ed il terzo termine si possono trasformare facendo variare gl'indici $r'$, $s'$ nella serie $1, 2, \ldots, m$, purchè se ne sottraggano termini convenienti; esprimendo poscia i simboli di 2ª specie con quelli di 1ª specie, e ricorrendo alla (6), si trova infine

$$(47) \qquad (D_1^{(n)})^2 = \sum B_{\varrho\sigma} B_{\varrho'\sigma'} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_{\varrho'} \partial u_{\sigma'}}$$

$$- \sum A_{ij} B_{\varrho\sigma} B_{\varrho'\sigma'} \left[ {\rho\sigma \atop i} \right] \left[ {\rho'\sigma' \atop j} \right] - \frac{h^2}{k^2}.$$

Poichè per la varietà $W_h$ si ha

$$(D_1)^2 = \sum B_{\varrho\sigma} B_{\varrho'\sigma'} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_{\varrho'} \partial u_{\sigma'}}$$

$$- \sum B_{\varrho\sigma} B_{\varrho'\sigma'} B_{\tau\tau'} \left[ {\rho\sigma \atop \tau} \right] \left[ {\rho'\sigma' \atop \tau'} \right] - \frac{h^2}{k^2},$$

le (46) e (47) dànno senz'altro

$$(D_1)^2 = (D_1^{(t)})^2 + (D_1^{(n)})^2,$$

cioè la relazione (13), a cui siamo pervenuti per altra via nella Nota I.

Per ciò che concerne le quantità $(D_2^{(t)})$ e $(D_2^{(n)})$, la formola (19) a pag. 247 del citato libro del sig. Killing dà

$$(D_2^{(t)}) = \sum b_{\varrho\varrho'\sigma\sigma'} \left[ (\rho\rho', \sigma\sigma')_t - \frac{1}{k^2} (a_{\varrho\sigma} a_{\varrho'\sigma'} - a_{\varrho\sigma'} a_{\varrho'\sigma}) \right],$$

avendo indicato con $b_{\varrho\varrho'\sigma\sigma'}$ il coefficiente del prodotto $a_{\varrho\sigma} a_{\varrho'\sigma'}$ nello sviluppo del determinante delle $a_{\varrho\sigma}$. Per la (30), la formola precedente diviene

$$(D_2^{(l)}) = \sum A_{rs}\, b_{\varrho\varrho'\sigma\sigma'} \left( \begin{bmatrix} \rho\sigma \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho'\sigma' \\ s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho\sigma' \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho'\sigma \\ s \end{bmatrix} \right)$$
$$- \sum B_{\lambda\mu} b_{\varrho\varrho'\sigma\sigma'} \left( \begin{bmatrix} \rho\sigma \\ \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho'\sigma' \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho\sigma' \\ \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho'\sigma \\ \mu \end{bmatrix} \right).$$

Analogamente si ha

$$(D_2^{(n)}) = \sum b_{\varrho\varrho'\sigma\sigma'} \left[ (\rho\rho', \sigma\sigma')_n - \frac{1}{k^2} (a_{\varrho\sigma} a_{\varrho'\sigma'} - a_{\varrho\sigma'} a_{\varrho'\sigma}) \right],$$

ossia, per la (45),

$$(D_2^{(n)}) = \sum b_{\varrho\varrho'\sigma\sigma'} \left\{ \frac{\partial \begin{bmatrix} \varrho\sigma \\ \varrho' \end{bmatrix}}{\partial u_{\sigma'}} - \frac{\partial \begin{bmatrix} \varrho\sigma' \\ \varrho' \end{bmatrix}}{\partial u_\sigma} - \frac{1}{k^2} (a_{\varrho\sigma} a_{\varrho'\sigma'} - a_{\varrho\sigma'} a_{\varrho'\sigma}) \right\}$$
$$- \sum A_{rs}\, b_{\varrho\varrho'\sigma\sigma'} \left( \begin{bmatrix} \rho\sigma \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho'\sigma' \\ s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho\sigma' \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho'\sigma \\ s \end{bmatrix} \right).$$

Avendosi poi per la $W_h$

$$(D_2) = \sum b_{\varrho\varrho'\sigma\sigma'} \left\{ \frac{\partial \begin{bmatrix} \varrho\sigma \\ \varrho' \end{bmatrix}}{\partial u_{\sigma'}} - \frac{\partial \begin{bmatrix} \varrho\sigma' \\ \varrho' \end{bmatrix}}{\partial u_\sigma} - \frac{1}{k^2} (a_{\varrho\sigma} a_{\varrho'\sigma'} - a_{\varrho\sigma'} a_{\varrho'\sigma}) \right\}$$
$$- \sum B_{\lambda\mu} b_{\varrho\varrho'\sigma\sigma'} \left( \begin{bmatrix} \rho\sigma \\ \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho'\sigma' \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho\sigma' \\ \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho'\sigma \\ \mu \end{bmatrix} \right),$$

risulta immediatamente

$$(D_2) = (D_2^{(l)}) + (D_2^{(n)}),$$

cioè la formola (14) dimostrata in altro modo nella Nota I.

Inoltre dalle espressioni di $(D_2^{(l)})$ e $(D_2^{(n)})$ si deduce:

*Se sopra una varietà $V_m$ ad $m$ dimensioni, immersa in uno spazio $S_n$ di $n$ dimensioni e di curvatura costante, è data un'arbitraria varietà, le quantità $(D_2^{(l)})$ e $(D_2^{(n)})$ formate per quest'ultima in un suo punto qualunque non cangiano per flessioni di $V_m$, e sono indipendenti dalla differenza $n - m$; la $(D_2^{(l)})$ non dipende neanche dalla curvatura dello spazio $S_n$.*

5. — Colle formole generali dei n[i] precedenti si potrebbero dimostrare di nuovo anche gli altri teoremi della Nota I, ciò che ometto però di fare giacchè non si sarebbe così condotti a nessun nuovo risultato. Invece chiuderò il lavoro mostrando, per mezzo di quelle formole, come le proprietà precedenti si

estendano in generale a tutte le espressioni che, per una varietà qualunque ad $m$ dimensioni, il sig. KILLING (l. c., n[i] 131, 132 e 133) ha chiamato $(D_r)$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$. Ecco in breve, riferendo il discorso alla varietà $V_m$, in qual modo si costruiscono siffatte espressioni.

Proiettata $V_m$ sopra uno spazio $S_{m+1}$ condotto ad arbitrio per l'$S_m$ tangente a $V_m$ nel punto fissato P, le $m$ curvature principali, di cui è dotata in P la proiezione ottenuta, sono le radici della seguente equazione in $\omega$:

$$\left| \sum_s c_s \left( \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial u_i \, \partial u_j} + \frac{a_{ij}}{k^2} \varphi_s \right) - \omega a_{ij} \right| = 0,$$

dove le $c$ sono quantità che determinano la posizione dell'anzidetto spazio $S_{m+1}$ attorno all'$S_m$ tangente. Si indichi con $D_r(c)$ il coefficiente di $\omega^{m-r}$ nell'equazione precedente, diviso pel coefficiente di $\omega^m$, cioè pel determinante delle $a_{ij}$: tale quantità è una funzione omogenea di grado $r$ delle $c$. Se allora $r$ è pari, l'espressione $(D_r)$ è quella che risulta da $D_r(c)$ sostituendovi, al posto di ogni prodotto $c_i c_j$, la differenza

$$\delta_{ij} - \sum_{st} A_{st} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_s} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_t};$$

se invece $r$ è impari, l'espressione $(D_r)$ è la radice quadrata di ciò che risulta formando il quadrato di $D_r(c)$ ed eseguendo in esso le precedenti sostituzioni. Un significato geometrico delle $m$ espressioni così ottenute è stato indicato dal sig. KILLING (l. c., n. 133), il quale ha pure dimostrato (l. c., n[i] 131 e 132) che *tutte le* $(D_r)$, *all'infuori di* $(D_1)$, *rimangono invariate per flessioni di* $V_m$ *e non dipendono dalla differenza* $n - m$. A questo risultato si perviene dopo aver dimostrato che le $(D_2), (D_3), \ldots, (D_m)$ sono aggregati di termini, ognuno dei quali è il prodotto d'una quantità formata esplicitamente colle sole $a_{ij}$, per un'altra quantità composta di espressioni del tipo

$$(st, ij) - \frac{1}{k^2}(a_{si}a_{tj} - a_{sj}a_{ti}). \tag{48}$$

Ciò premesso, consideriamo la varietà $W_h$ ad $h$ dimensioni tracciata sopra $V_m$, e formiamo per le varietà $W_h^{(1)}$ e $W_h^{(m)}$ le espres-

sioni $(D_\varrho)$ $(\rho = 1, 2, \ldots, h)$ testè definite, che, in conformità colle notazioni dei n[i] precedenti, chiameremo $(D^{(t)}_\varrho)$ e $(D^{(n)}_\varrho)$. Per l'una e per l'altra di quelle due varietà abbiamo veduto che nel punto P i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare assumono gli stessi valori delle $a_{\varrho\sigma}$ $(\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h)$; inoltre per le stesse varietà le espressioni del tipo (48) divengono risp.

$$(\rho\rho', \sigma\sigma')_t - \frac{1}{k^2}(a_{\varrho\sigma}a_{\varrho'\sigma'} - a_{\varrho\sigma'}a_{\varrho'\sigma})$$

e

$$(\rho\rho', \sigma\sigma')_n - \frac{1}{k^2}(a_{\varrho\sigma}a_{\varrho'\sigma'} - a_{\varrho\sigma'}a_{\varrho'\sigma}),$$

e queste, per le (30) e (45), sono unicamente formate colle $a_{\varrho\sigma}$ medesime e non dipendono da $n$: la prima anzi non dipende nemmeno da $k$. Possiamo quindi enunciare affatto in generale il teorema:

*Se sopra una varietà $V_m$ ad $m$ dimensioni, immersa in uno spazio $S_n$ di $n$ dimensioni e di curvatura costante, è tracciata una arbitraria varietà $W_h$ di $h$ dimensioni, ciascuna delle quantità*

$$(\alpha) \qquad (D_1^{(t)}),\ (D_2^{(t)}),\ (D_3^{(t)}),\ \ldots,\ (D_h^{(t)})$$

*e ciascuna delle quantità*

$$(D_2^{(n)}),\ (D_3^{(n)}),\ \ldots,\ (D_h^{(n)}),$$

*formate per $W_h$ in un suo punto qualunque, rimane immutata per flessioni di $V_m$, ed è indipendente dalla differenza $n - m$; inoltre le* (α) *non dipendono neanche dalla curvatura dello spazio $S_n$.*

# *Ricerche mineralogiche sui giacimenti di anidrite e di gesso dei dintorni di Oulx (Alta Valle della Dora Riparia);*

Nota del Dott. LUIGI COLOMBA.

I giacimenti di solfato di calcio, così ampiamente sviluppati sul versante francese delle Alpi occidentali, non mancano sul versante italiano e specialmente nell'alta Valle della Dora Riparia, dove affiorano in molti punti come nei valloni del rio de la Fosse sopra Mélézet e del Thures sopra Cesana, al Moncenisio e lungo le falde della catena che dal Moncenisio va a Bardonecchia ed in modo speciale nel tratto di questa catena compreso fra Oulx e Savoulx, alla base del Séguret.

Questi giacimenti appaiono in vari punti direttamente sovrapposti alle quarziti e sono intimamente legati alle carniole ed ai calcari con i quali si trovano in immediato contatto; i calcari cristallini spesso associati, alternano con sottili strati di schisti verdi glaucofanitici e soventi sono molto ricchi in minerali, come per taluni ho già altra volta fatto notare (1); questa associazione di calcari, carniole, gesso e quarziti già notata da Gastaldi (2) è analoga a quella osservata da Kilian (3) nei giacimenti simili della Moriana e del Brianzonese.

I giacimenti che affiorano nei dintorni di Oulx, alla Beaume

(1) Colomba, *Sulla glaucofane della Beaume.* " Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino ,, XXIX, 11 marzo 1894.

(2) Gastaldi, *Studi geologici sulle Alpi Occidentali.* " Memorie del Comitato Geologico Italiano ,. Volume II, parte II, 1874.

(3) Kilian, *Contributions à la connaissance géologique des chaînes alpines entre Moutiers et Barcellonette.* " Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris ,, 5 janvier 1891.

ed a Savoulx, da me esaminati, sono all'esterno costituiti da gesso, ma a profondità contengono sempre dell'anidrite. Baretti (1) sembra escludere completamente l'esistenza dell'anidrite nei detti giacimenti. Infatti a pag. 163 della sua opera dice che " l'anidrite saccaroide (da lui riferita ai terreni prepaleozoici) non esiste sul versante italiano delle Alpi piemontesi „ ed a pagina 171 indica l'esistenza di carniole e di gessi triasici nella valle di Susa senza accennare menomamente alla esistenza dell'anidrite. Ora io credo che non sia difficile il dimostrare come l'anidrite, per quanto non completamente scevra di gesso (poichè sempre per riscaldamento si ha svolgimento di piccole quantità di acqua), non manchi mai nei giacimenti da me studiati.

Infatti la sua comparsa si rende manifesta per il cambiamento subìto dall'aspetto della roccia, la quale assume una struttura più cristallina ed appare formata da tante laminette che si rompono secondo parallelepipedi e che a luce polarizzata hanno sempre il comportamento ottico delle sostanze trimetriche.

E che tali frammenti e laminette siano realmente di anidrite si può dedurre da alcune altre mie osservazioni. Preso un frammento della roccia dove appunto presentava più spiccata questa struttura a laminette e trattatolo con una soluzione di carbonato ammonico, notai che in brevissimo tempo, sebbene fosse stata minima la quantità di solfato decompostosi, il frammento si disgregò completamente lasciando un abbondantissimo residuo formato da frammenti in forma di parallelepipedi e trimetrici; i quali frammenti non contenevano acqua e si decomposero in seguito a ripetuto trattamento con carbonato ammonico senza che la soluzione, risultante per ulteriore trattamento con acido cloridrico del carbonato formatosi per decomposizione del solfato, svelasse l'esistenza di altri elementi oltre il calcio.

In una sezione sottile potei osservare come la roccia nei punti in cui maggiormente ha struttura cristallina, sia costituita da un aggregato di granuli incolori, con marcatissime sfaldature ad angolo retto e dotati di estinzione retta. Negli

---

(1) Baretti, *Geologia della provincia di Torino*, 1893.

interstizi fra granulo e granulo e nelle fessure derivanti dalla sfaldatura appaiono delle intercalazioni di una sostanza fibrosa, con estinzioni inclinate e facilmente riconoscibile per gesso; queste intercalazioni di gesso debbono considerarsi non come infiltrazioni di acque ricche in gesso, ma bensì come un primo stadio di idratazione dell'anidrite; infatti in alcuni casi ho potuto constatare come esse realmente siano dovute al progressivo alterarsi dell'anidrite: in quei punti l'anidrite perde il suo aspetto compatto e si cambia in un aggregato di finissime fibre di gesso. Il cambiamento nei granuli incomincia sull'orlo che appare allora come sfilacciato e poscia progredisce verso l'interno seguendo specialmente le linee di sfaldatura analogamente a quanto fu già supposto da Sella riguardo al giacimento analogo di Gebroulaz in Savoia (1); in alcuni granuli completamente trasformati si vedono ancora delle sfaldature che ricordano quelle dell'anidrite.

L'esistenza di queste intercalazioni di gesso dovute ad un inizio di idratazione dell'anidrite, può spiegare perfettamente il fatto più sopra da me accennato, della rapida disgregazione subìta dai frammenti della roccia dopo essere rimasti anche per un brevissimo tempo a contatto con una soluzione di carbonato ammonico: basta ammettere che dapprima venga decomposto il gesso che si trova intercalato, per cui staccandosi l'uno dall'altro i granuli di anidrite si avrebbe la disgregazione dei frammenti. E che realmente il gesso sia più facilmente attaccabile dal carbonato ammonico che non l'anidrite risulta da una mia esperienza.

Avendo posto insieme in un unico recipiente contenente una soluzione di carbonato ammonico, alcuni frammenti di anidrite e di gesso constatai come la trasformazione in carbonato di calcio fosse molto meno rapida per l'anidrite che per il gesso i cui frammenti si presentavano già, dopo poche ore, profondamente alterati, mentre quelli di anidrite lo erano in modo appena sensibile. Notai pure che i frammenti di gesso perdevano, nelle parti alterate, ogni compattezza e divenivano assai friabili (dipendendo, credo, tale friabilità e tale poca compat-

(1) Sella A., *Sulla sellaite e sui minerali che l'accompagnano*, " Memorie della R. Accademia dei Lincei ", 1887, p. 455.

tezza dalla eliminazione dell'acqua inizialmente contenuta nel solfato calcico) ed in seguito a trattamento con acido cloridrico rimanevano appena nell'interno dei piccolissimi nuclei inalterati, non più informi come i frammenti adoperati, ma simulanti grossolanamente dei cristalli monoclini; invece i frammenti di anidrite sottoposti allo stesso trattamento lasciavano appena vedere delle leggiere figure di corrosione sotto forma di microscopici incavi rettangolari pochissimo profondi.

Ho anche potuto calcolare approssimativamente le proporzioni nelle quali il gesso e l'anidrite entrano a costituire la roccia nei punti in cui è nettamente cristallina; sottoponendo vari frammenti, dapprima ridotti in polvere finissima, ad un calore mai superiore al rosso scuro, notai che si aveva una perdita oscillante fra il 4 ed il 5 per cento per cui si può supporre che nell'anidrite sia contenuto il gesso in quantità variabile dal 20 al 25 per cento, essendo la quantità di acqua contenuta nel gesso puro pari a 20,9 per cento.

L'unica differenza che si può ammettere esista fra questi giacimenti e quelli simili del versante francese si è che in quelli italiani il rivestimento gessoso ha uno spessore maggiore, cioè l'idratazione dell'anidrite è più avanzata e non si hanno come nella Savoia e nel Delfinato dei punti in cui l'anidrite affiora direttamente.

La struttura di questi giacimenti si modifica generalmente passando dall'esterno all'interno poichè, mentre nelle parti esterne la roccia si presenta spesso poco coerente e talvolta assume un aspetto breccioide, nell'interno invece diviene più omogenea, e più compatta e tale aspetto si accentua maggiormente dove il gesso viene sostituito dall'anidrite; in questi punti la roccia assume una struttura nettamente cristallina. Numerose fenditure attraversano la roccia prolungandosi indifferentemente tanto attraverso al gesso quanto attraverso all'anidrite; sono esse prevalentemente ripiene di gesso cristallizzato a cui si uniscono spesso altri minerali pure diffusi nella roccia.

L'origine di questi giacimenti, studiati specialmente nella Savoia e nel Delfinato, è tutt'ora molto discussa e le difficoltà d'una spiegazione probabile sono accresciute dall'essere soventi prevalentemente costituiti di anidrite la cui formazione per via umida, senza invocare cause speciali, è tutt'ora una questione dif-

ficile da risolvere. Le varie ipotesi emesse allo scopo di spiegare l'origine dei detti giacimenti si possono dividere in due gruppi; al primo appartengono quelle che ammettono che essi siano semplicemente dovuti al depositarsi del solfato calcico sciolto inizialmente nelle acque marine portate ad un conveniente grado di concentrazione mediante sistemi lagunari (1); al secondo gruppo appartengono quelle che ammettono che i depositi in questione debbano derivare da fenomeni di metamorfismo esercitatisi su calcari e su dolomiti preesistenti e ricorrono per spiegare questi fenomeni all'azione di emanazioni solfuree o solforose, di acque solfatanti e di piriti in via di ossidazione (2).

Da qualche tempo ho iniziato delle ricerche sull'origine dei giacimenti dell'alta valle della Dora Riparia e sulle relazioni che li collegano alle roccie che quasi costantemente sono ad essi associate; dai risultati finora ottenuti non credo applicabile ai gessi ed alle anidriti di Oulx l'ipotesi d'un semplice deposito d'origine marina; così pure non credo si possa accogliere senza riserve e senza notevoli modificazioni la seconda ipotesi, poichè in alcuni casi ho potuto constatare come i gessi e l'anidrite appaiano come contemporanei dei calcari cristallini che sono al loro contatto e ciò sebbene sianvi alcuni fatti che per una superficiale osservazione potrebbero far supporre che realmente si tratti d'un fenomeno di metamorfismo posteriore.

Infatti, oltre alle specie mineralogiche che descriverò in seguito, mi è accaduto di trovare di quando in quando, nel residuo insolubile in acido cloridrico ottenuto trattando il gesso e l'anidrite con carbonato ammonico, delle rarissime scheggie che

(1) M. Bertrand (" Bulletin de la Société Géologique de France ", Serie 3ª, XXII, p. 76, 1894) ammette come derivanti da un sistema lagunare triasico i giacimenti di anidrite; invece per i gessi soprastanti ammette che derivino o per diretta idratazione dell'anidrite o per un fenomeno di sostituzione del gesso sciolto nelle acque circolanti, compiutasi a spese dei calcari cristallini.

(2) Sismonda, *Osservazioni geologiche sulla Valle di Susa e sul Moncenisio.* " Memorie dell'Acc. delle Scienze di Torino ", Serie I, T. XXXVIII, pag. 143. — Baretti, *Geologia della provincia di Torino*, 1893, pag. 172. — Sella A., Op. citata, p. 467. — Spezia, *Sulla origine del gesso micaceo ed anfibolico di Val Cherasca.* " Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino ", XXIII; adunanza 20 Novembre 1887.

dai loro caratteri riferii a *glaucofane*, a *tormalina*, ad *anfibolo*, a *clorite*, ed a *rutilo* e siccome taluni di questi minerali (come la glaucofane, la tormalina e la clorite) si trovano in alcuni calcari cristallini adiacenti ai giacimenti in questione (1) potrebbe un tale fatto invocarsi in appoggio all'ipotesi per cui il solfato di calcio sarebbe da considerarsi come un prodotto di solfatazione dei detti calcari cristallini.

Ora per varie ragioni io non credo assolutamente che dalla presenza di quelle rare scheggie possa trarsi, con fondamento, la suesposta conseguenza. Difatti Spezia (2) nel suo studio sul gesso micaceo ed anfibolico di Val Cherasca, gesso indubbiamente proveniente da un fenomeno di solfatazione di un calcare per ossidazione delle piriti in esso incluse, indica come, a parte la scomparsa dei solfuri, il gesso presenti ancora gli stessi minerali che si hanno nei calcari preesistenti e con caratteri simili. Ben differente è invece la cosa osservata da me nei giacimenti della Beaume, poichè assolutamente non è possibile paragonare queste rarissime scheggie di minerali con il modo di presentarsi dei minerali corrispondenti nei calcari, tanto per il loro aspetto quanto per la loro quantità, essendo nei calcari i detti minerali abbondantissimi e sempre in cristalli completi e ben determinati; nè può supporsi che la loro rarità e il loro aspetto nei giacimenti di solfato di calcio possa provenire da un fenomeno di alterazione poichè i detti frammenti sono sempre inalterati completamente ed anzi la clorite, che nei calcari è sempre sotto forma di aggregati pseudomorfi di glaucofane, è invece nei gessi sotto forma di frammenti di laminette che per il loro colore ricordano una clorite, che unitamente al rutilo (sotto forma di sagenite) trovasi in alcuni filoni che alla Beaume si hanno nella parete quarzitica (3). Credo piuttosto che la presenza di queste rare scheggie appartenenti a minerali contenuti in roccie adiacenti ai gessi sia da considerarsi come dipendente da un fenomeno di trasporto.

Una maggior analogia ho potuto invece constatare fra i

(1) Colomba, Op. cit.

(2) Spezia, Op. citata.

(3) Colomba, *Osservazioni mineralogiche su alcune sabbie della collina di Torino*, " Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino „, XXXI; 21 Giugno 1896.

gessi ed un calcare carbonioso che presso Savoulx è a contatto con i gessi, per ciò che riguarda alcuni dei minerali contenuti; però questo calcare sarebbe appunto uno di quelli che a parer mio debbono considerarsi come contemporanei al gesso ed alla anidrite.

I risultati delle mie ricerche mi condurrebbero piuttosto ad ammettere che i detti giacimenti siano bensì dovuti a fenomeni di metamorfismo, ma che questi fenomeni rappresentati da manifestazioni vulcaniche secondarie e specialmente da sorgenti solfuree o solfatiche, abbiano in generale agito contemporaneamente al depositarsi delle roccie calcaree determinando in tal modo la formazione del solfato calcico, senza escludere però che parzialmente anche in seguito al deposito delle roccie stesse il fenomeno di solfatazione abbia potuto continuare.

Riservandomi di discutere ampiamente tutte le ragioni che mi hanno condotto alle suesposte conclusioni quando saranno ultimate le ricerche da me iniziate, non credo inutile l'esporre i primi risultati delle mie osservazioni riguardanti alcuni minerali che si trovano nei giacimenti della Beaume; tanto più che per quanto mi consta, tali osservazioni per quanto riguarda giacimenti vicini a quelli da me studiati, sono piuttosto scarse, limitandosi a quelle compiute da A. Sella sui giacimenti del ghiacciaio di Gebroulaz in Savoja (1) ed a quelle compiute da Piolti sui gessi del Moncenisio (2).

Le specie mineralogiche da me notate sono le seguenti: *mica litiomagnesifera, tormalina, quarzo, calcedonia, gesso cristallizzato, pirite, solfo, dolomite, halite, ematite, anidrite, blenda.*

**Mica litiomagnesifera.** — È assai abbondante nella massa della roccia (3) allo stato diffuso ed allora si presenta in lami-

(1) A. Sella (op. cit.) accenna ai seguenti minerali: *sellaite, dolomite, magnesite, fluorite, solfo, quarzo* e *celestite;* accenna pure all'*albite*, ma non è detto se si trovi nel gesso oppure nella dolomite che è a contatto.

(2) Piolti (*Il piano del Moncenisio;* " Bollettino del Club Alpino ", vol. XXII, 55) trovò nei gessi del Moncenisio i seguenti minerali: *pirite, dolomite, gesso cristallizzato;* sembra mancare completamente il *solfo.*

(3) Oltre che nei giacimenti della Beaume trovai pure la detta mica nei gessi di Savoulx, di Thures e nel già citato calcare carbonioso che a Savoulx è in diretto contatto con l'anidrite ed il gesso.

nette microscopiche, completamente incolore, molto lucenti e vetrose; il contorno è generalmente esagonale; può anche essere rombico e spesso le laminette si sovrappongono le une alle altre dando luogo a dei prismi esagoni sulle cui faccie è sempre visibile la sfaldatura basale. La massima larghezza di queste lamine non supera mai un terzo od un quarto di millimetro.

Trovasi pure, ma più raramente inclusa od aderente ai romboedri di dolomite; nel primo caso è in laminette perfettamente simili a quelle sparse nella massa della roccia; nel secondo caso invece si presenta in laminette più grandi, dotate di lucentezza madreperlacea e spesso riunite in aggregati.

Quella che si trova sparsa nella roccia è ricchissima in inclusioni le quali mancano quasi completamente in quella che trovasi aderente ai romboedri di dolomite od inclusa in essi; le inclusioni sono costituite specialmente da minutissimi cristalli di tormalina, spesso visibili solo con forte ingrandimento, incolori, riconoscibili a causa del loro caratteristico emimorfismo; meno comuni sono delle inclusioni di zircone in esili individui ad abito fusiforme, giallognoli; spesso associata od inclusa nella mica appare anche la pirite in minutissimi cristalli. Questa mica osservata a nicols incrociati e collo stauroscopio si manifesta perfettamente uniassica. È difficilmente fusibile, si decompone difficilmente mediante acido solforico concentrato a caldo.

Avendo scelto un certo numero di queste laminette fra quelle mancanti o povere di inclusioni, le trattai con acido fluoridrico che le decompose rapidamente; avendo in seguito trattato i fluoruri così ottenuti con acqua bollente allo scopo di separare quelli alcalini, la soluzione che ottenni mi diede, alla analisi spettrale le linee del litio e del sodio; nei fluoruri insolubili potei, col solito trattamento con acido solforico, determinare la presenza dell'allumina, della magnesia e della calce.

Ho fatto di questa mica un'analisi quantitativa avendo cura, per quanto mi fu possibile, di scegliere del materiale relativamente puro, e stante la difficoltà di procurarmelo dovetti limitarmi ad eseguire l'analisi su una quantità assai piccola di sostanza (gr. 0,3889). Allo scopo di dosare contemporaneamente la silice e gli alcali disaggregai il minerale con carbonato di bario: ottenni i seguenti risultati:

| | | |
|---|---|---|
| $Si\,O_2$ | = | 42,40 |
| $Al_2\,O_3$ | = | 12,66 |
| $MgO$ | = | 20,10 |
| $CaO$ | = | 6,76 |
| $Li_2O$ | = | 5,21 |
| $K_2\,O$, $Na_2\,O$ | = | 4,68 |
| El. volatili | = | 6,82 |
| | | 98,63 |

Negli elementi volatili non ho potuto determinare la presenza dell'acido fluoridrico.

Dai dati di quest'analisi risulta come la mica della Beaume non si possa identificare con nessuna delle miche attualmente note poichè mentre si allontana da quelle litifere a causa delle rilevanti quantità di magnesia (che nelle miche litifere giunge, secondo le analisi riportate da Dana (1) appena ad un massimo di 0,97 %) ed a causa della sua uniassicità (essendo le miche litifere fortemente biassiche), per altra parte si allontana da quelle magnesiache per la grande quantità di litina (che raramente compare nelle magnesiache e sempre in minime traccie) ed anche per la scarsità della potassa, scarsità tanto maggiore in quanto che sebbene io mi sia limitato, in causa della esigua quantità di sostanza adoperata, a dosare complessivamente la soda e la potassa, tuttavia potei persuadermi che la quota di 4,68 % è prevalentemente costituita da soda.

Un altro elemento che compare in grande quantità nella mica della Beaume è la calce; tuttavia, sebbene sempre in ogni saggio abbia potuto constatare la presenza della calce, non escludo la possibilità che in parte quella ottenuta nell'analisi provenga da piccole quantità di solfato di calcio incluse od associate alle lamine impiegate per l'analisi. Ad ogni modo ammettendo anche, che tutta la calce da me trovata sia realmente contenuta nel minerale, non si potrebbe, a parer mio, riferire la mica della Beaume al gruppo della *Margarite* poichè differirebbe da esso per il comportamento ottico e per la presenza di rilevanti quantità di magnesia e di litina.

---

(1) Dana, *System of Mineralogy*, Ediz. 1892, p. 611.

Piuttosto, sebbene io creda che la composizione da me ottenuta solo debba considerarsi come approssimativa a causa dell'esigua quantità di sostanza adoperata ed anche in causa delle impurità non insignificanti in essa contenute, a parer mio sarebbe la mica della Beaume da considerarsi come una nuova varietà di mica magnesifera caratterizzata dalla presenza di notevoli quantità di litio e precisamente come una *biotite litifera.*

**Tormalina incolora.** — Si presenta in cristalli allungati, abbondantemente diffusi nella massa della roccia od inclusi nella mica litifera; più raramente, al pari della mica, trovasi od inclusa od aderente ai romboedri di dolomite nelle litoclasi; i cristalli diffusi nella massa sebbene un po' più grandi che non quelli inclusi nella mica, sono sempre microscopici ed i più lunghi raramente giungono ad una lunghezza di un quarto di millimetro essendo la massima parte di poco superiori ad un decimo di millimetro.

I cristalli sono sempre dotati di faccie lucentissime e lasciano vedere in modo completo il caratteristico emimorfismo essendo ad una estremità terminati da un solo romboedro ottusissimo e dall'altra da due romboedri, l'uno inverso e l'altro diretto.

È pressochè infusibile ed inattaccabile dall'acido fluoridrico ed infatti ho potuto in tal modo separare i cristallini che erano inclusi nella mica; è pure inattaccabile dall'acido solforico concentrato a caldo; fusa con carbonato sodico potassico dà la reazione del boro.

**Quarzo e calcedonia.** — Vario è il modo di presentarsi del quarzo; oltre a trovarsi in frammenti od in cristalli rotti o colle facce corrose dove la roccia assume un aspetto breccioide, appare in grande abbondanza sotto forma di minuti cristalli terminati alle due estremità, perfettamente incolori; questi cristalli presentano spesso una forma un po' tozza a causa del limitato sviluppo delle faccie $2\bar{1}\bar{1}$; oltre alle quali incontrasi spesso la 412; generalmente sono microscopici sebbene sempre abbiano dimensioni maggiori di quelli di tormalina; in alcuni rari casi ne trovai di quelli la cui lunghezza superava i due o tre millimetri, ma per lo più si mantengono inferiori al mezzo

millimetro, non mancandone di quelli visibili solo con un forte ingrandimento.

Sono pure abbondanti dei bastoncini, allungati, scanalati e distorti, simili a piccole stalattiti la cui lunghezza giunge raramente ad $^1/_4$ di millimetro; osservati a nicols incrociati lasciano vedere delle estinzioni ondulate; al cannello sono infusibili con imbianchimento; trattati con acido fluoridrico volatilizzano completamente, dal che si deduce che sono costituite da silice.

Io riferisco le dette concrezioni a *calcedonia* e non ad opale, sebbene il fatto di imbianchire in seguito a riscaldamento al cannello sia da vari autori, come il Dana (1) considerato come caratteristico dell'opale; ora da alcune mie osservazioni ho potuto concludere che un tale carattere è affatto insufficiente per distinguere l'opale dalla calcedonia. Infatti ho provato a scaldare al cannello un frammento di una piccola stalattite di calcedonia ed un frammento di opale; ambedue imbianchirono; avendo fatto in seguito una sezione sottile dei due frammenti notai che mentre quello di opale presentava una struttura omogenea, quello di calcedonia invece conservava ancora la sua struttura fibroraggiata e trasparenti si mantenevano ancora le fibre; solo fra di esse appariva come intercalata una sostanza bianca ed opaca. Ad analoghe conclusioni sono giunto sottoponendo allo stesso trattamento un altro frammento tolto da una lamina di calcedonia a struttura zonata; anche in questo caso ottenni un rapido imbianchimento e nello stesso tempo il frammento acquistò una notevole fragilità. Una sezione sottile mi lasciò pure vedere che, analogamente a quanto avevo osservato prima, frammezzo alle fibre che persistevano trasparenti, appariva un'intercalazione di sostanza bianca ed opaca costituita da opale, la quale spiega anche la presenza dell'acqua constatata in molte calcedonie.

Da queste osservazioni risulta come nella calcedonia esistendo tra fibra e fibra delle traccie di opale il carattere dell'imbianchimento non possa essere utile per la diagnosi della calcedonia e dell'opale.

Si è perciò che fondandomi specialmente sul carattere della

---

(1) Dana, *System of Mineralogy*, 1892, p. 190, 196.

birifrazione riferisco le piccole concrezioni silicee da me osservate, a calcedonia piuttosto che ad opale: tanto più che, a parer mio, questa determinazione sarebbe pure confermata da un altro fatto che ebbi occasione di notare nel già citato calcare carbonioso che presso Savoulx è a contatto con i giacimenti di gesso e di anidrite. Anche in questo calcare osservansi delle concrezioni silicee, allungate e contorte, e spesso simulanti quasi lo aspetto di un' elica, al punto che in principio aveva avuto il dubbio che fossero modelli di fossili, dubbio che non potè sussistere vista l'assoluta irregolarità di forma di queste concrezioni. Orbene queste concrezioni simili assai a quelle osservate nel gesso e nell'anidrite, ne differiscono per il fatto che sono completamente isotrope, il che indica come il fenomeno dell'estinzione ondulata presentata da quelle prima descritte, non debba considerarsi come dipendente dal modo di presentarsi, ma bensì da una vera differenza strutturale che secondo la mia opinione, può spiegarsi perfettamente ammettendo che le concrezioni isotrope dei calcari siano di opale e quelle birifrangenti del gesso siano di calcedonia.

**Gesso cristallizzato.** — È assai abbondante riempiendo, come già ho detto, quasi completamente le fenditure della roccia; si trova comunemente in grossi cristalli che possono anche raggiungere la lunghezza di due centimetri; questi cristalli sono generalmente tabulari, più raramente aciculari: sono spesso geminati e le uniche forme che determinai in esse sono 010, 110, 111; presentasi pure in aggregati fibrosi.

Questo gesso deve considerarsi di origine secondaria e come proveniente da acque le quali si siano arricchite in solfato di calcio filtrando attraverso alla roccia; infatti se esso derivasse da idratazione dell'anidrite non sarebbe facile lo spiegare perchè il modo di riempimento delle litoclasi non presenti nessuna differenza, per quanto riguarda l'aspetto del gesso, tanto dove le dette litoclasi attraversano il gesso, quanto nei punti in cui si internano nell'anidrite.

Sarebbe pure difficile lo spiegare come si siano formati dei cristalli così voluminosi per semplice idratazione e senza invocare dapprima un fenomeno di soluzione con successivo nuovo deposito; infatti da quanto ho detto nelle pagine precedenti

riguardo al modo in cui avviene l'idratazione dell'anidrite risulta che essa si compie perchè infiltrando l'acqua fra i granuli di anidrite e nell' interno delle sue linee di sfaldatura ne cambia le pareti in gesso, nè la roccia, a parte un aspetto meno vetroso e un po' più matto, differisce gran che, per i caratteri esterni, dall'anidrite inalterata.

L'origine secondaria di questo gesso e la sua provenienza da fenomeni di soluzione e deposito dovuti ad acque superficiali infiltranti, è pure confermato da un altro fatto ed è che in alcune litoclasi le pareti sono coperte di cristalli romboedrici di dolomite, i quali presentano dalla parte rivolta verso il vano delle litoclasi delle faccie lucenti, sebbene curve, dovute a romboedri ed al pinakoide; orbene i cristalli e gli aggregati fibrosi di gesso sono, nelle dette litoclasi, sempre impiantati sulle faccie lucenti dei romboedri di dolomite, indicando in tal modo la posteriorità del loro deposito.

**Pirite.** — Si presenta diffusa nella roccia sotto forma di minuti cristalli costituiti sempre da un pentagonododecaedro a cui si uniscono talvolta le faccie dell'ottaedro e quelle di un emiesacisottaedro; spesso presentasi pure in accentramenti di discreto volume e talvolta superficialmente alterati in limonite come pure sono spesso alterati i piccoli pentagonododecaedri.

In un solo caso trovai la pirite nelle litoclasi e precisamente in una fenditura dove unita a dolomite ed a quarzo si presentava abbondantissima sotto forma di minutissimi cristalli sciolti.

**Solfo.** — Trovasi sia sparso nella roccia, sia accentrato nelle litoclasi, sia come inclusione colla dolomite; quello sparso o è in minuti granuli od in piccolissimi cristalli ottaedrici allungati e quindi probabilmente corrispondenti al simbolo 111; nelle fenditure, dove non è mai abbondante, ho trovato alcuni cristalli di mole maggiore ma per lo più frantumati e schiacciati. In due frammenti provenienti da un grosso cristallo potei determinare le seguenti forme: 001, 110, 101, 103, 011, 111, 113, 115, 313, 315.

**Dolomite.** — Si presenta la dolomite sparsa nella roccia

sotto forma di grossi cristalli romboedrici, translucidi o quasi opachi, e localizzata in certe fenditure; i cristalli che sono sparsi nella roccia possono avere delle dimensioni molto grandi: uno da me osservato, costituito dal romboedro 100 e dal pinakoide, misurava alcuni centimetri di diametro. Nelle litoclasi la dolomite appare sotto forma di romboedri aggregati ed impiantati nella roccia e presentanti le estremità libere terminate da faccie di romboedri e dal pinakoide; non potei determinare i simboli dei detti romboedri in causa dello stato fisico delle faccie le quali sono spesso curve o striate.

Talvolta questi cristalli sono rotti ed i frammenti sono ricementati da gesso.

Degne di nota sono le inclusioni contenute in questa dolomite; talvolta è colorata in giallo poichè è ricchissima in solfo; in altri casi invece si presenta impregnata di idrogeno solforato il cui odore caratteristico si fa sentire quando si frantumano i cristalli.

In varie lamine sottili ottenute mediante ripetute sfaldature, potei constatare in essa una straordinaria quantità di piccole inclusioni liquide, associate ad altre, molto più rare, ripiene di solfo; queste inclusioni non sono disposte disordinatamente ma si trovano specialmente sui piani di sfaldatura dove appaiono in serie non interrotta.

In quelle più grandi sono visibili delle bolle quasi immobili e spesso si trovano nel loro interno dei piccoli cristalli cubici, isotropi, incolori che riferisco a cloruro sodico poichè sciogliendo la dolomite nell'acido nitrico ottenni marcatissima la reazione del cloro.

A parer mio queste inclusioni debbono pure contenere dell'acido solfidrico il quale appunto si metterebbe in libertà quando si rompe il minerale; e quelle contenenti solfo non sarebbero probabilmente che inclusioni inizialmente ripiene di idrogeno solforato il quale si sia in seguito decomposto. Non ho potuto finora stabilire se l'idrogeno solforato sia contenuto in tutte le inclusioni, se pure manchi in quelle che contengono i cristalli cubici; contro all'ipotesi di considerare nella detta dolomite due varietà di inclusioni, le une ripiene di idrogeno solforato e le altre di soluzione di cloruro sodico, sta però il fatto osservato da me, di inclusioni nelle quali ai cristalli cubici era associato il solfo.

In quanto alla dolomite solfifera credo che le inclusioni di solfo in essa contenute si possano spiegare in modo analogo a quanto ho detto per le inclusioni di solfo esistenti nella dolomite solfidrifera.

Si hanno, sebbene siano meno comuni, delle altre inclusioni in questa dolomite; notevoli sono fra queste dei cristallini prismatici, piccolissimi e con abito e comportamento trimetrico. Decomponendo la dolomite con acido cloridrico concentrato ho osservato che non rimangono completamente insolubili poichè nel residuo insolubile in acido cloridrico, rimangono sotto forma di cristalli un po' corrosi. Ne ho separato alcuni ed avendoli decomposti con carbonato sodico potassico, la soluzione in acido cloridrico diede, con ossalato ammonico, un precipitato bianco che ridisciolto in acido cloridrico mi diede all'analisi spettrale le linee dello stronzio; per il che ho conchiuso trattarsi di *celestite.* La loro massima lunghezza non raggiunge quasi mai il mezzo millimetro; appaiono costituiti da un prisma verticale, dai pinakoidi 100 e 010 e da alcuni prismi orizzontali; tutti questi prismi sono però indeterminabili.

Si hanno pure delle inclusioni non abbondanti formate da lamine di mica e da cristalli di tormalina.

Un'analisi di questa dolomite mi diede, dopo averla ridotta in polvere finissima e trattata con acqua bollente allo scopo di separare l'idrogeno solforato ed il cloruro sodico, i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} Mg\,CO_3 &= 42{,}75 \\ Ca\,CO_3 &= \underline{57{,}21} \\ & \phantom{=} 99{,}96 \end{aligned}$$

Da questi valori, a parte una leggiera eccedenza di calce, si ricava la formola

$$Mg\,CO_3 + Ca\,CO_3.$$

Per quanto riguarda l'origine di questa dolomite escludo che possa dipendere da fenomeni secondari. Infatti se si volesse ammettere che provenga semplicemente da depositi dovuti ad acque che passando attraverso ai calcari dolomitici superiori si siano arricchite in bicarbonato di calcio e di magnesia, non sa-

rebbe possibile lo spiegare le inclusioni di idrogeno solforato e di solfo.

Così pure credo non si possa ammettere che provenga da fenomeni parziali di riduzione secondo il noto processo col quale può in certe condizioni il solfato calcico ridursi in solfidrato. il quale a contatto con acque ricche in acido carbonico può dar luogo a sviluppo di idrogeno solforato ed a formazione di carbonato di calcio, poichè se in tal modo si potrebbero spiegare le inclusioni di acido solfidrico e di solfo, non sarebbe possibile stabilire la provenienza del carbonato di magnesia, tanto più che non è dimostrato che dal solfato di magnesio si possa mediante un analogo processo di riduzione ottenere del carbonato di magnesio.

D'altra parte dal fatto già da me indicato che la mica e la tormalina incolora possono trovarsi tanto incluse quanto sovrapposte ai romboedri di dolomite, si può dedurre con tutta probabilità che la dolomite sia contemporanea dei detti minerali e quindi non si possa riferire la sua origine a fenomeni secondari, ma bensì sia dovuta ad azioni chimiche compiutesi durante la formazione stessa dei depositi di solfato calcico, tanto più che non è possibile ammettere che la mica aderente ai romboedri di dolomite sia semplicemente della mica inizialmente diffusa nella massa della roccia ed in seguito accentrata nelle fenditure, essendo essa molto differente da quella diffusa poichè si presenta in aggregati di lamine anche di un discreto volume, cosa che non succede mai per quella diffusa nella roccia ed anche è molto più povera in inclusioni.

**Halite.** — Sembra essere assai rara allo stato di accentramenti localizzati nelle fenditure, poichè fin'ora la trovai in un solo caso sotto forma di masse incolore a sfaldatura nettamente cubica; occupava una fenditura nell'anidrite ed era associata a gesso cristallizzato i cui cristalli erano talvolta avviluppati dalla halite; sciogliendola in acqua lascia come residuo frammenti di gesso oltre a poca tormalina incolora ed a rare laminette di mica.

Credo però che la halite sia abbastanza diffusa nella roccia, poichè oltre a trovarla, come già ho accennato allo stato di inclusione nella dolomite, trattando alcuni frammenti di anidrite

e di gesso, ridotti in polvere finissima, con acqua distillata, questa mi diede in seguito, nettissima la reazione del cloro.

L'essere questa halite diffusa in tutta la roccia ed inclusa nella dolomite, ci permette di considerarla come originaria e non come dipendente da fenomeni secondari; ed il fatto d'averla trovata nelle fenditure in masse avvolgenti i cristalli certamente secondari di gesso, credo si possa spiegare semplicemente, ammettendo che si tratti del cloruro sodico associato a quelle porzioni di gesso o di anidrite che per soluzione e per successivo deposito diedero luogo alla formazione del gesso cristallizzato; il quale cloruro sodico, che naturalmente doveva restare sciolto contemporaneamente al solfato di calcio, se poteva, a causa della sua grande solubilità nella massima parte dei casi eliminarsi completamente, poteva pure in alcuni casi depositarsi nelle fenditure stesse e naturalmente il suo deposito, in tali casi, doveva essere posteriore a quello del gesso molto meno solubile.

**Ematite.** — È comunemente in laminette microscopiche, sottili, rosse a luce trasmessa e grigio-metalliche a luce riflessa; spesso è associata a pirite e non è raro il caso di osservare delle laminette di ematite inalterate che portano come incastrati dei piccoli cristallini di pirite, in parte o totalmente alterati in limonite. È pure, in alcuni punti, assai abbondante allo stato diffuso nella roccia che spesso presenta delle zone rossastre in cui l'ematite è intimamente legata al solfato di calcio.

**Anidrite.** — In alcuni punti la roccia appare costituita da un complesso di granuli vetrosi, trasparenti ed incolori che spesso presentano la forma di parallelepipedi; essi sono costituiti esclusivamente di anidrite pura, come lo indicano i saggi a cui sottoposi il minerale ed il loro comportamento ottico assolutamente trimetrico; le aree occupate da tali granuli sono però limitate ed in generale, come già ho accennato, anche nei punti in cui l'anidrite sostituisce il gesso questo non manca mai completamente.

Rarissima è l'anidrite in cristalli; potei solo entro a rare geodine contenute nell'anidrite cristallina, trovare alcuni piccoli cristalli allungati, con delle dimensioni che raramente giunge-

vano al millimetro; osservati al microscopio, risultavano costituiti dai tre pinakoidi 100, 010, 001 e da alcune faccie indeterminabili di prismi orizzontali e di ottaedri.

**Blenda.** — Alla blenda riferisco rari cristalli, di dimensioni assolutamente microscopiche, sparsi nella roccia; questi cristallini, infusibili, hanno una durezza molto piccola e si rompono secondo faccie brillanti di sfaldatura. Trattati con acido cloridrico si decompongono svolgendo dell'acido solfidrico. Il loro colore è d'un giallo un po' tendente al verdastro e sempre presentano l'aspetto di individui emiedrici a faccie inclinate.

Gabinetto di Mineralogia dell'Università di Torino,
10 Maggio 1898.

---

## Relazione sulla Memoria del Dott. Gino Fano intitolata: *I gruppi di Jonquières generalizzati.*

I sig.[i] Enriques e Fano si sono occupati in un comune lavoro (*) della determinazione di tutti i gruppi continui finiti di trasformazioni Cremoniane dello spazio: dimostrando che essi si posson tutti ridurre, mediante tali trasformazioni, a gruppi appartenenti a certe determinate classi. Ad alcuni di questi gruppi, cioè ai gruppi primitivi, il sig. Fano ha poi dedicato ulteriori ricerche, che furono accolte nei nostri Atti (**). Ora, in questa Memoria, egli si occupa degli altri; e più precisamente, di determinare i *tipi*, birazionalmente distinti, di gruppi imprimitivi: il che si riduce a trovare i tipi distinti di *gruppi di Jonquières generalizzati,* secondo la denominazione che Enriques e Fano hanno adottata per quei gruppi Cremoniani che trasformano in sè un fascio di piani, ovvero una stella di rette.

Il problema della riduzione a tipi presentava per tali gruppi maggior complicazione che per le altre classi di gruppi Cremo-

(*) “ Annali di Matematica „, ser. 2ª, t. 26 (1897).
(**) Adunanza del 27 febbraio 1898.

niani incontrate da quei due geometri. Per accorgersi di ciò basta vedere, nel riassunto che il sig. FANO fa dei risultati della sua Memoria, quanto numerosi e diversi fra loro siano i tipi che si ottengono. La loro ricerca viene coordinata e svolta, sia per mezzo di note proposizioni del LIE sui gruppi continui di trasformazioni; sia ricorrendo ad opportuni sistemi lineari di superficie, invarianti rispetto ai gruppi, e poi alle varietà iperspaziali a 3 dimensioni rappresentate da quei sistemi ed alle projezioni di tali varietà sullo spazio ordinario. Di tutti i tipi di gruppi si vengono così ad ottenere le proprietà geometriche caratteristiche, ed anche le equazioni che li rappresentano analiticamente.

Il lavoro è fatto con vero acume geometrico e con paziente cura; ed ha notevole importanza, poichè mediante esso rimane compiutamente risolta la questione di determinare tutti i tipi, distinti birazionalmente, di gruppi continui finiti Cremoniani. In conseguenza noi proponiamo che la Classe lo ammetta alla lettura ed alla stampa nei volumi accademici.

E. D'OVIDIO

C. SEGRE, *relatore.*

---

*L'Accademico Segretario*

ANDREA NACCARI.

# CLASSE

DI

# SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

## Adunanza del 22 Maggio 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Socii: Claretta, Direttore della Classe, Peyron, Rossi, Pezzi, Boselli, Cipolla, Brusa, Perrero, e Nani Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della precedente seduta, 24 scorso aprile.

Il Presidente offre in omaggio alla Classe, a nome dell'autore, dott. Luigi Roversi, un libro intitolato: *Luigi Palma di Cesnola e il Metropolitan Museum of Art di New York* (New York, 1898).

Il Segretario C. Nani presenta pure in omaggio alla Classe un opuscolo: *I recenti lutti della Società geografica italiana* (Roma, 1898), inviato dall'autore Socio corrispondente professore G. Dalla-Vedova.

Presenta pure un lavoro dal titolo: *Il passaggio di Annibale per le Alpi,* mandato alla Segreteria dell'Accademia dall'autore prof. Francesco P. Garofalo da Catania che ne desidererebbe la inserzione negli *Atti* dell'Accademia. Il Presidente,

a norma dell'art. 26 dello Statuto, nomina una Commissione composta dai Socii Claretta, Ferrero e Cipolla, perchè ne riferisca in altra adunanza alla Classe.

Il Socio Claretta continua la lettura della sua Memoria: *Sulle principali vicende della Cisterna d'Asti dal secolo XV al XVII.*

In questa parte il socio G. Claretta s'intrattiene sulla signoria del feudo della Cisterna, acquistata il 16 agosto dell'anno 1559 dal capitano Torquato Torto da Castelnuovo Scrivia. Egli prelude con brevi notizie sulla famiglia del Torto, uno di quegli avventurieri i quali a quei giorni servivano allo straniero che signoreggiava nelle nostre contrade. Ricorda peraltro i pregi di quella famiglia che noverò distinti giureconsulti che professarono leggi nell'università di Pavia. Essendo il capitano Torquato preposto dai Francesi al governo della Cisterna, ebbe mezzo di acquistare famigliarità con quei terrazzani ed affezionarsi a quei ridenti clivi, ed indursi a farne acquisto dai Della Rovere. Ma l'autore qui nota in qual ginepraio di contestazioni ebbe a mettersi il Torto, poichè avendone ricevuta investitura dalla Camera Apostolica, dovette sostenere urti colla Mensa Vescovile d'Asti e coi terrazzani della Cisterna stessa omai infastiditi di tutti quei repentini cangiamenti di signoria.

E mentre cominciava ad essergli contestata l'elezione del podestà, venivano a turbargli i sonni le pretese dell'omaggio voluto dal duca dai Cisternesi, allorchè nel 1559 venne egli reintegrato nel dominio de' suoi Stati. Alle quali molestie vogliono essere aggiunte le gravi contestazioni sorte tra Roma e la Mensa Vescovile d'Asti, in mezzo alle quali il Torto ebbe ad esperimentare molte delusioni, e pentirsi al certo dell'aver voluto divenire feudatario della Cisterna, costretto del resto a trasmettere ai suoi discendenti un patrimonio nient'altro che litigioso.

*L'Accademico Segretario*
Cesare Nani.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

# CLASSE

DI

# SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

## Adunanza del 29 Maggio 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ALFONSO COSSA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Bizzozero, Direttore della Classe, D'Ovidio, Spezia, Camerano, Segre, Volterra, Jadanza, Foà, Guidi, Fileti e Naccari Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Socio Cossa fa omaggio all'Accademia di una sua relazione stampata sul concorso al premio relativo alle sofisticazioni dei perfosfati, indetto dall'Associazione dei consorzi agrari di Piacenza.

Il Segretario presenta il terzo volume dell'opera: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* inviata dall' autore Maurizio Cantor, Socio corrispondente, in dono all'Accademia.

Il Socio Camerano legge anche a nome del Socio Gibelli la relazione sulla memoria del Prof. Edoardo Martel, intitolata: *Contributo all'anatomia dell'Hypecoum procumbens.* La relazione si chiude con la proposta che la memoria venga letta alla

Classe. Approvata questa proposta e compiuta la lettura, si accetta la memoria per l'inserzione nei volumi accademici.

Vengono poi accolti per l'inserzione negli *Atti* i seguenti scritti:

1° *Sul cannocchiale terrestre accorciato;* nota del Socio JADANZA,

2° *Funzioni olomorfe nel campo ellittico;* nota del Dr. Tito CAZZANIGA, presentata dal Socio VOLTERRA,

3° *Sopra una nuova specie d'Ichthyonema;* nota del Prof. Michele DEL LUPO, presentata dal Socio CAMERANO,

4° *Wattometro elettrostatico per correnti alternative ad alta tensione;* nota del Prof. Ing. Riccardo ARNÒ, presentata dal Socio NACCARI,

5° *Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Torino e per l'anno 1899*, calcolate dal Dr. V. BALBI,

6° *Osservazioni meteorologiche fatte nell'anno 1897* e calcolate dai Dottori V. BALBI e G. B. RIZZO.

Il Socio FOÀ presenta una memoria del Dott. Antonio CESARIS DEMEL, intitolata: *Sull'azione tossica e settica di alcuni microorganismi patogeni sul sistema nervoso centrale.* Sarà esaminata dai Soci FOÀ e BIZZOZERO.

Il Socio NACCARI presenta una memoria del Dr. G. B. RIZZO, intitolata: *Sopra le recenti misure della costante solare.* Sarà esaminata dai Soci VOLTERRA e NACCARI.

# LETTURE

## *Il cannocchiale terrestre accorciato;*

Nota del Socio NICODEMO JADANZA.

### I.

Una lente convergente M esposta ad un oggetto infinitamente lontano, dà di quell'oggetto una immagine reale $F^*_0Q$ (fig. 1[a]) situata nel 2° fuoco di essa lente e capovolta rispetto all'oggetto. Codesta immagine può essere raddrizzata da un'altra lente N senza alterarne le dimensioni, purchè questa sia situata in modo che la immagine $F^*_0Q$ data dalla prima lente M si trovi ad una distanza $F^*_0E_1$ eguale al doppio della sua distanza focale. In altri termini, se la immagine $F^*_0Q$ si trova nel *primo piano d'isometria inversa* (ovvero *primo piano antiprincipale*) $E_1$ della lente N, la immagine capovolta e della stessa grandezza della $F^*_0Q$ si troverà nel *secondo piano d'isometria inversa* (ovvero *secondo piano antiprincipale*) $E^*_1$ della stessa lente N. La distanza tra le due immagini $F^*_0Q$ ed $E^*_1Q^*$ è *quattro volte* la distanza focale $\varphi_1$ della lente N nella ipotesi che questa sia *infinitamente sottile*. Il sistema delle due lenti M,N può servire come obbiettivo di cannocchiale (terrestre), ed avrà la distanza focale eguale alla distanza focale $\varphi_0$ della lente M, però sarà negativa, vale a dire che il sistema M,N è divergente.

Ciò si può vedere dalle formole che dànno le ascisse dei punti cardinali e la distanza focale di un sistema composto di due lenti infinitamente sottili, che sono

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \\ &F = F_1 + \frac{\varphi^2_1}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \qquad F^* = F^*_2 - \frac{\varphi^2_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \\ &E = F + \varphi \qquad\qquad\qquad E^* = F^* - \varphi \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

In queste formole E, $E^*$, F, $F^*$, $\varphi$ sono le ascisse dei punti cardinali (due punti principali e due fuochi principali) e la distanza focale del sistema composto; $F_1$ ed $F^*_2$ sono le ascisse del primo fuoco della prima lente e del secondo fuoco della seconda lente; $\Delta$ è la distanza delle due lenti le cui distanze focali sono $\varphi_1$ e $\varphi_2$.

Applicando le (1) al caso della fig. 1ª in cui la prima lente ha la distanza focale $\varphi_0$ e la seconda $\varphi_1$ e $\Delta = \varphi_0 + 2\varphi_1$, si ottiene

$$\left.\begin{array}{ll} & \varphi = -\varphi_0 \\ F = F_0 - \dfrac{\varphi_0^2}{\varphi_1} & F^* = F^*_1 + \varphi_1 = E^*_{i_1} \\ E = F - \varphi_0 & E^* = F^* + \varphi_0 = E^*_{i_1} + \varphi_0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Il sistema delle due lenti M ed N è un sistema diottrico divergente, la cui distanza focale è, in valore assoluto, eguale a quella della prima lente M. Il secondo fuoco coincide col secondo punto *d'isometria inversa* della seconda lente.

I punti cardinali si succedono nell'ordine E, F, $F^*$, $E^*$ e sono fuori del sistema delle due lenti, i primi due dalla parte della prima lente, gli altri due dalla parte della seconda.

## II.

Volendo adoperare questo sistema di due lenti come obbiettivo di cannocchiale, il tubo in cui esso va rinchiuso deve avere la lunghezza

$$L = \varphi_0 + 4\varphi_1 = \varphi_0 + E^*_{i_1} - E_{i_1}$$

o semplicemente

$$L = \varphi_0 + \delta$$

dove $\delta$ indica il segmento che separa il primo punto d'isometria inversa della lente N dal secondo. Il cannocchiale astronomico avente per obbiettivo la semplice lente M avrebbe una lunghezza eguale a $\varphi_0$. (Qui intendiamo per lunghezza del can-

nocchiale la distanza compresa tra la faccia anteriore della prima lente che riceve la luce ed il luogo dove si forma la immagine dell'oggetto all'infinito, cioè il secondo fuoco.)

Il cannocchiale che dà la immagine diritta può essere più corto del cannocchiale astronomico avente il medesimo obbiettivo nel caso in cui $\delta$ sia una quantità negativa, vale a dire quando per apparecchio di raddrizzamento si adopera non una lente semplice, ma un sistema di due lenti avente i punti d'isometria inversa che si succedono nell'ordine $E^*_i$, $E_i$.

## III.

In un sistema di due lenti per cui valgono le (1), i punti d'isometria inversa sono dati dalle equazioni:

$$E_i = F - \varphi; \qquad E^*_i = F^* + \varphi$$

donde

$$E^*_i - E_i = F^* - F + 2\varphi = F^*_2 - F_1 - \frac{\varphi^2_2 + \varphi^2_1 - 2\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta};$$

e poichè si ha

$$F^*_2 - F_1 = \varphi_1 + \varphi_2 + \Delta$$

si ottiene

$$E^*_i - E_i = \frac{4\varphi_1\varphi_2 - \Delta^2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}. \tag{3}$$

Il segmento dato dalla (3) sarà negativo se si avrà

$$\Delta^2 > 4\varphi_1\varphi_2 \tag{4}$$

e si otterrà:

$$E_i - E^*_i = \frac{\Delta^2 - 4\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}. \tag{5}$$

## IV.

È molto conveniente che il sistema di raddrizzamento abbia la distanza focale equivalente a quella della prima lente, cioè a $\varphi_1$. In tal caso le (1), poichè dev'essere $\Delta = \varphi_1$, diventano:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = \varphi_1 \\ &F = F_1 + \frac{\varphi^2_1}{\varphi_2}\,; \qquad F^* = F^*_2 - \varphi_2 = E_2 \\ &E = F + \varphi_1\,; \qquad E^* = F^* - \varphi_1 = E_1 \\ &E_i = F - \varphi_1\,; \qquad E^*_i = F^* + \varphi_1 = E^*_{i_1} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Il sistema diottrico così composto avrà i punti $E^*$, $F^*$, $E^*_i$ fissi e coincidenti con quelli dello stesso nome della lente N. La posizione degli altri punti E, F, $E_i$ dipende dalla distanza focale $\varphi_2$ della seconda lente P.

Ponendo $\Delta = \varphi_1$ nella (5) si otterrà

$$E_i - E^*_i = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}(\varphi_1 - 4\varphi_2). \quad (7)$$

Dovendo essere $\varphi_1 > 4\varphi_2$, poniamo $\varphi_1 = n\varphi_2$ $(n > 4)$; la (7) diventerà

$$\begin{aligned} E_i - E^*_i &= n(n-4)\varphi_2 \\ &= (n-4)\varphi_1 \end{aligned}$$

e quindi la lunghezza del cannocchiale L, quando questo apparecchio di raddrizzamento si accoppia ad un obbiettivo di distanza focale $\varphi_0$, diventa

$$L = \varphi_0 - (n-4)\varphi_1 = \varphi_0 + 4\varphi_1 - n\varphi_1.$$

Dalle (6) si ha (vedi fig. 2ª)

$$\begin{aligned} F &= F_1 + n\varphi_1 = E_1 + (n-1)\varphi_1 \\ E_i &= E_1 + (n-2)\varphi_1\,. \end{aligned}$$

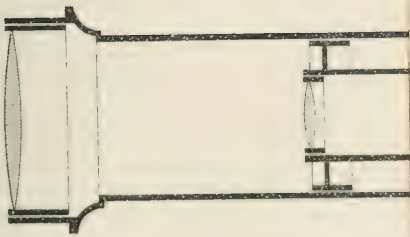
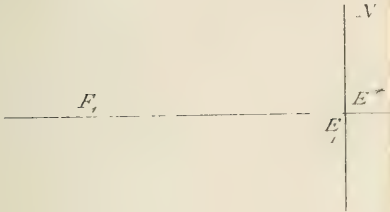
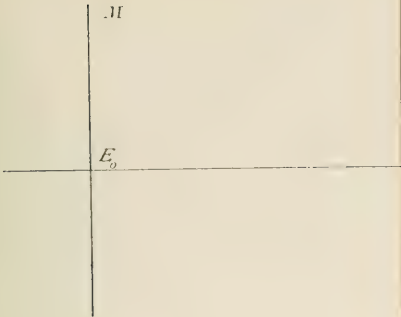
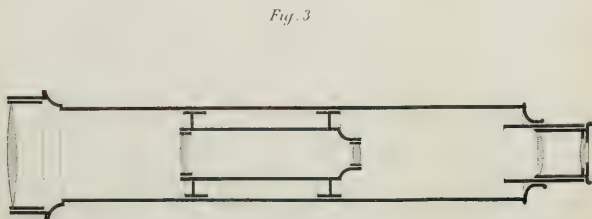
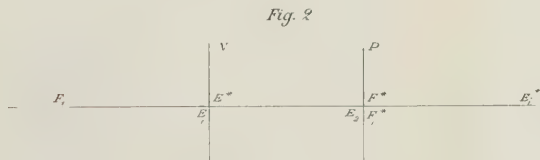
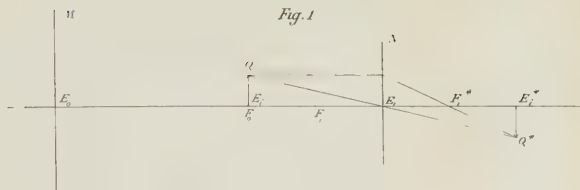
Ossia: *il punto dove deve cadere* (virtualmente) *la immagine data dall'obbiettivo si trova distante dalla prima lente dell'apparecchio di raddrizzamento di una quantità* $= (n-2)\varphi_1$.

La distanza focale $\varphi_0$ dell'obbiettivo dovrà essere maggiore di $(n-2)\varphi_1$.

M
$E_0$
N
$F_1$
E
$E_1$

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

## V.

Il cannocchiale terrestre accorciato sarà dunque composto di un obbiettivo M di distanza focale $\varphi_0$ piuttosto grande, di un apparecchio di raddrizzamento composto di due lenti N, P, le cui distanze focali sono $\varphi_1$ e $\varphi_2$ ($\varphi_1 > 4\varphi_2$), disposte in modo che la lente P si trovi nel secondo fuoco della lente N.

Il punto dove viene a formarsi la immagine, già capovolta, dell'oggetto che si guarda (supposto a distanza infinita) trovasi distante dalla lente N di una quantità eguale al doppio della sua distanza focale, cioè $2\varphi_1$.

L'oculare O può essere uno qualunque di quelli che si adoperano negli ordinarii cannocchiali astronomici.

La figura qui unita (fig. 3ª) rappresenta la sezione di un cannocchiale terrestre accorciato.

La lente M ha la distanza focale di centimetri 60; il sistema delle due lenti N, P è l'apparecchio di raddrizzamento, La lente N ha la distanza focale $\varphi_1 = 12$ centimetri, la lente P ha la distanza focale $\varphi_2 = 2$ centimetri.

Si avrà dunque:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Distanza tra la lente M e la lente | N = 12 | centimetri. |
| „ „ N „ | P = 12 | „ |
| Lunghezza del cannocchiale | L = 36 | „ |

## VI.

L'utilità di un cannocchiale accorciato si rende più manifesta, quando esso fa parte di un teodolite e si vogliono misurare delle distanze mediante un reticolo a fili fissi, o, come suol dirsi, ad angolo parallattico costante. In tal caso è utile conoscere la posizione del fuoco anteriore del sistema obbiettivo, che, nel nostro caso, è composto della lente M e dell' apparecchio di raddrizzamento.

Essa è data dalla formola:

$$F = F_0 - \frac{\varphi^2_0}{\varphi_1}$$

dove $F_0$ è l'ascissa del fuoco anteriore della lente M.

Se si indica con K il rapporto diastimometrico conveniente alla coppia di fili che si adopera e con S la parte della stadia compresa tra i fili del reticolo, la distanza D della stadia dalla lente obbiettiva del cannocchiale terrestre accorciato sarà data dalla equazione:

$$D = KS + \frac{\varphi^2_0}{\varphi_1} + \varphi_1 .$$

Nel caso di $\varphi_0 = 60$ cm., $\varphi_1 = 12$ cm. il fuoco anteriore del sistema obbiettivo dista dalla lente obbiettiva M di metri 3,60.

---

## *Funzioni olomorfe nel campo ellittico;*

Nota del Dottor TITO CAZZANIGA, in Göttingen.

La lettura di una Nota del Prof. Pascal pubblicata con lo stesso titolo della presente (" Rend. Acc. dei Lincei ", 1896) e della Memoria di Appell *Sulle funzioni uniformi di un punto analitico* $(x, y)$ (" Acta Math. ", T. 1), mi ha suggerito alcune semplici osservazioni che mi permetto di presentare a cotesta Accademia.

### I.

Comincio dal ricordare brevemente i risultati del professore Pascal.

1. — Egli pone il problema così:

" Data una $T_1$ ellittica ($p = 1$) costruire sopra di essa, funzioni trascendenti che abbiano infiniti punti zero in tutta la $T_1$,

o punti singolari soltanto nei punti all' infinito dei due piani sovrapposti „. In altri termini:

*Costruire sotto forma di prodotto infinito, una funzione dopp. periodica* $F(u)$, *di periodi* $2\omega, 2\omega'$, *tale che nell'interno del parallelogrammo fondamentale, ammetta un sol punto singolare essenziale* $u = a$, *ed infiniti punti zero:*

$$u_1, \; u_2, \; u_3, \; \ldots \; u_n, \; \ldots$$

*supposto che questi (ordinati in serie semplice) ammettano* $a$ *come unico punto limite.*

Per semplicità il Prof. Pascal suppone ancora: le $u_n$ zeri di 1° ordine e già ordinate in serie semplice, $a = 0$ coincidente con il centro del parall. fond. e:

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3,$$

la relazione onde la $T_1$ resta definita.

Allora valendosi del noto integrale ellittico di 2ª specie:

$$\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)},$$

egli costruisce la serie:

$$S(u) = \sum_n \left\{ \zeta(u - u_n) - \zeta(u) \right\} \left[ \frac{p(u)}{p(u_n)} \right]^k,$$

e dimostra che si può sempre scegliere $k$ (fisso o variabile) per modo che $S(u)$ in tutto il parall. fond., eccettuati i punti $u = 0$, $u_1, u_2 \ldots u_n \ldots$, converga in modo uniforme. Allora se:

$$P_k(u) = [p(u_n)]^{-k} \left\{ \frac{1}{2} p'(u) - \zeta(u_n) p(u) + \frac{1}{2} p'(u_n) + \zeta(u_n) p(u_n) \right\} \times$$

$$\times \left\{ p^{k-1}(u) + p^{k-2}(u) p(u_n) + \ldots + p^{k-1}(u_n) \right\},$$

si ha identicamente:

$$S(u) = \sum_n \left\{ \zeta(u - u_n) - \zeta(u) + P_k(u) \right\},$$

onde costruendo la funzione:

$$\frac{F'(u)}{F(u)} - S(u) = G(u),$$

la $G(u)$ risulta della stessa natura della $F(u)$.

Di qui col metodo ben noto il Prof. Pascal arriva alla espressione:

$$F(u) = Ce^{\int G(u)du} \prod_n \frac{\sigma(u-u_n)}{\sigma(u)} e^{\int P_k(u)du}, \tag{1}$$

dove C è una costante opportuna.

Definita poi una funzione $\Sigma(u)$ di cui i punti zero sono della forma: $u_{m,n} = 2(m\omega + n\omega')^{-1}$, (per $m, n$, non zero contemporaneamente, ed esclusi quei punti che non si trovano entro il parall. dei periodi), risulta subito:

$$\Sigma(u) = \prod_{m,n} \frac{\sigma(u-u_{mn})}{\sigma(u)} e^{Q_k(u)} \tag{2}$$

posto *per definizione*:

$$Ce^{\int G(u)du} = 1$$

e inoltre:

$$Q_k(u) = \int P_k(u)du = \frac{\zeta(u_{mn})}{p(u_{mn})} \zeta(u) +$$

$$+ \frac{1}{2p(u_{mn})} p(u) + \frac{\frac{1}{2}p'(u_{mn}) + \zeta(u_{mn})p(u_{mn})}{p(u_{mn})} u.$$

L'autore ha poi chiamato il numero $2k$, il *genere* della $F(u)$ (preso per $k$ il minimo intero che renda convergente la S) e la $\Sigma(u)$ si presenta quindi come una funzione di genere 2, olomorfa nel campo ellittico, e degenerante nell'ordinaria $u\sigma\left(\frac{1}{u}\right)$ per:

$$\omega = \omega' = \infty.$$

2. — Le formule ottenute dal Prof. Pascal risolvono il problema, ma non presentano doti salienti di simmetria. Inoltre

è facile persuadersi che esse dànno origine *solo a funzioni ellittiche di 2ª specie.*

Ciò lascia dubitare che l'artificio ingegnoso, usato per rendere convergente la S, non sia il più opportuno per toccare lo scopo. Difatti l'ordinaria teoria consiglia altrimenti. Si presenta più naturale cioè, di cercare se, deducendo da ogni termine:

$$\zeta(u-u_n)-\zeta(u)$$

una parte del suo sviluppo, si possa del pari rendere generalmente equiconvergente la S.

Ecco il procedimento che io vi sostituisco. Pongo:

$$\zeta(u)=\frac{d}{du}\lg\sigma(u)\;\therefore\;\zeta^{(r)}(u)=\frac{d^r}{du^r}\lg\sigma(u)\;(*)$$

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}+g(u)\;\therefore\;\zeta(u-u_n)=\frac{1}{u-u_n}+g(u-u_n),$$

dove la $g(u)$ con tutte le sue derivate si conserva, finita, continua e sviluppabile in serie per ogni punto del parallelogrammo fond. Ammetto inoltre le restrizioni del n° 1.

Allora costruisco la facile identità:

$$(3)\qquad \zeta(u-u_n)-\zeta(u)=-\frac{u_n}{1}\zeta^{(2)}(u)+\frac{u_n^2}{2!}\zeta^{(3)}(u)-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^m\frac{u_n^m}{m!}\zeta^{(m+1)}(u)+R^{(n)}_{m+1}(u)$$

essendo:

$$(4)\qquad R^{(n)}_{m+1}(u)=\frac{u_n^{m+1}}{u^{m+1}\left(1-\frac{u_n}{u}\right)}+(-1)^{m+1}\frac{u_n^{m+1}}{m+1!}g^{(m+1)}(u').$$

Ma qui è subito visto che dalla convergenza della serie

$$(5)\qquad \sum_n |u_n|^{m+1}$$

(*) È chiaro che qui si è posto $\zeta^{(1)}(u)=\zeta(u)$.

per $m$ fisso o variabile con $n$, segue la convergenza uniforme dell'altra:

$$\sum_n R_{m+1}^{(n)},$$

perchè quest'ultima si spezza in due serie, le quali separatamente convergono per ogni valore di $u$, diverso da $o$, ed $u_n$.

Possiamo quindi stabilire i soliti tre casi:

*a) La serie* $\sum_n |u_n|$ *converge.* Posto allora $m = 0$ nella (3) risulta tosto che anche la serie:

$$\sum \{ \zeta(u - u_n) - \zeta(u) \}$$

è equiconvergente. E seguendo il classico metodo di Weierstrass la $F(u)$ resta in tal caso definita dalla formula:

$$F(u) = C e^{\int G(u) du} \prod_n \frac{\sigma(u - u_n)}{\sigma(u)}, \tag{6'}$$

dove C è una costante e $G(u)$ una funzione dopp. periodica nel medesimo campo della $F(u)$. È da notarsi poi che la $F(u)$ così ottenuta è periodica di *1ª specie.* Volendo ottenere una funzione dopp. per. nel senso ordinario, si dovrà considerare la serie convergente:

$$\sum \{ \zeta(u - u_n) - \zeta(u) + u_n \zeta'(u) \}$$

per la quale si giunge alla formula cercata:

$$F(u) = C e^{\int G(u) du} \prod_n \frac{\sigma(u - u_n)}{\sigma(u)} e^{u_n \zeta(u)}. \tag{6}$$

*b) La serie* $\sum_n |u_n|^{m+1}$ *converge e la* $\sum_n |u_n|^m$ *diverge per* $m$ *intero e costante.* Posto:

$$P_m(u\, u_n) = \frac{u_u}{1} \zeta^{(2)}(u) - \frac{u_n^2}{2!} \zeta^{(3)}(u) + \dots + (-1)^{m-1} \frac{u_n^m}{m!} \zeta^{(m+1)}(u),$$

la serie:

$$\sum \{ \zeta(u - u_n) - \zeta(u) + P_m(u | u_n) \}$$

è pure equiconvergente. Segue per $F(u)$ la espressione:

$$(7) \qquad F(u) = C e^{\int G(u)du} \prod_n \frac{\sigma(u-n_n)}{\sigma(u)} \cdot e^{-\sum_1^m (-1)^r \frac{u_n{}^r}{r!} \zeta^{(r)}(u)}$$

*c) Se infine non si può determinare nessun intero m fisso per cui la serie* $\Sigma\, |u_n|^{m+1}$ *converga,* allora basterà assumere $m$ funzione di $n$ per modo che essendo $m'$ desunto dall'equazione:

$$|u_n^{m'}| = n^{1+\varepsilon},$$

(per $\epsilon$ positivo, piccolo ad arbitrio) sia:

$$m = E(m') + 1.$$

In tal caso basta sostituire nella (7) questa espressione di $m$ per avere la formula generale.

È da notarsi che nella (7) gli esponenti delle $e$ che si presentano sotto il segno di prodotto, sono lineari in $\zeta(u)$, $\zeta^{(2)}(u)$, ... $\zeta^m(u)$ e quindi si possono esprimere in modo razionale ed intero per $\zeta(u)$, $p(u)$, $p'(u)$.

Se inoltre poniamo:

$$r(u|u_n) = \frac{\sigma(u-u_n)}{\sigma(u)} e^{u_n \zeta(u)}$$

la formula generale (7) diventa:

$$(7') \qquad F(u) = C e^{\int G(u)du} \prod_n r(u|u_n) e^{\sum_2^m (-1)^r \frac{u^r{}_n}{r!} p^{(r-2)}(u)}$$

E poichè la $r(u|u_n)$ è una ben nota funzione dopp. per. (V. HALPHEN, *Fonct. ell.*, vol. I, p. 237) resta così posta in evidenza la doppia periodicità di $F(u)$. Non si può passare dalla (1) alla (7).

Per questo verso poi, la definizione generalizzata di *genere* si presenta evidente; meglio ancora possiam dire che essa rimane invariata:

*Se m è il più piccolo numero intero e fisso, tale che la serie* $\Sigma\, |u_n|^{m+1}$ *sia convergente, si dirà che la funzione* $F(u)$ *è di genere m.*

Se non esiste nessun numero $m$ fisso la funzione è di genere infinito.

E qui, seguendo un consiglio non mio (*), mi permetto far notare che, a scanso di equivoci, sarebbe utile mutare il nome di *genere* in quello di *altezza*, dappoi che il primo ha un significato ben preciso e fondamentale nella teoria delle funzioni algebriche, e in altri rami delle scienze matematiche.

Per lo innanzi mi atterrò a tale nomenclatura.

Da ultimo, a proposito della (7'), è appena da rilevarsi che facendo coincidere un numero finito di $u_n$, e sostituendo $a - u_n$, $a$, $- u_n$, si tolgono le restrizioni che gli zeri sieno semplici, e che il punto singolare cada nell'origine.

3. — Ora torna assai facile definire e costruire le più comuni trascendenti intere, generalizzate per il campo ellittico.

*a*) Seguendo l'esempio del Prof. Pascal definiamo la $\Sigma^{(1)}(u)$ come una funzione dopp. per. di $2^a$ *specie* olomorfa nel parall. fond., avente ivi nessun polo, un punto singolare essenziale in $u = 0$, e zeri semplici nei punti:

$$w_{m,n} = \frac{c}{2(m\omega + n\omega)},$$

dove $c$ è una costante scelta per modo, che tutti i punti $w_{m,n}$ cadono internamente al parall. dei periodi.

Poichè la serie doppia: $\Sigma' \,|w_{mn}|^3$ converge, e $\Sigma' \,|w_{mn}|^2$ diverge, la funzione ora definita è di *altezza due*. Ponendo in essa, per definizione:

$$s(u) = \frac{1}{\sigma(u)}\,; \quad \int G(u)\,du = \lg s(u)$$

risulta

$$\Sigma^{(1)}(u) = C\,s(u) \prod_{m,n} \frac{\sigma(u - w_{mn})}{\sigma(u)}\, e^{\frac{w_{mn}}{1}\zeta(u) + \frac{w^2_{mn}}{2!} p(u)}. \tag{8}$$

E questa pure si riduce a $C\sigma\left(\frac{1}{u}\right)$ per $\omega = \omega' = \infty$.

Analogamente si possono costruire le altre $\Sigma_i(u)$.

---

(*) Lessi tale consiglio nel Protocollo del Seminario matematico di Göttingen, 1896.

*b*) Definiamo ora con $\mathrm{sen}_1 u$ la funzione olomorfa (nel senso nostro), dispari, che si annulla in tutti i punti $u_n = \frac{c}{2m\pi}$, dove $c$ è scelto così che essi si trovino interni al parall. fond. Ora poichè la serie semplice $\sum_m \frac{1}{m^r}$ converge per $r = 2$ e diverge per $r = 1$ si ottiene per $\mathrm{sen}_1 u$ una funzione di *altezza 1*.

Posto allora come dianzi: $G(u) = \frac{s'(u)}{s(u)}$, applicando la (7) risulta:

$$\mathrm{sen}_1 u = C s(u) \prod_n \frac{\sigma(u - u_n)}{\sigma(u)} e^{\frac{u_n}{1} \zeta(u)} \tag{9}$$

$$n = 2m;\ m = -\infty \ldots + \infty.$$

Analogamente la funzione $\cos_1 u$ definita come funzione pari che si annulla nei punti $u'_n = \frac{c}{(2m+1)\pi}$ (dove la $c$ è opportuno prenderla uguale alla precedente) è espressa dalla formula:

$$\cos_1 u = C_1 \prod_m \frac{\sigma(u - u'_n)}{\sigma(u)} e^{\frac{u'_n}{1} \zeta(u)} \tag{10}$$

$$n = 2m + 1;\ m = -\infty \ldots + \infty$$

in cui si è supposto $G(u) = 0$.

Nelle due formule aggruppando opportunamente i termini si possono far scomparire gli esponenziali. Si arriva così alle espressioni

$$\mathrm{sen}_1 u = C s(u) \prod_n \frac{\sigma(u + u_n)\sigma(u - u_n)}{\sigma^2(u)} \qquad u_n = \frac{c}{2m\pi} \tag{9'}$$

$$\cos_1 u = C_1 \prod_n \frac{\sigma(u + u'_n)\sigma(u - u'_n)}{\sigma^2(u)} \qquad u'_n = \frac{c}{(2m+1)\pi}. \tag{10'}$$

$$n = 1, 2 \ldots \infty$$

Infine tenuto conto della relazione fondamentale:

$$\frac{\sigma(u + v)\,\sigma(u - v)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)} = p(v) - p(u)$$

le formule precedenti possono anche assumere la forma:

$$\mathrm{sen}_1 u = C s(u) \prod_n \{p(u_n) - p(u)\}\,\sigma(u_n) \tag{9''}$$

$$\cos_1 u = C_1 \prod_n \{p(u'_n) - p(u)\}\,\sigma(u'_n). \tag{10''}$$

Sarebbe interessante lo studiare il comportamento di queste funzioni, mediante le quali si possono costruire tutte le altre corrispondenti alla tang. cotag. ecc. dell'ordinaria trigonometria.

Stabiliamo un'ultima formula che ci sarà utile nell'esempio che segue. Si consideri una T', definita dall'equazione:

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g'_2 p(u) - g'_3;$$

dove:

$$g'_2 = (2\pi)^4 g_2, \; g'_3 = (2\pi)^6 g_3$$

essendo $g_2, g_3$ i moduli algebrici della T studiata finora. Poniamo per semplicità:

$$\sigma(u \mid g'_2 g'_3) = \bar{\sigma}(u)$$

$$\text{sen}_1(u \mid g'_2 g'_3) = \overline{\text{sen}}_1\, u.$$

$$(u, g'_2, g'_3) = \bar{s}(u).$$

Dalle note proprietà delle $\sigma$ risulta allora:

$$\bar{\sigma}\left(\frac{u}{2\pi}\right) = \sigma\left(\frac{u}{2\pi} \,\middle|\, (2\pi)^4 g_2 \,.\, (2\pi)^6 g_3\right) = \frac{1}{2\pi}\,\sigma(u),$$

e costruendo la $\text{sen}_1\left(\frac{u}{2\pi}\right)$ secondo la $(g')$ si ha pure:

$$\overline{\text{sen}}_1\left(\frac{u}{2\pi}\right) = C\,\bar{s}\left(\frac{u}{2\pi}\right)\prod_m \frac{\bar{\sigma}\left(\dfrac{u+\frac{c}{m}}{2\pi}\right)\bar{\sigma}\left(\dfrac{u-\frac{c}{m}}{2\pi}\right)}{\bar{\sigma}^2\left(\frac{u}{2\pi}\right)}$$

onde introducendo la $\sigma(u)$ in forza della relazione scritta or ora:

$$\frac{\overline{\text{sen}}_1\left(\frac{u}{2\pi}\right)}{\bar{s}\left(\frac{u}{2\pi}\right)} = C\prod_m \frac{\sigma\left(u+\frac{c}{m}\right)\sigma\left(u-\frac{c}{m}\right)}{\sigma^2(u)} \tag{11}$$

formula a cui si voleva giungere.

$c$) Generalizziamo la $\Gamma(x)$. Supponiamo cioè di voler costruire una funzione doppiamente periodica che diventi infinita di 1° ordine soltanto nei punti

$$0 \quad -c, \quad -\frac{c}{2}, \quad -\frac{c}{3}, \ldots \quad -\frac{c}{n} \ldots$$

dove $c$ è scelta come più indietro per modo che tutti questi

punti cadano internamente al parallelogrammo fondamentale. Sia $\Gamma_1(c+u)$ tale funzione ed $f(u)$ la sua inversa. Questa è una funzione di altezza 1 poichè la serie $\Sigma \frac{1}{n^r}$ converge per $r=2$ e diverge per $r=1$. La sua espressione sarà dunque della forma:

$$f(u) = C e^{\int G(u)du} \prod_n \frac{\sigma\left(u+\frac{c}{n}\right)}{\sigma(u)} e^{-\frac{c\zeta(u)}{n}}$$

onde posto:

$$\int G(u)du = A s(u)$$

si potrà stabilire:

$$\frac{1}{\Gamma_1(c+u)} = e^{As(u)} \prod_n \frac{\sigma\left(u+\frac{c}{n}\right)}{\sigma(u)} e^{-\frac{c\zeta(u)}{n}}. \tag{12}$$

Per il numero A si potrà scegliere la costante d'Eulero od altra opportunamente determinata.

Ora nella (12) scambiamo $u$ in $-u$ e facciamo il prodotto. Risulta:

$$\frac{1}{\Gamma_1(c+u)\Gamma_1(c-u)} = \prod_n \frac{\sigma\left(u+\frac{c}{n}\right)\sigma\left(u-\frac{c}{n}\right)}{\sigma^2(u)};$$

per cui supponendo di aver scelta la stessa costante $c$ come per $\mathrm{sen}_1 u$, in virtù della (11), questa si trasforma così:

$$\frac{1}{\Gamma_1(c+u)\Gamma_1(c-u)} = C_1 \frac{\overline{\mathrm{sen}}_1\left(\frac{u}{2\pi}\right)}{\overline{s}\left(\frac{u}{2\pi}\right)}. \tag{14}$$

Relazione affatto analoga all'ordinaria. Ma qui è da notarsi l'interessante risultato che mentre la $\Gamma_1$ nella formula precedente è definita sopra la $T_1$ di equazione:

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3$$

le due funzioni $\overline{\mathrm{sen}}_1\left(\frac{u}{2\pi}\right)$ e $\overline{s}\left(\frac{u}{2\pi}\right)$ sono definite sopra una $T'_1$ di equazione:

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - (2\pi)^4 g_2 p(u) - (2\pi)^6 g_3.$$

## II.

1. — Premettiamo alcune osservazioni. Seguendo i principii che ci hanno servito alla ricerca della formula (7) e usando opportunamente della trascendente $\zeta(u)$, si potrebbe ora trattare l'estensione al campo nostro, del teorema di Mittag-Leffler. Anzi un caso particolare del teorema è implicitamente stabilito nella dimostrazione del teorema di Weierstrass.

M. Appel, nella memoria citata, ha già risolto elegantemente il teorema dando l'espressione più generale decomposta nelle sue parti principali, di una funzione dopp. periodica, che nell'interno del parall. fond., possiede infiniti poli di qualunque ordine, ed un punto singolare essenziale. In essa è facilmente introducibile la trascendente $\zeta(u)$ al posto della $Z\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)$ d'Hermite. Ciò, dispensandomi da ulteriori considerazioni, mi consente di passare all'esposizione succinta di qualche teorema di cui i corrispondenti per le trascendenti intere sono dovuti a M. Guichard (“ Ann. École Nor. 1882 „).

2. — Sia $a_1, a_2, a_3 \dots a_n, \dots$ una serie di punti tutti interni al parall. fond. e tali che $\lim a_n = 0$. *È sempre possibile costruire una funzione olomorfa nel campo ellittico per modo che in questi punti assuma valori arbitrari* $b_1, b_2 \dots b_n \dots$

Si costruisca infatti una funzione $f(u)$ aventi per punti zero semplici i punti $a_n$; ed un'altra funzione meromorfa $\varphi(u)$ la quale ammetta gli stessi punti come poli semplici di residui $\frac{b_n}{f'(a_n)}$.

Allora la funzione:

$$G_1(u) = \varphi(u) f(u)$$

e più generalmente l'altra:

$$G(u) = G_1(u) + \lambda(u) f(u),$$

($\lambda(u)$ olomorfa pure nel campo ellittico) soddisfanno alle condizioni del problema.

È facile anche vedere, che si può sempre disporre della $\lambda(u)$, per modo che anche la derivata 1ª di $G(u)$ assuma in $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ valori arbitrari $c_1, c_2 \ldots c_n \ldots$

3. — Sieno date due funzioni $F(u)$, $F_1(u)$ olomorfe nel campo ellittico, prime fra loro, ed aventi lo stesso punto singolare essenziale $u=a$. *Si possono sempre determinare due funzioni $\lambda(u)$, $\mu(u)$ pure olomorfe e dopp. periodiche per modo che:*

$$F(u)+\lambda(u)\,F_1(u)=e^{\mu(u)}. \tag{15}$$

Sieno infatti $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ gli zeri, supposti semplici per comodità, della $F_1(u)$ e $b_1, b_2 \ldots b_n$ i valori che in essa prende la $F(u)$. Si costruisca allora una funzione $\mu(u)$, tale che in $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ prenda rispettivamente i valori $\lg b_1, \lg b_2, \ldots \lg b_n \ldots$ Allora la differenza

$$e^{\mu(u)} - F(u)$$

è una funzione olomorfa nel campo ellittico che ammette per punti zero i punti $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ e quindi contiene il prodotto:

$$\prod_n \frac{\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-a)}\, e^{P(u)}$$

identico a quello che entra a costituire la $F_1(u)$.

Dunque tale differenza divisa per $F_1(u)$ dà origine ad un'altra funzione olomorfa $\lambda(u)$, e la formula (15) è dimostrata.

Ponendo:

$$G_1(u)=e^{-\mu(u)}, \qquad G(u)=\lambda(u)e^{-\mu(u)},$$

la (15) può scriversi:

$$F(u)\,G_1(u)+F_1(u)\,G(u)=1. \tag{15'}$$

Relazione analoga a quella di Eulero per le funzioni razionali intere.

## III.

1. — Usciamo ora dalla stretta cerchia delle funzioni olomorfe nel campo ellittico. L'ordinaria teoria ci insegna che ogni funzione razionale di $p$ e $p'$ si può mettere sotto la forma:

$$f(u) = A \frac{\sigma(u-u_1)\sigma(u-u_2)\ldots\sigma(u-u_n)}{\sigma(u-v_1)\sigma(u-v_2)\ldots\sigma(u-v_n)}$$

dove la somma delle $u_n$ è uguale a quella delle $v_n$.

La decomposizione in fattori primari delle funzioni dopp. period. dà una generalizzazione di questa formula.

Infatti è evidente il teorema: *Ogni funzione meromorfa $f(u)$ nel 1° parall. ed avente un sol punto $a$ di singolarità essenziale, è il rapporto di due funzioni olomorfe, di cui l'una ha per zeri gli zeri della data, e l'altra ha per zeri gli infiniti, con gli stessi gradi di multeplicità.*

Se per semplicità si pone $a = 0$ e si considerano come semplici gli zeri $u_n$ ed i poli $v_n$ di $f(u)$, allora questa è espressa da:

$$f(u) = C e^{G(u)} \frac{\prod \frac{\sigma(u-u_n)}{\sigma(u)} e^{P_m(u\, u_n)}}{\prod \frac{\sigma(u-v_n)}{\sigma(u)} e^{Q_m(u|v_n)}}. \tag{14}$$

Sotto speciali condizioni il secondo membro si potrà anche porre sotto forma di un solo prodotto infinito.

2. — Ma è facile ottenere uno sviluppo in fattori primari per funzioni più generali.

Il Picard (" Com. Rend. ", 1881) ha studiato lo spezzamento in fattori di una funzione uniforme, la quale ammette infiniti punti zeri, opportunamente distribuiti nell'interno di un cerchio, e sulla circonferenza di questo, infiniti punti singolari distribuiti comunque.

Estendiamo tale studio ad una funzione dopp. periodica per la quale il cerchio di singolarità è interno al primo parall. dei periodi.

Si supponga in particolare questo cerchio di raggio $r$ concentrico all'origine; sia $f(u)$ la funzione da costruirsi, ed $a_n = \rho_n e^{i\alpha_n}$ i suoi punti zero (semplici), distribuiti così che:

$$|\rho_n - r| < |\rho_{n-1} - r|; \qquad \lim |r - \rho_n| = 0.$$

Si stabilisca quindi la serie di punti $b_n = re^{i\alpha_n}$ sul cerchio dato, onde si ha chiaramente:

$$\lim |a_n - b_n| = 0.$$

Posto ora:

$$\zeta(u - a_n) = \zeta \{(u - b_n) + (b_n - a_n)\}$$

risulta sviluppando:

$$\zeta(u - a_n) - \zeta(u - b_n) = \frac{b_n - a_n}{1} \zeta^{(2)}(u - b_n) + \ldots \tag{15}$$

$$\ldots + \frac{(b_n - a_n)^m}{m!} \zeta^{(m+1)}(u - b_n) + R^n_{m+1}(u)$$

dove:

$$R^{(n)}_{m+1}(u) = \frac{(b_n - a_n)^{m+1}}{m+1!} \zeta^{(m+2)}(u').$$

Onde dalla convergenza assoluta della serie:

$$\sum_n |b_n - a_n|^{m+1}$$

od anche della

$$\Sigma (a_n - r)^{m+1}$$

segue con facile osservazione l'equiconvergenza dell'altra:

$$\Sigma R^{(n)}_{m+1}(u),$$

ed anche della serie:

$$\sum \{\zeta(u - a_n) - \zeta(u - b_n) - P_m(u | a_n, b_n)\}.$$

se si pone:

$$P_m(u | a_n, b_n) = \frac{b_n - a_n}{1} \zeta^{(2)}(u - b_n) + \frac{(b_n - a_n)^2}{2!} \zeta^{(3)}(u - b) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(b_n - a_n)^m}{m!} \zeta^{(m+1)}(u - b_n).$$

Si distinguono dunque i tre casi:

*a)* *La serie* $\Sigma(a_n - r)$ *converge.* La funzione da costruirsi è della forma

$$f(u) = Ce^{G(u)} \prod_n \frac{\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_n)} \tag{15}$$

dove $G(u)$ è della stessa natura di $f(u)$ e C una costante opportuna.

Ma pure in questo caso si ottiene una funzione period. di 1ª specie. Per avere una funzione ordinaria dopp. periodica basta moltiplicare ogni termine del $\Pi$ per un fattore esponenziale. Si ha cioè:

$$f(u) = Ce^{G(u)} \prod \frac{\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_n)} e^{\frac{a_n - b_n}{1} \zeta(u-b_n)}.$$

*b)* *La serie* $\Sigma(a_n - r)^{m+1}$ *converge per m fisso* e diverge per ogni intero inferiore. La funzione $f(u)$ assume la forma:

$$f(u) = Ce^{G(u)} \prod \frac{\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_n)} e^{-\sum_1^m \frac{(b_n-a_n)^r}{r!} \zeta^{(r)}(u-b_n)} \tag{16}$$

dove C e $G(u)$ hanno il precedente significato.

*c)* *Non esiste un numero fisso intero m che renda convergente la serie* $\Sigma(a_n - r)^{m+1}$. La $f(u)$ assume ancora la forma (16) dove al posto della $m$ si ponga:

$$m = E(m') + 1,$$

soddisfacendo $m'$ la relazione:

$$|a_n - r|^{m'} = n^{1+\varepsilon},$$

per $\epsilon$ positivo e piccolo ad arbitrio ma finito e diverso da zero. Per $r = 0$ le formule precedenti si riducono a quelle già ottenute nel caso di un punto singolare essenziale coincidente con l'origine.

Anche qui la definizione di *altezza* della funzione si presenta in modo affatto naturale.

È da notarsi poi, come già fece M. Picard per le funzioni del piano di Gauss, che la scelta delle $b_n$ presenta un alto grado di arbitrarietà, e quella da noi fatta non è che un caso spe-

ciale. Per questo verso adunque si può giungere ad uno spezzamento affatto diverso.

Il teorema ora dimostrato, considerato nella sua generalità, insegna il modo di costruire una funzione che nel piano complesso presenti infiniti cerchi congrui, con infiniti punti singolari. Riserbo ad altra occasione lo studio dell'analogo teorema esteso alle funzioni $f(xy)$ definite sopra una riemanniana di genere arbitrario.

Göttingen, 16 marzo, 1898.

---

## *Sopra una nuova specie di Ichthyonema;*

Nota del Dott. MICHELE DEL LUPO.

Esaminando nel passato mese uno storione (*Acipenser sturio* L.), al quale erano stati asportati tutti gli organi contenuti nella cavità splancica, e che aveva già cominciato a subire la cottura in olio bollente, trovai che si svolgeva dal suo interno un nematode bianchiccio, lungo e grosso. Asportando il verme dall'ospite, osservai che aderiva col capo ad una cartilagine degli archi branchiali tanto tenacemente in un solco profondo di vecchia data, che fu necessario di rompere l'arco branchiale per distaccare il nematode, il quale si estendeva tra il peritoneo e la colonna vertebrale dell'ospite, ripiegandosi ad ansa nell'addome, e terminando con la coda immersa profondamente nel lobo superiore caudale dello storione. Questo misurava appena ventisei centimetri di lunghezza, dal musello alla estremità della pinna caudale, ed il nematode, che riconobbi subito come femmina, era lungo quarantatre centimetri, ed aveva un diametro pressochè eguale, dal capo alla coda, di circa tre millimetri.

Dall'esame minuto e scrupoloso del parassita, trovai che la testa del nematode è conica e a forma di ghiande per rigonfiamento del secondo anello cefalico (vedi figura 1), con tre lobi, uno sporgente e mucronato, gli altri due ravvicinati, separati dal maggiore per mezzo di una fenditura profonda, che si con-

tinua in una ripiegatura dei primi solchi tegumentarii. I lobi sono addossati all'orifizio boccale, che si apre profondamente tra essi, e che è circolare, ed è nascosto dai lobi meno sviluppati.

Tutti i solchi cutanei ad anelli, meno gli ultimi della coda, sono elegantemente striati secondo la lunghezza dell'animale, hanno pressapoco lo stesso diametro e la stessa larghezza, e verso i 38 centimetri dal capo si assottigliano in una coda di un millimetro di diametro, ad anelli appena striati e stretti, e che termina tronca, ondulata, con tre papille di cui una terminale è più estesa delle altre due (vedi figura 2).

A tre centimetri dalla estremità cefalica, e collocato lateralmente agli anelli (vedi figura 3), si trova un rigonfiamento conico, a larga base, con un foro circolare crateriforme, e che rappresenta l'apertura esterna dell'ovidutto, che si continua nella cavità addominale in un utero, il quale al pari degli intestini appare bianco, e indistinto rispetto agli anelli.

È notevole la resistenza e la tenacità del tegumento, che anche prima di essere immerso nell'alcool, era sufficientemente coriaceo.

Durante l'esame microscopico vennero emesse dall'apertura genitale una mezza dozzina di uova, sferiche, del diametro di mm. 0,03, bianchicce, spongiose alla superficie, e con vitello granuloso (vedi figura 4). Conservai queste uova incluse con acqua tra il portaoggetti ed il coprioggetti, e nel giorno seguente trovai due di esse schiuse in larve cilindriche, a capo arrotondato, a coda tozza e appena più sottile del capo, lunghe mm. 0,12 e larghe mm. 0,02, e con un canale digerente mediano, bruno, e che occupava i due terzi della lunghezza della larva (vedi figura 5).

Aiutato validamente nelle ricerche per la determinazione di questo parassita dai chiarissimi professori Corrado Parona dell'Università di Genova, e Lorenzo Camerano di questa Università, ai quali rendo i più vivi e sentiti ringraziamenti pel soccorso prestatomi, ho potuto stabilire che si tratta di una specie nuova di *Ichthyonema* (genere vicino alla *Filaria*), alla quale assegnerei il nome di *Ichthyonema acipenseris*, distinta dalle altre specie finora conosciute e parassite di pesci, dai seguenti caratteri specifici:

**Ichthyonema acipenseris.** Del Lupo. " Foemina. Entozoon " abdominale, albidum, corpus cylindratum, aequale, *pollices* " *quindecim longum* (cm. 43), *circiter lineam unam cum dimidio* " *latum* (mm. 3). Caput ovatum-glandulosum, trifidum, trilobum, " superiore lobo extensiore. Os orbiculare, parvum, lobis obstru- " sum. Cauda obtusa, papillis extensione variis praedita, capite " tenuior. Cutis tenax, anulata, in longitudinem striata. Intestina " et genitalia alba videntur: oviductus in vulvam tumescentem " non longe a capite desinit. Ab ovo, extrinsecus spongioso, so- " licite nascitur larva, caput rotundum, corpus cylindratum et " caudam obtusam praebens, et intestinum fuscum „ (*in abdomine piscis: Acipenser sturio*).

Dalla comparazione dei caratteri di questa specie con quelli delle altre specie del genere *Ichthyonema*, anteriormente descritte, e finora conosciute parassite nei pesci, sono indotto a considerare la forma in discorso come nuova.

Infatti di nematodi parassiti di pesci e descritti col nome di *Filaria* prima, e dopo il Diesing col nome di *Ichthyonema*, sono note e ricordate dal Rudolphi (*Synopsis Entozoorum*, Paris 1810), dal Dujardin (*Histoire Naturelle des Helminthes*, Paris 1845), dal Diesing (*Systema Helminthum*, Windobonnae 1851) e da altri illustri elmintologi l'*Ichthyonema sanguineum*, l'*I. fuscum*, l'*I. ovatum* e l'*I. globiceps*, ed io credo di ricordare brevemente quanto si conosce intorno alle specie predette e finora note, per giustificare la creazione di una nuova specie.

**Ichthyonema sanguineum.** Dies. (*Filaria sanguinea* Rud.). parassita della pinna caudale del *Carassius Gibelio* e dell'addome del *Leuciscus rutilus*, fu prima descritta dal Rudolphi: ibid., poi ricordata dal Dujardin: ibid., illustrata dal Linstow (*Ueber Ichthyonema sanguineum*, " Archiv für Naturg. „, 1874) e così caratterizzata dal Diesing (ibid., vol. II, pag. 284): " Corpus " foeminae crassiusculum, utrinque obtusum, sanguineo rubrum. " Vivipara. Longt. ad 1 $^1/_2$'' „ (mm. 40).

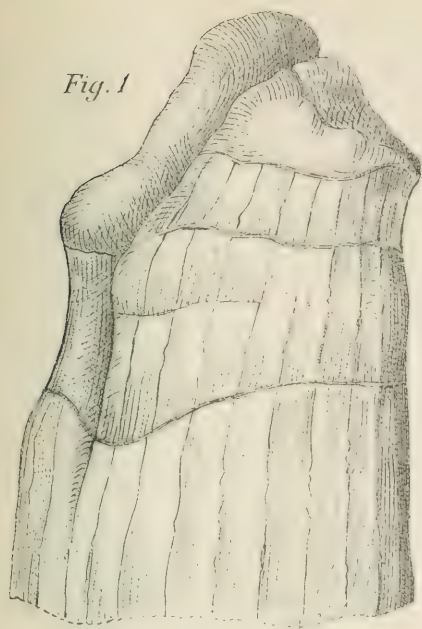
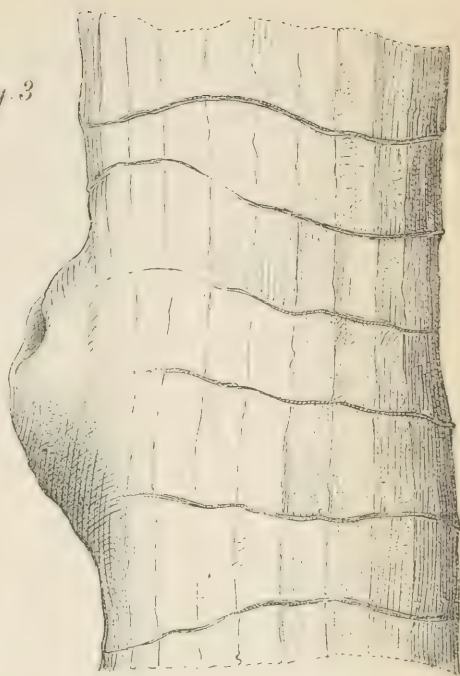
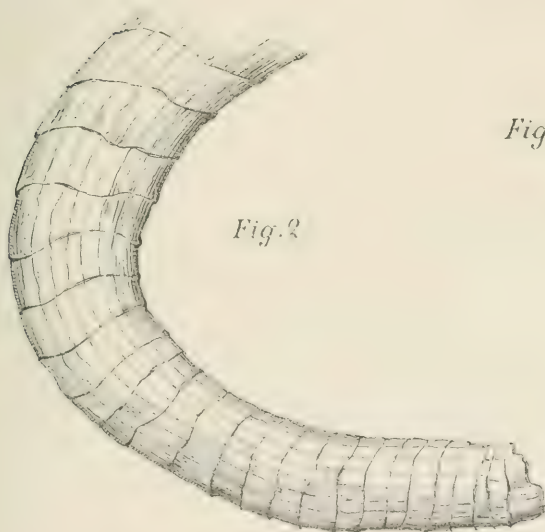
**Ichthyonema fuscum.** Dies. (*Filaria fusca* Rud.), parassita e libera nell'addome del *Pleuronectes maneus*, e descritta dal Rudolphi, ibid., dal Dujardin, ibid. e dal Diesing (ibid., a pag. 285

del vol. II): “ Corpus foeminae crassiusculum, utrinque obtusum, “ fuscum. Vivipara. Longt. 2 a 4″ „ (mm. 54 a 108).

**Ichthyonema ovatum**. Lins. (*Filaria ovata* Rud.), parassita nell'addome e nel fegato del *Cyprinus gobio,* del *C. phoxinus* e di altri ciprini, descritta dal Rudolphi, ibid., studiata più recentemente da Linstow (“ Natur. w. Iacheshefte „, pag. 333-34, Württemberg 1879) e così caratterizzata dal Dujardin (ibid., pag. 961): “ Corps blanc; long de 81 à 108$^{mm}$, aminci en avant, “ tête ovoïde (suivant Goeze), queue arrondie? (échancrée suivant “ Rudolphi); téguments promptement rompus par l'action de “ l'eau „; e finalmente:

**Ichthyonema globiceps**. Van Ben: (*Filaria globiceps* Rud.), parassita dell'*Uranoscopus scaber* e così descritta dal Rudolphi (ibid., pag. 215): “ Entozoa albida vel fusca, pollicem ad unum “ cum dimidium pollicem longa (mm. 41), tenuia. Caput rotun- “ datum. Os orbiculare, parvum, interdum valvulis quasi instru- “ ctum, alias papillatum visum, aut caput obtusocostatum exhi- “ bitum. Corpus aequale. Cauda depressa, obtusissima, vix ca- “ pite tenuior. Cutis tenera, qua facillime disrupta interanea “ prolabuntur. Intestinum fuscum seu nigrescens, vasis minus “ fascis reticulatum, collapsum granulatum videtur. Oviductus “ vacuos tantum vidi albos. Genitalia externa in conspectum “ non venerunt „. Questa specie descritta dal Diesing (ibid., pag. 285) fu nel 1870 studiata e descritta dal D$^{r}$ Willemoes-Suhm (XXI band, pagg. 190-202 e tav. XIII del “ Zeitschrift für wissenchaftliche Zoologie „, Siebold-Köllicher. Leipzig 1871) e ricordata come vivipara con embrioni i quali hanno una coda filiforme.

Ho eseguito altre ricerche sullo storione che ospitava l'*Ichthyonema* innanzi descritto, e sono riuscite negative. L'esemplare tipico della specie sopra descritta si conserva nel Museo Zoologico della R. Università di Torino.

Torino, 22 Maggio 1898.

regione cefalica - ingr 25 d. 2 regione caudale - ingr 25 d. 3 apertura genitale = ingr 25 d. 4 uova = ingr: 240 d. _ 5. larva = ingr: 240 diametri

# *Wattometro elettrostatico per correnti alternative ad alta tensione;*

Nota di RICCARDO ARNO'.

Steinmetz, sperimentando sopra un condensatore a carta paraffinata, inserito nel circuito di una forza elettromotrice alternativa, e misurando l'energia $w$ trasformata in calore nel coibente di quel condensatore in funzione della differenza di potenziale alternativa efficace v fra le armature del medesimo, trovò $w$ proporzionale al quadrato di v (1), ossia

$$w = h\mathrm{v}^2,$$

ove $h$ è una costante.

D'altra parte, il fenomeno, da me posto in evidenza, della rotazione di un cilindro dielettrico in un campo elettrico rotante (2), mi ha servito di base per alcune ricerche, le quali mi condussero a stabilire che la relazione tra l'energia dissipata W in un cilindro di carta paraffinata e l'induzione elettrostatica B in un punto del campo stesso, è, detta H una costante, della forma

$$W = HB^x,$$

ove i valori dell'esponente $x$ variano fra numeri prossimi ad 1,5 e 2, col variare dei limiti di B, fra cui si sperimenta: la proporzionalità di W al quadrato di B potendo essere ammessa con approssimazione tanto maggiore quanto più sono grandi i valori entro cui varia l'induzione elettrostatica (3).

(1) " Elektrotechnische Zeitschrift „, 29 aprile 1892: *Dielektrische Hysteresis, der Energieverlust in dielektrischen Medien unter dem Einfluss eines wechselnden elektrostatischen Feldes.*

(2) " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei „; fascicolo del 16 ottobre 1892; *Campo elettrico rotante e rotazioni dovute all'isteresi elettrostatica.*

(3) " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei „, fascicoli del 30 aprile e 12 novembre 1893, 18 marzo, 17 giugno e 18 novembre 1894.

Secondo Steinmetz esisterebbero nei corpi dielettrici due cause differenti di dissipazione di energia, e queste sarebbero un'isteresi dielettrica statica *(static dielectric hysteresis)* ed una isteresi dielettrica viscosa *(viscous dielectric hysteresis)* (1), corrispondenti, nei corpi magnetici, la prima all'isteresi magnetica e la seconda alle correnti di Foucault (2).

Così essendo, e variando l'isteresi dielettrica viscosa col quadrato dell' induzione elettrostatica, precisamente come la dissipazione di energia per correnti di Foucault nei corpi magnetici, mentre l'isteresi dielettrica statica segue la legge dell' isteresi magnetica, gli effetti di questa, per grandi valori dell' induzione elettrostatica, dovranno essere completamente dissimulati dagli effetti dell'isteresi viscosa, della quale soltanto si potrà allora prendere a considerare l'esistenza.

Ciò ammesso, è facile vedere come un apparecchio analogo a quello in cui si utilizza il principio della rotazione di un cilindro dielettrico in un campo elettrico rotante per lo studio della legge della dissipazione di energia nei dielettrici sotto l'azione di campi elettrici di grande intensità (3), possa servire come wattometro elettrostatico per correnti alternative ad alta tensione.

Detta, infatti, W l'energia che, in causa della rotazione del campo, si dissipa nel cilindro dielettrico, si scrive

$$W = k\delta,$$

ove $k$ è una costante e $\delta$ la deviazione dell'equipaggio mobile.

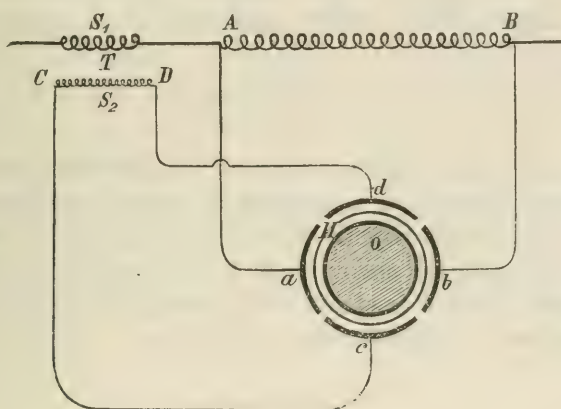
---

(1) Ulteriori mie ricerche (" Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", fascicolo del 12 aprile 1896) unitamente alle esperienze di Northrup (" Philosophical Magazine ", gennaio 1895), di Janet (" Comptes Rendus ", 20 febbraio 1893), di Porter e Morris (" Proceedings of the Royal Society ", vol. 57), e di Eisler (" Zeitschrift für Elektrotechnik ", 15 giugno 1895), concorrono a dimostrare che alla isteresi dielettrica viscosa è dovuta, almeno in parte, la dissipazione di energia nei dielettrici sottoposti all'azione di campi elettrici rotanti od alternativi.

(2) " The Electrical World; 26 agosto 1893, p. 144: *Electromagnetic and Electrostatic Hysteresis. — Theory and Calculation of alternating Current Phenomena* (Steinmetz), 1897, p. 144.

(3) " Rendiconti della R. Accad. dei Lincei ", fasc. del 18 marzo 1894: *Esperienze con un sistema di condensatori a coibente mobile.*

Ma, d' altra parte, ammessa l' ipotesi di Steinmetz e supposto di sperimentare con campi elettrici di notevole intensità — come si ottengono facendo grande la differenza di potenziale alternativa efficace V fra le lastre metalliche *a* e *b*, *c* e *d*, entro cui si vuole generare il campo rotante, e collocando, nell' in-

terno del cilindro dielettrico H, un cilindro metallico O, come è indicato in figura — si può scrivere, essendo la differenza di potenziale V proporzionale all'induzione elettrostatica B:

$$W = k'V^2,$$

ove $k'$ è una costante. Onde si ricava

$$V^2 = \frac{k}{k'}\,\delta,$$

ossia, indicando con K un'altra costante,

$$V^2 = K\delta.$$

Le considerazioni ora fatte si riferiscono al caso in cui il campo elettrico rotante col quale si sperimenta abbia un'intensità costante ed una direzione rotante con velocità uniforme: e ciò perchè si sono implicitamente supposti uguali i valori

efficaci delle differenze di potenziali alternative sinusoidali fra le lastre *a* e *b*, *c* e *d*, ed uguale a 90° il valore angolare della loro differenza di fase. Nel caso generale, che in modo speciale ora ci interessa di considerare, ove i valori efficaci di quelle differenze di potenziali sono diversi e rispettivamente uguali a $V_1$ e $V_2$, ed in cui il valore angolare dello spostamento di fase fra $V_1$ e $V_2$ ha un valore qualunque $\varphi$, si dovrà invece scrivere (1):

$$V_1 V_2 \operatorname{sen} \varphi = K\delta.$$

Ciò posto, si prenda a considerare un circuito percorso da una corrente alternativa sinusoidale di intensità efficace I, del quale AB sia il tratto rispetto a cui si vuole misurare l'energia W fornita dalla corrente nell'unità di tempo: sia $V_1$ la differenza di potenziale efficace esistente fra le estremità di AB, ed $\omega$ il valore angolare della differenza di fase fra $V_1$ ed I. Si ha

$$W = V_1 I \cos \omega.$$

Si inserisca ora in serie con AB la spirale primaria $S_1$ di un trasformatore T avente un grande rapporto di trasformazione, per modo che fra le estremità C e D della spirale secondaria $S_2$ del trasformatore stesso si abbia a produrre una differenza di potenziale $V_2$ di grande valore efficace, dell'ordine di grandezza, cioè, di quello della differenza di potenziale $V_1$ fra le estremità di AB. E si ponga quindi una delle due coppie, per esempio la *ab*, di lastre metalliche incrociate dell'apparecchio a campo elettrico rotante, in comunicazione coi due punti A e B, e l'altra coppia *cd* in comunicazione con le due estremità C e D della spirale secondaria $S_2$ del trasformatore T.

---

(1) La relazione è analoga a quella che si scrive per un apparecchio di induzione a campo Ferraris. Dette, infatti, $I_1$ e $I_2$ le intensità efficaci delle due correnti alternative sinusoidali, che rispettivamente percorrono le due spirali induttrici dell'apparecchio, e $\psi$ il valore angolare della differenza di fase fra le dette correnti, si ha

$$I_1 I_2 \operatorname{sen} \psi = C\alpha,$$

ove C è una costante ed $\alpha$ la deviazione che subisce la spirale indotta sotto l'azione del campo Ferraris generato dalle correnti date.

Detto allora $\varphi$ il valore angolare della differenza di fase fra le due differenze di potenziali $V_1$ e $V_2$ rispettivamente esistenti fra le estremità di AB e di CD, si scrive, per quanto più sopra è stato detto,

$$K\delta = V_1 V_2 \operatorname{sen} \varphi.$$

Ma essendo il trasformatore T a circuito secondario aperto, si ha, fatta astrazione dei fenomeni di isteresi e correnti di Foucault nel nucleo del trasformatore, che $V_2$ è proporzionale ad I e che fra $V_2$ ed I esiste uno spostamento di fase di valore angolare uguale a 90°. Si potrà quindi scrivere

$$V_1 V_2 \operatorname{sen} \varphi = K' V_1 I \operatorname{sen} (90^\circ - \omega) = K' V_1 I \cos \omega,$$

ove $K'$ è una costante. Onde, detta A un'altra costante, si ha ancora

$$\delta = \frac{K'}{K} V_1 I \cos \omega = AW.$$

Sperimentando nelle condizioni dette, la lettura $\delta$ fatta sull'apparecchio a campo elettrico rotante risulta dunque proporzionale all'energia W che, per effetto della corrente nel circuito di AB, si dissipa in AB nell'unità di tempo. L'apparecchio può quindi servire come wattometro elettrostatico per correnti alternative ad alta tensione.

# EFFEMERIDI

## del Sole e della Luna per l'orizzonte di Torino e per l'anno 1899

calcolate dal Dott. VITTORIO BALBI
Assistente all'Osservatorio della R. Università.

## PRINCIPALI ARTICOLI DEL CALENDARIO
PER L'ANNO COMUNE 1899.

*Relazioni cronologiche.*

L'anno 1899 del calendario gregoriano stabilito nell'ottobre 1582. comincia Domenica 1° Gennaio e corrisponde all'anno:

6612 del periodo Giuliano;

2675 delle olimpiadi (III anno della 669ª olimpiade), il quale comincia nel Luglio 1899, fissando l'êra delle olimpiadi 775 $^1/_2$ anni avanti Cristo, o verso il 1° Luglio dell'anno 3988 del periodo giuliano;

2652 della fondazione di Roma, secondo Varrone, fissata alla primavera dell'anno 3961 del periodo giuliano, che è l'anno 753 avanti Cristo;

2646 dell'êra di Nabonassar, fissata al Mercoledì 26 Febbraio dell'anno 3967 del periodo giuliano, che è l'anno 747 avanti Cristo secondo i cronologisti, e 746 secondo gli astronomi;

1899 del calendario giuliano o russo, comincia 12 giorni più tardi dell'anno gregoriano, cioè al Venerdì 13 Gennaio;

107 del calendario repubblicano francese, comincia il Venerdì 23 settembre 1898 e l'anno 108 comincia il Sabato 23 settembre 1899;

1316 dell'Egira (êra maomettana), comincia Domenica 22 Maggio 1898, e l'anno 1317 comincia Venerdì 12 maggio 1899, secondo l'uso di Costantinopoli;

35 del 76° Ciclo del Calendario chinese, comincia Sabato 22 Gennaio 1898, e l'anno 36 comincia il Venerdì 10 Febbraio 1899.

*Nota.* — Queste effemeridi furono calcolate mediante le " Istruzioni e Tavole numeriche per la compilazione del Calendario „ del Dr. Raina. Milano, Hoepli, 1887.

*Computo Ecclesiastico.*

| | |
|---|---|
| Numero d'Oro . . . . . . . . . . . | 19 |
| Epatta . . . . . . . . . . . . . | 18 |
| Ciclo Solare . . . . . . . . . . . | 4 |
| Indizione Romana . . . . . . . . . | 12 |
| Lettera Domenicale . . . . . . . . | A |
| Lettera del Martirologio . . . . . . | t |

*Feste Mobili.*

| | |
|---|---|
| Settuagesima . . . . . . | 29 Gennaio |
| Le Ceneri . . . . . . . | 15 Febbraio |
| Pasqua di Risurrezione . . | 2 Aprile |
| Rogazioni . . . . . . . | 8, 9 e 10 Maggio |
| Ascensione . . . . . . . | 11 Maggio |
| Pentecoste . . . . . . . | 21 Maggio |
| SS. Trinità . . . . . . . | 28 Maggio |
| Corpus Domini . . . . . | 1° Giugno |
| 1ª Domenica dell'Avvento . | 3 Dicembre |

*Quattro Tempora.*

| | |
|---|---|
| Di primavera . . . | 22, 24 e 25 Febbraio |
| D'estate . . . . . . | 24, 26 e 27 Maggio |
| D'autunno . . . . | 20, 22 e 23 Settembre |
| D'inverno . . . . | 20, 22 e 23 Dicembre |

*Principio delle Quattro Stagioni.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Primavera . . . | 20 Marzo | ore 20, | min. 46 |
| Estate . . . . | 21 Giugno | „ 16 | „ 45 |
| Autunno . . . | 23 Settembre | „ 7 | „ 30 |
| Inverno . . . . | 22 Dicembre | „ 1 | „ 56. |

*Novilunii e Plenilunii secondo l'uso ecclesiastico.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *L. N.* . . | 13 Gennaio | *L. N.* . . | 13 Marzo |
| *L. P.* . . | 26 „ | *L. P.* . . | 26 „ |
| *L. N.* . . | 11 Febbraio | *L. N.* . . | 11 Aprile |
| *L. P.* . . | 24 „ | *L. P.* . . | 24 „ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *L. N.* . . . | 11 | Maggio | *L. N.* . | 6 | Settembre |
| *L. P.* . . . | 24 | " | *L. P.* . | 19 | " |
| *L. N.* . . . | 9 | Giugno | *L. N.* . | 5 | Ottobre |
| *L. P.* . . . | 22 | " | *L. P.* . | 18 | " |
| *L. N.* . . . | 9 | Luglio | *L. N.* . | 4 | Novembre |
| *L. P.* . . . | 22 | " | *L. P.* . | 17 | " |
| *L. N.* . . . | 7 | Agosto | *L. N.* . | 3 | Dicembre |
| *L. P.* . . . | 20 | " | *L. P.* . | 16 | " |

Secondo l'uso ecclesiastico, i giorni dei novilunii in un dato anno, sono quelli che nel calendario perpetuo sono segnati dall'epatta di quell'anno, il novilunio è il primo giorno della lunazione, e le altre fasi, cioè *primo quarto, luna piena* e *ultimo quarto,* corrispondono rispettivamente al *settimo,* al *decimoquarto* e al *ventiduesimo* giorno della lunazione.

---

# ECLISSI

## 1899

(Tempo medio civile dell'Europa centrale).

---

Nell' anno 1899 avverranno tre Eclissi di Sole e due di Luna. Nei nostri paesi saranno visibili la seconda Eclisse Solare e la seconda Lunare.

I. *Eclisse parziale di* SOLE, *11-12 Gennaio ; invisibile in Italia.*

Grandezza dell'Eclisse: 0,716 del diametro solare.

Questa Eclisse è visibile specialmente nella metà boreale del Grande Oceano e anche in parte del Giappone, all'estremo Nord-Est dell'Asia e nel Nord-Ovest dell'America del Nord.

### II. *Eclisse parziale di* Sole, *8 Giugno; visibile nel Nord d'Italia.*

Grandezza dell'Eclisse: 0,609 del diametro solare.
Nascere del Sole: $4^h\,44^m$.
Principio: $5^h\,48^m\,29^s$; angolo di posizione: 22°.
Fase massima: $6^h\,4^m\,46^s$; grandezza: 0,037.
Fine: $6^h\,21^m\,16^s$; angolo di posizione: 55°.
La grandezza della fase massima è espressa in parti del diametro solare e l'angolo di posizione è contato dal punto più alto del disco, verso sinistra (immagine diritta).

Questa Eclisse è visibile nella metà d'Europa rivolta a Nord-Ovest, nell'Asia boreale, nell'estremo Nord dell'America e nella Groenlandia.

In Italia l'Eclisse è visibile come piccolissima Eclisse parziale in Piemonte, Liguria, Lombardia, Veneto e parte dell'Emilia.

### III. *Eclisse totale di* Luna, *23 Giugno; invisibile in Italia.*

Questa Eclisse è visibile nel Grande Oceano, in Australia, in Asia (eccettuate le regioni di confine a occidente e le coste boreali), nell'Oceano indiano e sulle coste orientali dell'Africa.

### IV. *Eclisse anulare di* Sole, *3 Dicembre; invisibile in Italia.*

Questa Eclisse è visibile all'estremità Sud-Ovest dell'Australia, nella Tasmania, nella Nuova Zelanda meridionale e sulla punta australe dell'America del Sud, ma principalmente nelle regioni polari antartiche.

### V. *Eclisse parziale di* Luna, *16-17 Dicembre; visibile in Italia.*

Primo contatto colla penombra . $23^h\,34^m$ del giorno 16.
" " con l'ombra o principio dell'Eclisse . . . . . . . . . $0^h\,45^m$ del giorno 17.

| | |
|---|---|
| Istante medio . . . . . . . . . | $2^h\ 26^m$ del giorno 17. |
| Ultimo contatto con l'ombra o fine dell'Eclisse . . . . . . . . . . . | $4^h\ 7^m$ " " |
| Ultimo contatto con la penombra . | $5^h\ 18^m$ " " |

Grandezza dell'Eclisse: 0,995 del diametro lunare.

Questa Eclisse è visibile in Asia (eccettuato il littorale ad oriente), nell'Oceano indiano, in Europa, in Africa, nell'Oceano Atlantico e in America.

A Torino il 16 Dicembre la Luna nasce a $16^h\ 24^m$, passa il Meridiano a $0^h\ 21^m$ del giorno 17 e tramonta lo stesso giorno a $8^h\ 14^m$.

L'immersione nell'ombra avviene a 52° verso sinistra dal punto più alto del disco e l'emersione a 108° verso destra del medesimo punto (imagine diritta).

*Errata nelle Effemeridi del Sole e della Luna per l'anno 1898.*

Causa errori esistenti nel *Nautical Almanac* di Londra (corretti poi nel volume del 1899, pag. XIII), le indicazioni relative alle tre eclissi lunari vanno rettificate come segue:

| | Eclisse parziale 7-8 Gennaio | Eclisse parziale 3 Luglio | Eclisse totale 27-28 Dicembre |
|---|---|---|---|
| Primo contatto colla penombra | $23^h\ 1^m$ | $19^h\ 48^m$ | $21^h\ 35^m$ |
| Principio dell'Eclisse . . . . | 0 47 | 20 46 | 22 48 |
| Principio della fase totale . . | — | — | 23 57 |
| Istante medio . . . . . . | 1 35 | 22 17 | 0 42 |
| Fine della fase totale . . . . | — | — | 1 27 |
| Fine dell'eclisse . . . . . . | 2 22 | 23 49 | 2 36 |
| Ultimo contatto con la penombra | 4 9 | 0 47 | 3 49 |
| Orizzonte di Torino | dal punto più basso | dal punto più alto | dal punto più basso |
| Immersione nell'ombra | 17° a destra | 83° a sinistra | 31° a sinistra |
| Emersione dall'ombra | 0° | 62° a destra | 44° a destra |

A pag. 16 delle Effemeridi del 1898:
31 Dicembre, *invece di* La luna passa al meridiano alle 3 31.1 *leggi* 2 48.8.

## Gennaio 1899.

| GIORNO | | | TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE | | | | | | | Età della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| dell'Anno | del Mese | della Settimana | Il SOLE | | | | La LUNA | | | |
| | | | nasce | passa al meridiano | | tramonta | nasce | passa al meridiano | tramonta | |
| | | | h m | h m | s | h m | h m | h m | h m | |
| 1 | 1 | D | 8 10 | 12 32 | 59,52 | 16 56 | 21 39 | 3 31,1 | 10 14 | 19 |
| 2 | 2 | L | 10 | 33 | 27,64 | 57 | 22 42 | 4 12,4 | 10 34 | 20 |
| 3 | 3 | M | 10 | 33 | 55,43 | 58 | 23 46 | 4 53,7 | 10 54 | 21 |
| 4 | 4 | M | 9 | 34 | 22,85 | 59 | —— | 5 36,0 | 11 16 | 22 |
| 5 | 5 | G | 9 | 34 | 49,87 | 17 0 | 0 53 | 6 20,4 | 11 38 | 23 |
| 6 | 6 | V | 9 | 35 | 16,46 | 1 | 2 3 | 7 8,0 | 12 5 | 24 |
| 7 | 7 | S | 9 | 35 | 42,61 | 2 | 3 15 | 8 0,1 | 12 38 | 25 |
| 8 | 8 | D | 9 | 36 | 8,27 | 3 | 4 29 | 8 57,1 | 13 22 | 26 |
| 9 | 9 | L | 9 | 36 | 33,42 | 4 | 5 41 | 9 58,7 | 14 16 | 27 |
| 10 | 10 | M | 8 | 36 | 58,04 | 6 | 6 45 | 11 3,0 | 15 24 | 28 |
| 11 | 11 | M | 8 | 37 | 22,09 | 7 | 7 39 | 12 7,4 | 16 42 | 29 |
| 12 | 12 | G | 7 | 37 | 45,55 | 8 | 8 22 | 13 9,3 | 18 6 | 1 |
| 13 | 13 | V | 7 | 38 | 8,38 | 9 | 8 57 | 14 7,3 | 19 29 | 2 |
| 14 | 14 | S | 6 | 38 | 30,56 | 10 | 9 24 | 15 1,4 | 20 49 | 3 |
| 15 | 15 | D | 6 | 38 | 52,08 | 12 | 9 52 | 15 52,3 | 22 5 | 4 |
| 16 | 16 | L | 5 | 39 | 12,89 | 13 | 10 16 | 16 41,3 | 23 20 | 5 |
| 17 | 17 | M | 5 | 39 | 32,99 | 14 | 10 40 | 17 29,4 | —— | 6 |
| 18 | 18 | M | 4 | 39 | 42,35 | 16 | 11 6 | 18 17,4 | 0 32 | 7 |
| 19 | 19 | G | 3 | 40 | 10,98 | 17 | 11 35 | 19 6,1 | 1 41 | 8 |
| 20 | 20 | V | 3 | 40 | 28,84 | 18 | 12 8 | 19 55,8 | 2 48 | 9 |
| 21 | 21 | S | 2 | 40 | 45,92 | 20 | 12 47 | 20 46,3 | 3 52 | 10 |
| 22 | 22 | D | 1 | 41 | 2,22 | 21 | 13 33 | 21 36,9 | 4 49 | 11 |
| 23 | 23 | L | 0 | 41 | 17,74 | 22 | 14 25 | 22 26,8 | 5 40 | 12 |
| 24 | 24 | M | 7 59 | 41 | 32,45 | 24 | 15 22 | 23 15,5 | 6 23 | 13 |
| 25 | 25 | M | 58 | 41 | 46,37 | 25 | 16 23 | —— | 7 0 | 14 |
| 26 | 26 | G | 57 | 41 | 59,49 | 27 | 17 25 | 0 2,2 | 7 30 | 15 |
| 27 | 27 | V | 57 | 42 | 11,79 | 28 | 18 28 | 0 47,1 | 7 57 | 16 |
| 28 | 28 | S | 56 | 42 | 23,28 | 29 | 19 31 | 1 30,0 | 8 19 | 17 |
| 29 | 29 | D | 54 | 42 | 33,96 | 31 | 20 34 | 2 11,7 | 8 41 | 18 |
| 30 | 30 | L | 53 | 42 | 43,84 | 32 | 21 38 | 2 53,1 | 9 1 | 19 |
| 31 | 31 | M | 52 | 42 | 52,90 | 34 | 22 43 | 3 34,8 | 9 21 | 20 |

***Fasi della Luna.***

5 Ultimo quarto alle $4^h$ $22^m$

11 Luna nuova „ $23^h$ $50^m$

18 Primo quarto „ $17^h$ $36^m$

26 Luna piena „ $20^h$ $34^m$

Il giorno nel mese cresce di $0^h$ $56^m$

12 La Luna è in Perigeo alle $3^h$

25 Id. Apogeo „ $19^h$

Il Sole entra nel segno *Acquario* il giorno 20 alle ore 6 min. 37.

## Febbraio 1899.

| GIORNO | | | TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE | | | | | | Età della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Il SOLE | | | La LUNA | | | |
| dell'Anno | del Mese | della Settimana | nasce | passa al meridiano | tramonta | nasce | passa al meridiano | tramonta | |
| | | | h m | h m s | h m | h m | h m | h m | |
| 32 | 1 | M | 7 51 | 12 43 1,15 | 17 35 | 23 50 | 4 17,9 | 9 43 | 21 |
| 33 | 2 | G | 50 | 43 8,60 | 37 | —— | 5 3,3 | 10 8 | 22 |
| 34 | 3 | V | 49 | 43 14,25 | 38 | 0 59 | 5 52,1 | 10 38 | 23 |
| 35 | 4 | S | 47 | 43 21,09 | 39 | 2 10 | 6 45,1 | 11 15 | 24 |
| 36 | 5 | **D** | 46 | 43 26,15 | 41 | 3 20 | 7 42,3 | 12 2 | 25 |
| 37 | 6 | L | 45 | 43 30,42 | 42 | 4 26 | 8 43,2 | 13 1 | 26 |
| 38 | 7 | M | 44 | 43 33,89 | 44 | 5 23 | 9 45,7 | 14 12 | 27 |
| 39 | 8 | M | 42 | 43 36,58 | 45 | 6 11 | 10 47,6 | 15 31 | 28 |
| 40 | 9 | G | 41 | 43 38,50 | 47 | 6 50 | 11 47,3 | 16 54 | 29 |
| 41 | 10 | V | 39 | 43 39,62 | 48 | 7 22 | 12 43,8 | 18 17 | 1 |
| 42 | 11 | S | 38 | 43 39,97 | 49 | 7 50 | 13 37,5 | 19 37 | 2 |
| 43 | 12 | **D** | 37 | 43 39,55 | 51 | 8 17 | 14 28,9 | 20 55 | 3 |
| 44 | 13 | L | 35 | 43 38,84 | 52 | 8 31 | 15 19,1 | 22 11 | 4 |
| 45 | 14 | M | 33 | 43 36,39 | 54 | 9 8 | 16 8,9 | 23 23 | 5 |
| 46 | 15 | M | 32 | 43 33,68 | 55 | 9 36 | 16 59,1 | —— | 6 |
| 47 | 16 | G | 30 | 43 30,22 | 57 | 10 7 | 17 49,8 | 0 34 | 7 |
| 48 | 17 | V | 29 | 43 26,03 | 58 | 10 46 | 18 40,9 | 1 40 | 8 |
| 49 | 18 | S | 27 | 43 21,12 | 59 | 11 30 | 19 32,0 | 2 42 | 9 |
| 50 | 19 | **D** | 26 | 43 15,52 | 18 1 | 12 20 | 20 22,5 | 3 35 | 10 |
| 51 | 20 | L | 24 | 43 9,22 | 2 | 13 15 | 21 11,6 | 4 22 | 11 |
| 52 | 21 | M | 22 | 43 2,26 | 4 | 14 15 | 21 58,9 | 5 1 | 12 |
| 53 | 22 | M | 21 | 42 54,64 | 5 | 15 17 | 22 44,2 | 5 33 | 13 |
| 54 | 23 | G | 19 | 42 46,38 | 7 | 16 19 | 23 27,9 | 6 0 | 14 |
| 55 | 24 | V | 17 | 42 37,51 | 8 | 17 22 | —— | 6 24 | 15 |
| 56 | 25 | S | 15 | 42 28,00 | 10 | 18 26 | 0 10,3 | 6 46 | 16 |
| 57 | 26 | **D** | 14 | 42 17,98 | 11 | 19 30 | 0 52,2 | 7 7 | 17 |
| 58 | 27 | L | 12 | 42 7,37 | 12 | 20 34 | 1 34,1 | 7 28 | 18 |
| 59 | 28 | M | 10 | 41 56,22 | 14 | 21 41 | 2 17,1 | 7 50 | 19 |

***Fasi della Luna.***

3 Ultimo quarto alle $18^h$ $24^m$

10 Luna nuova „ $10^h$ $32^m$

17 Primo quarto „ $9^h$ $52^m$

25 Luna piena „ $15^h$ $16^m$

Il giorno nel mese cresce di $1^h$ $22^m$

9 La Luna è in Perigeo alle $15^h$
22 Id. Apogeo „ $3^h$

Il Sole entra nel segno *Pesci* il giorno 18 alle ore 21 min. 8.

## Marzo 1899.

| GIORNO | | | TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE | | | | | | Età della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Il SOLE | | | La LUNA | | | |
| dell'Anno | del Mese | della Settimana | nasce | passa al meridiano | tramonta | nasce | passa al meridiano | tramonta | |
| | | | h m | h m s | h m | h m | h m | h m | |
| 60 | 1 | M | 7 9 | 12 41 44,57 | 18 15 | 22 50 | 3 2,0 | 8 14 | 20 |
| 61 | 2 | G | 7 | 41 32,41 | 17 | —— | 3 49,6 | 8 42 | 21 |
| 62 | 3 | V | 5 | 41 19,78 | 18 | 0 0 | 4 40,7 | 9 16 | 22 |
| 63 | 4 | S | 3 | 41 6,68 | 19 | 1 8 | 5 35,4 | 9 59 | 23 |
| 64 | 5 | D | 1 | 40 53,16 | 21 | 2 14 | 6 33,1 | 10 52 | 24 |
| 65 | 6 | L | 0 | 40 39,22 | 22 | 3 13 | 7 32,8 | 11 53 | 25 |
| 66 | 7 | M | 6 58 | 40 24,89 | 23 | 4 3 | 8 32,8 | 13 9 | 26 |
| 67 | 8 | M | 56 | 40 10,20 | 24 | 4 44 | 9 31,4 | 14 27 | 27 |
| 68 | 9 | G | 54 | 39 55,14 | 26 | 5 18 | 10 27,6 | 15 47 | 28 |
| 69 | 10 | V | 52 | 39 39,73 | 27 | 5 48 | 11 21,6 | 17 7 | 29 |
| 70 | 11 | S | 51 | 39 24,00 | 28 | 6 15 | 12 13,8 | 18 25 | 30 |
| 71 | 12 | D | 49 | 39 7,95 | 30 | 6 40 | 13 4,9 | 19 43 | 1 |
| 72 | 13 | L | 47 | 38 51,60 | 31 | 7 7 | 13 55,7 | 20 59 | 2 |
| 73 | 14 | M | 45 | 38 34,98 | 32 | 7 34 | 14 47,0 | 22 13 | 3 |
| 74 | 15 | M | 43 | 38 18,09 | 34 | 8 6 | 15 38,9 | 23 23 | 4 |
| 75 | 16 | G | 41 | 38 0,96 | 35 | 8 42 | 16 31,3 | —— | 5 |
| 76 | 17 | V | 39 | 37 43,60 | 36 | 9 25 | 17 23,7 | 0 28 | 6 |
| 77 | 18 | S | 37 | 37 26,04 | 38 | 10 13 | 18 15,3 | 1 25 | 7 |
| 78 | 19 | D | 36 | 37 8,28 | 39 | 11 8 | 19 6,5 | 2 16 | 8 |
| 79 | 20 | L | 34 | 36 50,35 | 40 | 12 6 | 19 54,7 | 2 57 | 9 |
| 80 | 21 | M | 32 | 36 32,28 | 41 | 13 7 | 20 39,8 | 3 32 | 10 |
| 81 | 22 | M | 30 | 36 14,08 | 43 | 14 9 | 21 24,0 | 4 2 | 11 |
| 82 | 23 | G | 29 | 35 55,78 | 44 | 15 11 | 22 6,8 | 4 27 | 12 |
| 83 | 24 | V | 26 | 35 37,40 | 45 | 16 14 | 22 48,9 | 4 50 | 13 |
| 84 | 25 | S | 24 | 35 18,96 | 46 | 17 19 | 23 31,1 | 5 12 | 14 |
| 85 | 26 | D | 22 | 35 0,50 | 48 | 18 24 | —— | 5 33 | 15 |
| 86 | 27 | L | 21 | 34 42,01 | 49 | 19 30 | 0 14,2 | 5 55 | 16 |
| 87 | 28 | M | 19 | 34 23,52 | 50 | 20 38 | 0 59,1 | 6 18 | 17 |
| 88 | 29 | M | 17 | 34 5,08 | 52 | 21 40 | 1 46,6 | 6 46 | 18 |
| 89 | 30 | G | 15 | 33 46,70 | 53 | 22 59 | 2 37,4 | 7 19 | 19 |
| 90 | 31 | V | 13 | 33 28,40 | 54 | —— | 3 31,4 | 7 59 | 20 |

***Fasi della Luna.***

5 Ultimo quarto alle $5^h$ $7^m$

11 Luna nuova „ $20^h$ $53^m$

19 Primo quarto „ $4^h$ $24^m$

27 Luna piena „ $7^h$ $18^m$

Il giorno nel mese cresce di $1^h$ $37^m$

9 La Luna è in Perigeo alle $23^h$

21 Id. Apogeo „ $20^h$

Il Sole entra nel segno *Ariete* il giorno 20 alle ore 20 min. 46.

## Aprile 1899.

| GIORNO | | | TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE | | | | | | Età della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Il SOLE | | | La LUNA | | | |
| dell'Anno | del Mese | della Settimana | nasce | passa al meridiano | tramonta | nasce | passa al meridiano | tramonta | |
| | | | h m | h m s | h m | h m | h m | h m | |
| 91 | 1 | S | 6 11 | 12 33 10,20 | 18 55 | 0 7 | 4 28,5 | 8 49 | 21 |
| 92 | 2 | D | 9 | 32 52,12 | 57 | 1 7 | 5 27,1 | 9 49 | 22 |
| 93 | 3 | L | 7 | 32 34,19 | 58 | 1 58 | 6 26,0 | 10 58 | 23 |
| 94 | 4 | M | 6 | 32 16.43 | 59 | 2 42 | 7 23,5 | 12 13 | 24 |
| 95 | 5 | M | 4 | 31 58,85 | 19 0 | 3 17 | 8 18,7 | 13 29 | 25 |
| 96 | 6 | G | 2 | 31 41,48 | 2 | 3 47 | 9 11,7 | 14 47 | 26 |
| 97 | 7 | V | 0 | 31 24,32 | 3 | 4 14 | 10 2,9 | 16 3 | 27 |
| 98 | 8 | S | 5 58 | 31 7,40 | 4 | 4 41 | 10 53,1 | 17 19 | 28 |
| 99 | 9 | D | 56 | 30 50,72 | 6 | 5 6 | 11 43,2 | 18 34 | 29 |
| 100 | 10 | L | 55 | 30 34,31 | 7 | 5 33 | 12 34,0 | 19 48 | 1 |
| 101 | 11 | M | 53 | 30 18,11 | 8 | 6 3 | 13 25,9 | 21 1 | 2 |
| 102 | 12 | M | 51 | 30 2,32 | 9 | 6 38 | 14 18,7 | 22 9 | 3 |
| 103 | 13 | G | 49 | 29 46,75 | 11 | 7 18 | 15 12,1 | 23 12 | 4 |
| 104 | 14 | V | 47 | 29 31,50 | 12 | 8 5 | 15 6,1 | —— | 5 |
| 105 | 15 | S | 46 | 29 16,58 | 13 | 8 57 | 16 56,8 | 0 6 | 6 |
| 106 | 16 | D | 44 | 29 1,93 | 14 | 9 54 | 17 47,1 | 0 52 | 7 |
| 107 | 17 | L | 42 | 28 47,75 | 16 | 10 55 | 18 33,5 | 1 30 | 8 |
| 108 | 18 | M | 41 | 28 33,88 | 17 | 11 57 | 19 18,5 | 2 1 | 9 |
| 109 | 19 | M | 39 | 28 20,38 | 18 | 13 0 | 20 1,6 | 2 29 | 10 |
| 110 | 20 | G | 37 | 28 7,30 | 19 | 14 2 | 20 43,7 | 2 52 | 11 |
| 111 | 21 | V | 35 | 27 54,61 | 21 | 15 5 | 21 25,6 | 3 14 | 12 |
| 112 | 22 | S | 34 | 27 42,34 | 22 | 16 9 | 22 8,3 | 3 36 | 13 |
| 113 | 23 | D | 32 | 27 30,52 | 23 | 17 15 | 22 52,5 | 3 57 | 14 |
| 114 | 24 | L | 31 | 27 19,18 | 24 | 18 23 | 23 39,5 | 4 21 | 15 |
| 115 | 25 | M | 29 | 27 8,23 | 26 | 19 34 | —— | 4 47 | 16 |
| 116 | 26 | M | 27 | 26 57,80 | 27 | 20 46 | 0 29,9 | 5 18 | 17 |
| 117 | 27 | G | 26 | 26 47,88 | 28 | 21 56 | 1 23,9 | 5 57 | 18 |
| 118 | 28 | V | 24 | 26 38,45 | 29 | 23 0 | 2 21,3 | 6 44 | 19 |
| 119 | 29 | S | 23 | 26 29.55 | 30 | 23 55 | 3 20,9 | 7 43 | 20 |
| 120 | 30 | D | 21 | 26 21,19 | 32 | —— | 4 20,7 | 8 50 | 21 |

***Fasi della Luna.***

3 Ultimo quarto alle $12^h$ $56^m$

10 Luna nuova „ $7^h$ $21^m$

17 Primo quarto „ $23^h$ $43^m$

25 Luna piena „ $20^h$ $22^m$

Il giorno nel mese cresce di $1^h$ $30^m$

6 La Luna è in Perigeo alle $14^h$
18 Id. Apogeo „ $15^h$

Il Sole entra nel segno *Toro* il giorno 20 alle ore 8 min. 33.

## Maggio 1899.

| GIORNO | | | TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE | | | | | | Età della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Il SOLE | | | La LUNA | | | |
| dell'Anno | del Mese | della Settimana | nasce | passa al meridiano | tramonta | nasce | passa al meridiano | tramonta | |
| | | | h m | h m s | h m | h m | h m | h m | |
| 121 | 1 | L | 5 20 | 12 26 13,38 | 19 33 | 0 41 | 5 19,2 | 10 3 | 22 |
| 122 | 2 | M | 18 | 26 6,13 | 34 | 1 18 | 6 14,8 | 11 19 | 23 |
| 123 | 3 | M | 17 | 25 59,44 | 35 | 1 50 | 7 7,7 | 12 36 | 24 |
| 124 | 4 | G | 15 | 25 53,32 | 37 | 2 16 | 7 58,2 | 13 50 | 25 |
| 125 | 5 | V | 14 | 25 47,80 | 38 | 2 43 | 8 47,5 | 15 4 | 26 |
| 126 | 6 | S | 12 | 25 44,84 | 39 | 3 8 | 9 36,2 | 16 17 | 27 |
| 127 | 7 | **D** | 11 | 25 38,45 | 40 | 3 33 | 10 25,3 | 17 31 | 28 |
| 128 | 8 | L | 10 | 25 34,65 | 42 | 4 1 | 11 15,8 | 18 42 | 29 |
| 129 | 9 | M | 9 | 25 31,41 | 43 | 4 34 | 12 7,7 | 19 52 | 30 |
| 130 | 10 | M | 7 | 25 28,77 | 44 | 5 12 | 13 0,8 | 20 57 | 1 |
| 131 | 11 | G | 6 | 25 26,70 | 45 | 5 56 | 13 54,2 | 21 55 | 2 |
| 132 | 12 | V | 5 | 25 25,19 | 46 | 6 47 | 14 46,9 | 22 44 | 3 |
| 133 | 13 | S | 3 | 25 24,24 | 48 | 7 43 | 15 37,8 | 23 26 | 4 |
| 134 | 14 | **D** | 2 | 25 23,86 | 49 | 8 43 | 16 26,4 | —— | 5 |
| 135 | 15 | L | 1 | 25 24,04 | 50 | 9 45 | 17 12,3 | 0 0 | 6 |
| 136 | 16 | M | 0 | 25 24,76 | 51 | 10 47 | 17 56,1 | 0 29 | 7 |
| 137 | 17 | M | 4 59 | 25 26,04 | 52 | 11 49 | 18 38,3 | 0 54 | 8 |
| 138 | 18 | G | 58 | 25 27,86 | 53 | 12 50 | 19 19,8 | 1 17 | 9 |
| 139 | 19 | V | 57 | 25 30,20 | 54 | 13 54 | 20 1,5 | 1 37 | 10 |
| 140 | 20 | S | 56 | 25 33,08 | 55 | 14 58 | 20 44,5 | 1 58 | 11 |
| 141 | 21 | **D** | 55 | 25 36,50 | 56 | 16 5 | 21 29,8 | 2 21 | 12 |
| 142 | 22 | L | 54 | 25 40,43 | 58 | 17 14 | 22 18,5 | 2 45 | 13 |
| 143 | 23 | M | 53 | 25 44,88 | 59 | 18 26 | 23 11,1 | 3 15 | 14 |
| 144 | 24 | M | 52 | 25 49,84 | 20 0 | 19 38 | —— | 3 50 | 15 |
| 145 | 25 | G | 51 | 25 55,29 | 1 | 20 46 | 0 8,1 | 4 35 | 16 |
| 146 | 26 | V | 51 | 26 1,25 | 2 | 21 47 | 1 8,4 | 5 30 | 17 |
| 147 | 27 | S | 50 | 26 7,71 | 3 | 22 38 | 2 10,1 | 6 37 | 18 |
| 148 | 28 | **D** | 49 | 26 14,64 | 3 | 23 18 | 3 10,9 | 7 50 | 19 |
| 149 | 29 | L | 49 | 26 22,05 | 4 | 23 53 | 4 9,1 | 9 7 | 20 |
| 150 | 30 | M | 48 | 26 29,93 | 5 | —— | 5 4,0 | 10 26 | 21 |
| 151 | 31 | M | 47 | 26 38,26 | 6 | 0 21 | 5 55,7 | 11 41 | 22 |

***Fasi della Luna.***

2 Ultimo quarto alle $18^h\ 47^m$
9 Luna nuova „ $18^h\ 39^m$
17 Primo quarto „ $18^h\ 13^m$
25 Luna piena „ $6^h\ 49^m$
31 Ultimo quarto „ $23^h\ 55^m$

Il giorno nel mese cresce di $1^h\ 8^m$

1 La Luna è in Perigeo alle $22^h$
16 Id. Apogeo „ $10^h$
28 Id. Perigeo „ $8^h$

Il Sole entra nel segno *Gemelli* il giorno 12 ad ore 8 min. 22.

## Giugno 1899.

| GIORNO | | | TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE | | | | | | | Età della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Il SOLE | | | | La LUNA | | | |
| dell'Anno | del Mese | della Settimana | nasce | passa al meridiano | | tramonta | nasce | passa al meridiano | tramonta | |
| | | | h m | h m | s | h m | h m | h m | h m | |
| 152 | 1 | G | 4 47 | 12 26 | 47,03 | 20 7 | 0 47 | 6 45,3 | 12 55 | 23 |
| 153 | 2 | V | 46 | 26 | 56,22 | 8 | 1 12 | 7 33,7 | 14 8 | 24 |
| 154 | 3 | S | 46 | 27 | 6,82 | 9 | 1 37 | 8 22,0 | 15 20 | 25 |
| 155 | 4 | D | 45 | 27 | 15,80 | 9 | 2 4 | 9 10,9 | 16 31 | 26 |
| 156 | 5 | L | 45 | 27 | 26,14 | 10 | 2 34 | 10 1,4 | 17 40 | 27 |
| 157 | 6 | M | 44 | 27 | 36,84 | 11 | 3 9 | 10 53,2 | 18 45 | 28 |
| 158 | 7 | M | 44 | 27 | 47,85 | 11 | 3 50 | 11 46,0 | 19 45 | 29 |
| 159 | 8 | G | 44 | 27 | 59,16 | 12 | 4 39 | 12 38,7 | 20 38 | 1 |
| 160 | 9 | V | 43 | 28 | 10,73 | 13 | 5 33 | 13 30,2 | 21 22 | 2 |
| 161 | 10 | S | 43 | 28 | 22,55 | 13 | 6 32 | 14 19,8 | 21 59 | 3 |
| 162 | 11 | D | 43 | 28 | 34,60 | 14 | 7 33 | 15 6,8 | 22 30 | 4 |
| 163 | 12 | L | 43 | 28 | 46,84 | 14 | 8 35 | 15 51,5 | 22 57 | 5 |
| 164 | 13 | M | 43 | 28 | 59,26 | 15 | 9 37 | 16 34,1 | 23 20 | 6 |
| 165 | 14 | M | 43 | 29 | 11,80 | 15 | 10 39 | 17 15,4 | 23 41 | 7 |
| 166 | 15 | G | 43 | 29 | 24,48 | 16 | 11 40 | 17 56,4 | —— | 8 |
| 167 | 16 | V | 43 | 29 | 37,26 | 16 | 12 43 | 18 38,0 | 0 2 | 9 |
| 168 | 17 | S | 43 | 29 | 50,11 | 17 | 13 47 | 19 21,3 | 0 23 | 10 |
| 169 | 18 | D | 43 | 30 | 3,01 | 17 | 14 54 | 20 7,5 | 0 46 | 11 |
| 170 | 19 | L | 43 | 30 | 15,94 | 17 | 16 4 | 20 57,4 | 1 12 | 12 |
| 171 | 20 | M | 43 | 30 | 28,88 | 18 | 17 15 | 21 51,8 | 1 44 | 13 |
| 172 | 21 | M | 43 | 30 | 41,80 | 18 | 18 26 | 22 50,5 | 2 24 | 14 |
| 173 | 22 | G | 44 | 30 | 54,69 | 18 | 19 30 | 23 52,5 | 3 13 | 15 |
| 174 | 23 | V | 44 | 31 | 7,54 | 18 | 20 27 | —— | 4 15 | 16 |
| 175 | 24 | S | 44 | 31 | 20,30 | 18 | 21 14 | 0 55,1 | 5 28 | 17 |
| 176 | 25 | D | 44 | 31 | 32,98 | 18 | 21 51 | 1 57,3 | 6 46 | 18 |
| 177 | 26 | L | 45 | 31 | 45,54 | 18 | 22 23 | 2 54,6 | 8 7 | 19 |
| 178 | 27 | M | 45 | 31 | 57,98 | 18 | 22 51 | 3 49,3 | 9 26 | 20 |
| 179 | 28 | M | 46 | 32 | 10,28 | 18 | 23 17 | 4 41,1 | 10 43 | 21 |
| 180 | 29 | G | 46 | 32 | 22,41 | 18 | 23 42 | 5 30,8 | 11 57 | 22 |
| 181 | 30 | V | 47 | 32 | 34,36 | 18 | —— | 6 19,8 | 13 11 | 23 |

***Fasi della Luna.***

8 Luna nuova alle $7^h$ $20^m$

16 Primo quarto „ $10^h$ $46^m$

23 Luna piena „ $15^h$ $20^m$

30 Ultimo quarto „ $5^h$ $45^m$

Il giorno nel mese cresce di $0^h$ $12^m$

13 La Luna è in Apogeo alle $4^h$

25 Id. Perigeo „ $6^h$

Il Sole entra nel segno *Cancro* il giorno 21 ad ore 16 min. 45.

## Luglio 1899.

| GIORNO | | | TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE | | | | | | Età della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Il SOLE | | | La LUNA | | | |
| dell'Anno | del Mese | della Settimana | nasce | passa al meridiano | tramonta | nasce | passa al meridiano | tramonta | |
| | | | h m | h m s | h m | h m | h m | h m | |
| 182 | 1 | S | 4 47 | 12 32 46,09 | 20 18 | 0 8 | 7 8,8 | 14 22 | 24 |
| 183 | 2 | D | 48 | 32 57,60 | 18 | 0 37 | 7 58,5 | 15 31 | 25 |
| 184 | 3 | L | 48 | 33 8,84 | 17 | 1 10 | 8 49,4 | 16 38 | 26 |
| 185 | 4 | M | 49 | 33 19,81 | 17 | 1 49 | 9 41,3 | 17 40 | 27 |
| 186 | 5 | M | 50 | 33 30,48 | 17 | 2 34 | 10 33,5 | 18 34 | 28 |
| 187 | 6 | G | 50 | 33 40,81 | 16 | 3 26 | 11 25,0 | 19 21 | 29 |
| 188 | 7 | V | 51 | 33 50,79 | 16 | 4 23 | 12 15,1 | 20 0 | 30 |
| 189 | 8 | S | 52 | 34 0,41 | 16 | 5 23 | 13 2,8 | 20 32 | 1 |
| 190 | 9 | D | 52 | 34 9,63 | 15 | 6 26 | 13 48,3 | 21 0 | 2 |
| 191 | 10 | L | 53 | 34 18,44 | 15 | 7 28 | 14 31,6 | 21 25 | 3 |
| 192 | 11 | M | 54 | 34 26,81 | 14 | 8 29 | 15 13,2 | 21 46 | 4 |
| 193 | 12 | M | 55 | 34 34,72 | 13 | 9 30 | 15 54,0 | 22 7 | 5 |
| 194 | 13 | G | 56 | 34 42,16 | 13 | 10 32 | 16 34,8 | 22 28 | 6 |
| 195 | 14 | V | 57 | 34 49,11 | 12 | 11 34 | 17 16,7 | 22 49 | 7 |
| 196 | 15 | S | 58 | 34 55,56 | 11 | 12 39 | 18 0,5 | 23 14 | 8 |
| 197 | 16 | D | 59 | 35 1,49 | 11 | 13 45 | 18 47,4 | 23 42 | 9 |
| 198 | 17 | L | 59 | 35 6,88 | 10 | 14 54 | 19 38,3 | —— | 10 |
| 199 | 18 | M | 5 0 | 35 11,73 | 9 | 16 4 | 20 33,5 | 0 16 | 11 |
| 200 | 19 | M | 1 | 35 16,03 | 8 | 17 11 | 21 32,8 | 1 0 | 12 |
| 201 | 20 | G | 2 | 35 19,78 | 7 | 18 11 | 22 34,7 | 1 55 | 13 |
| 202 | 21 | V | 3 | 35 22,96 | 6 | 19 3 | 23 37,0 | 3 1 | 14 |
| 203 | 22 | S | 4 | 35 25,56 | 5 | 19 46 | —— | 4 17 | 15 |
| 204 | 23 | D | 5 | 35 27,58 | 4 | 20 21 | 0 37,7 | 5 39 | 16 |
| 205 | 24 | L | 6 | 35 29,05 | 3 | 20 51 | 1 35,6 | 7 1 | 17 |
| 206 | 25 | M | 8 | 35 29,93 | 2 | 21 19 | 2 30,5 | 8 21 | 18 |
| 207 | 26 | M | 9 | 35 30,23 | 1 | 21 45 | 3 22,9 | 9 40 | 19 |
| 208 | 27 | G | 10 | 35 29,95 | 0 | 22 11 | 4 14,0 | 10 56 | 20 |
| 209 | 28 | V | 11 | 35 29,10 | 19 59 | 22 40 | 5 4,3 | 12 10 | 21 |
| 210 | 29 | S | 12 | 35 27,67 | 58 | 23 12 | 5 54,9 | 13 22 | 22 |
| 211 | 30 | D | 13 | 35 25,65 | 57 | 23 50 | 6 46,2 | 14 30 | 23 |
| 212 | 31 | L | 14 | 35 23,04 | 55 | —— | 7 38,1 | 15 43 | 24 |

***Fasi della Luna.***

7 Luna nuova alle $21^h$ $31^m$

16 Primo quarto „ $0^h$ $59^m$

22 Luna piena „ $22^h$ $42^m$

29 Ultimo quarto „ $13^h$ $42^m$

Il giorno nel mese diminuisce di $0^h$ $50^m$.

10 La Luna è in Apogeo alle $17^h$
23 Id. Perigeo „ $23^h$

Il Sole entra nel segno *Leone* il giorno 23 alle ore 3 min. 42.

## Agosto 1899.

| GIORNO | | | TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE | | | | | | Età della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Il SOLE | | | La LUNA | | | |
| dell'Anno | del Mese | della Settimana | nasce | passa al meridiano | tramonta | nasce | passa al meridiano | tramonta | |
| | | | h m | h m s | h m | h m | h m | h m | |
| 213 | 1 | M | 5 15 | 12 35 19,86 | 19 54 | 0 33 | 8 30,1 | 16 30 | 25 |
| 214 | 2 | M | 16 | 35 16,08 | 53 | 1 22 | 9 21,7 | 17 19 | 26 |
| 215 | 3 | G | 17 | 35 11,71 | 52 | 2 17 | 10 11,8 | 18 0 | 27 |
| 216 | 4 | V | 18 | 35 6,74 | 50 | 3 16 | 11 0,1 | 18 35 | 28 |
| 217 | 5 | S | 20 | 35 1,19 | 49 | 4 18 | 11 46,1 | 19 4 | 29 |
| 218 | 6 | **D** | 21 | 34 55,04 | 48 | 5 20 | 12 30,1 | 19 30 | 30 |
| 219 | 7 | L | 22 | 34 48,30 | 46 | 6 21 | 13 12,3 | 19 52 | 1 |
| 220 | 8 | M | 23 | 34 40,95 | 45 | 7 23 | 13 53,4 | 20 13 | 2 |
| 221 | 9 | M | 25 | 34 33,03 | 43 | 8 24 | 14 34,1 | 20 34 | 3 |
| 222 | 10 | G | 26 | 34 24,51 | 42 | 9 26 | 15 16,4 | 20 55 | 4 |
| 223 | 11 | V | 27 | 34 15,41 | 40 | 10 29 | 15 58.0 | 21 19 | 5 |
| 224 | 12 | S | 28 | 34 5,73 | 39 | 11 33 | 16 42,9 | 21 45 | 6 |
| 225 | 13 | **D** | 29 | 33 55,49 | 37 | 12 40 | 17 31,0 | 22 15 | 7 |
| 226 | 14 | L | 31 | 33 44,67 | 36 | 13 47 | 18 22,8 | 22 54 | 8 |
| 227 | 15 | M | 32 | 33 33,29 | 34 | 14 53 | 19 18,5 | 23 42 | 9 |
| 228 | 16 | M | 33 | 33 21,37 | 32 | 15 55 | 20 17,2 | —— | 10 |
| 229 | 17 | G | 34 | 33 8,99 | 31 | 16 49 | 21 17,8 | 0 41 | 11 |
| 230 | 18 | V | 35 | 32 55,93 | 29 | 17 35 | 22 18,2 | 1 49 | 12 |
| 231 | 19 | S | 37 | 32 42,44 | 28 | 18 14 | 23 17,2 | 3 8 | 13 |
| 232 | 20 | **D** | 38 | 32 28,45 | 26 | 18 48 | —— | 4 29 | 14 |
| 233 | 21 | L | 39 | 32 14,09 | 24 | 19 18 | 0 13,9 | 5 51 | 15 |
| 234 | 22 | M | 40 | 31 59,06 | 22 | 19 45 | 1 8,6 | 7 12 | 16 |
| 235 | 23 | M | 41 | 31 43,69 | 21 | 20 13 | 2 1,6 | 8 32 | 17 |
| 236 | 24 | G | 43 | 31 27,89 | 19 | 20 41 | 2 54,0 | 9 49 | 18 |
| 237 | 25 | V | 44 | 31 11,69 | 17 | 21 13 | 3 46,3 | 11 5 | 19 |
| 238 | 26 | S | 45 | 30 55,10 | 16 | 21 42 | 4 39,0 | 12 16 | 20 |
| 239 | 27 | **D** | 46 | 30 38,14 | 14 | 22 31 | 5 32,1 | 13 23 | 21 |
| 240 | 28 | L | 47 | 30 20,80 | 12 | 23 19 | 6 25,2 | 14 23 | 22 |
| 241 | 29 | M | 49 | 30 3,14 | 10 | —— | 7 17,5 | 15 15 | 23 |
| 242 | 30 | M | 50 | 29 45,14 | 8 | 0 12 | 8 8,4 | 15 59 | 24 |
| 243 | 31 | G | 51 | 29 26,83 | 6 | 1 11 | 8 57,4 | 16 36 | 25 |

### *Fasi della Luna.*

6 Luna nuova alle $12^h$ $48^m$

14 Primo quarto " $12^h$ $54^m$

21 Luna piena " $5^h$ $45^m$

28 Ultimo quarto " $0^h$ $57^m$

Il giorno nel mese diminuisce di $1^h$ $26^m$.

6 La Luna è in Apogeo alle $23^h$
20 Id. Perigeo " $23^h$

Il Sole entra nel segno *Vergine* il giorno 23 alle ore 10 min. 28.

## Settembre 1899.

| GIORNO | | | TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE | | | | | | Età della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | **Il SOLE** | | | **La LUNA** | | | |
| dell'Anno | del Mese | della Settimana | nasce | passa al meridiano | tramonta | nasce | passa al meridiano | tramonta | |
| | | | h m | h m s | h m | h m | h m | h m | |
| 244 | 1 | V | 5 52 | 12 29 8,21 | 19 5 | 2 11 | 9 44,0 | 17 7 | 26 |
| 245 | 2 | S | 53 | 28 49,42 | 3 | 3 12 | 10 28,6 | 17 34 | 27 |
| 246 | 3 | D | 55 | 28 30,14 | 1 | 4 14 | 11 11,3 | 17 58 | 28 |
| 247 | 4 | L | 56 | 28 10,72 | 18 59 | 5 15 | 11 52,8 | 18 19 | 29 |
| 248 | 5 | M | 57 | 27 51,05 | 57 | 6 17 | 12 33,8 | 18 40 | 1 |
| 249 | 6 | M | 58 | 27 31,15 | 55 | 7 18 | 13 15,1 | 19 2 | 2 |
| 250 | 7 | G | 59 | 27 11,04 | 54 | 8 21 | 13 57,5 | 19 25 | 3 |
| 251 | 8 | V | 6 1 | 26 50,74 | 52 | 9 25 | 14 41,6 | 19 50 | 4 |
| 252 | 9 | S | 2 | 26 30,25 | 50 | 10 31 | 15 28,5 | 20 19 | 5 |
| 253 | 10 | D | 3 | 26 9,60 | 48 | 11 37 | 16 18,4 | 20 55 | 6 |
| 254 | 11 | L | 4 | 25 48,81 | 46 | 12 43 | 17 11,5 | 21 38 | 7 |
| 255 | 12 | M | 5 | 25 27,88 | 44 | 13 44 | 18 7,5 | 22 31 | 8 |
| 256 | 13 | M | 6 | 25 6,83 | 42 | 14 39 | 19 5,4 | 23 34 | 9 |
| 257 | 14 | G | 8 | 24 45,69 | 40 | 15 28 | 20 3,7 | —— | 10 |
| 258 | 15 | V | 9 | 24 24,48 | 39 | 16 8 | 21 1,3 | 0 46 | 11 |
| 259 | 16 | S | 10 | 24 3,22 | 37 | 16 43 | 21 57,4 | 2 3 | 12 |
| 260 | 17 | D | 11 | 23 41,93 | 35 | 17 14 | 22 53,1 | 3 22 | 13 |
| 261 | 18 | L | 12 | 23 20,63 | 33 | 17 42 | 23 45,7 | 4 42 | 14 |
| 262 | 19 | M | 14 | 22 59,34 | 31 | 18 10 | —— | 6 2 | 15 |
| 263 | 20 | M | 15 | 22 38,10 | 29 | 18 39 | 0 38,8 | 7 21 | 16 |
| 264 | 21 | G | 16 | 22 16,93 | 27 | 19 10 | 1 32,1 | 8 39 | 17 |
| 265 | 22 | V | 17 | 21 55,85 | 25 | 19 46 | 2 26,0 | 9 54 | 18 |
| 266 | 23 | S | 19 | 21 34,90 | 23 | 20 26 | 3 20,6 | 11 5 | 19 |
| 267 | 24 | D | 20 | 21 14,07 | 21 | 21 13 | 4 15,6 | 12 11 | 20 |
| 268 | 25 | L | 21 | 20 53,42 | 19 | 22 5 | 5 9,6 | 13 7 | 21 |
| 269 | 26 | M | 22 | 20 41,95 | 18 | 23 3 | 6 2,1 | 13 55 | 22 |
| 270 | 27 | M | 23 | 20 12,67 | 16 | —— | 6 52,5 | 14 35 | 23 |
| 271 | 28 | G | 25 | 19 52,63 | 14 | 0 3 | 7 40,2 | 15 8 | 24 |
| 272 | 29 | V | 26 | 19 33,82 | 12 | 1 4 | 8 25,6 | 15 37 | 25 |
| 273 | 30 | S | 27 | 19 13,28 | 10 | 2 6 | 9 8,8 | 16 2 | 26 |

### *Fasi della Luna.*

5 Luna nuova alle $4^h$ $33^m$

12 Primo quarto „ $22^h$ $49^m$

19 Luna piena „ $13^h$ $31^m$

26 Ultimo quarto „ $16^h$ $3^m$

Il giorno nel mese diminuisce di $1^h$ $32^m$.

3 La Luna è in Apogeo alle $2^h$
18 Id. Perigeo „ $8^h$
30 Id. Apogeo „ $13^h$

Il Sole entra nel segno *Libra* il giorno 23 alle ore 7 min. 30.

## Ottobre 1899.

| GIORNO | | | TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE | | | | | | Età della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Il SOLE | | | La LUNA | | | |
| dell'Anno | del Mese | della Settimana | nasce | passa al meridiano | tramonta | nasce | passa al meridiano | tramonta | |
| | | | h m | h m s | h m | h m | h m | h m | |
| 274 | 1 | D | 6 28 | 12 18 54,03 | 18 8 | 3 7 | 9 50,7 | 16 23 | 27 |
| 275 | 2 | L | 30 | 18 35,07 | 6 | 4 8 | 10 33,0 | 16 45 | 28 |
| 276 | 3 | M | 31 | 18 16,43 | 4 | 5 10 | 11 13,4 | 17 7 | 29 |
| 277 | 4 | M | 32 | 17 58,14 | 2 | 6 12 | 11 55,8 | 17 30 | 30 |
| 278 | 5 | G | 33 | 17 40,19 | 1 | 7 17 | 12 39,8 | 17 55 | 1 |
| 279 | 6 | V | 35 | 17 22,60 | 17 59 | 8 22 | 13 26,3 | 18 23 | 2 |
| 280 | 7 | S | 36 | 17 5,40 | 57 | 9 29 | 14 16,1 | 18 57 | 3 |
| 281 | 8 | D | 37 | 16 47,61 | 55 | 10 35 | 15 8,2 | 19 38 | 4 |
| 282 | 9 | L | 38 | 16 32,24 | 53 | 11 37 | 16 3,1 | 20 28 | 5 |
| 283 | 10 | M | 40 | 16 16,30 | 52 | 12 34 | 16 59,7 | 21 27 | 6 |
| 284 | 11 | M | 41 | 16 0,81 | 50 | 13 23 | 17 56,6 | 22 34 | 7 |
| 285 | 12 | G | 42 | 15 45,78 | 48 | 14 5 | 18 52,7 | 23 47 | 8 |
| 286 | 13 | V | 44 | 15 31,23 | 46 | 14 41 | 19 47,3 | — — | 9 |
| 287 | 14 | S | 45 | 15 17,19 | 44 | 15 12 | 20 40,6 | 1 3 | 10 |
| 288 | 15 | D | 46 | 15 3,69 | 43 | 15 41 | 21 32,7 | 2 20 | 11 |
| 289 | 16 | L | 47 | 14 50,72 | 41 | 16 7 | 22 24,6 | 3 36 | 12 |
| 290 | 17 | M | 49 | 14 38,32 | 39 | 16 35 | 23 16,9 | 4 55 | 13 |
| 291 | 18 | M | 50 | 14 26,51 | 38 | 17 6 | —— | 6 11 | 14 |
| 292 | 19 | G | 52 | 14 15,30 | 36 | 17 39 | 0 10,3 | 7 28 | 15 |
| 293 | 20 | V | 53 | 14 4,73 | 34 | 18 18 | 1 5,1 | 8 42 | 16 |
| 294 | 21 | S | 54 | 13 54,80 | 32 | 19 4 | 2 0,8 | 9 51 | 17 |
| 295 | 22 | D | 56 | 13 45,55 | 31 | 19 54 | 2 56,5 | 10 53 | 18 |
| 296 | 23 | L | 57 | 13 36,99 | 29 | 20 51 | 3 51,2 | 11 46 | 19 |
| 297 | 24 | M | 58 | 13 29,12 | 27 | 21 52 | 4 43,6 | 12 30 | 20 |
| 298 | 25 | M | 7 0 | 13 21,98 | 26 | 22 53 | 5 33,3 | 13 6 | 21 |
| 299 | 26 | G | 1 | 13 15,58 | 24 | 23 55 | 6 20,0 | 13 37 | 22 |
| 300 | 27 | V | 2 | 13 9,93 | 23 | —— | 7 4,4 | 14 4 | 23 |
| 301 | 28 | S | 4 | 13 5,05 | 21 | 0 56 | 7 46,7 | 14 28 | 24 |
| 302 | 29 | D | 5 | 13 0,93 | 20 | 1 57 | 8 28,1 | 14 48 | 25 |
| 303 | 30 | L | 7 | 12 57,60 | 18 | 2 58 | 9 9,2 | 15 10 | 26 |
| 304 | 31 | M | 8 | 12 55,06 | 17 | 4 1 | 9 51,3 | 15 33 | 27 |

### *Fasi della Luna.*

4 Luna nuova alle $20^h$ $14^m$

12 Primo quarto „ $7^h$ $10^m$

18 Luna piena „ $23^h$ $5^m$

26 Ultimo quarto „ $10^h$ $40^m$

Il giorno nel mese diminuisce di $1^h$ $34^m$.

16 La Luna è in Perigeo alle $11^h$

28 Id. Apogeo „ $6^h$

Il Sole entra nel segno *Scorpione* il giorno 23 alle ore 16 min. 6.

## Novembre 1899.

| GIORNO | | | TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE | | | | | | Età della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Il SOLE | | | La LUNA | | | |
| dell'Anno | del Mese | della Settimana | nasce | passa al meridiano | tramonta | nasce | passa al meridiano | tramonta | |
| | | | h m | h m s | h m | h m | h m | h m | |
| 305 | 1 | M | 7 9 | 12 12 53,33 | 17 16 | 5 4 | 10 34,8 | 15 57 | 28 |
| 306 | 2 | G | 11 | 12 52,40 | 14 | 6 10 | 11 20,9 | 16 24 | 29 |
| 307 | 3 | V | 12 | 12 52,30 | 13 | 7 17 | 12 10,0 | 16 57 | 1 |
| 308 | 4 | S | 13 | 12 52,99 | 11 | 8 24 | 13 2,3 | 17 36 | 2 |
| 309 | 5 | **D** | 15 | 12 54,51 | 10 | 9 29 | 13 57,7 | 18 24 | 3 |
| 310 | 6 | L | 16 | 12 56,85 | 9 | 10 29 | 14 54,8 | 19 21 | 4 |
| 311 | 7 | M | 18 | 13 0,02 | 7 | 11 21 | 15 52,3 | 20 27 | 5 |
| 312 | 8 | M | 19 | 13 4,02 | 6 | 12 25 | 16 48,7 | 21 38 | 6 |
| 313 | 9 | G | 20 | 13 8,83 | 5 | 12 42 | 17 43,3 | 22 53 | 7 |
| 314 | 10 | V | 22 | 13 14,47 | 4 | 13 14 | 18 35,7 | —— | 8 |
| 315 | 11 | S | 23 | 13 20,94 | 3 | 13 42 | 19 26,7 | 0 7 | 9 |
| 316 | 12 | **D** | 25 | 13 28,23 | 1 | 14 9 | 20 16,8 | 1 22 | 10 |
| 317 | 13 | L | 26 | 13 36,37 | 0 | 14 36 | 21 7,2 | 2 36 | 11 |
| 318 | 14 | M | 27 | 13 45,32 | 16 59 | 15 4 | 21 58,6 | 3 52 | 12 |
| 319 | 15 | M | 29 | 13 55,11 | 58 | 15 36 | 22 51,5 | 5 6 | 13 |
| 320 | 16 | G | 30 | 14 5,73 | 57 | 16 12 | 23 46,2 | 6 20 | 14 |
| 321 | 17 | V | 31 | 14 17,19 | 56 | 16 53 | —— | 7 31 | 15 |
| 322 | 18 | S | 33 | 14 29,48 | 56 | 17 42 | 0 41,9 | 8 36 | 16 |
| 323 | 19 | **D** | 34 | 14 42,61 | 55 | 18 38 | 1 37,5 | 9 34 | 17 |
| 324 | 20 | L | 35 | 14 56,56 | 54 | 19 37 | 2 31,8 | 10 22 | 18 |
| 325 | 21 | M | 37 | 15 11,34 | 53 | 20 38 | 3 23,5 | 11 2 | 19 |
| 326 | 22 | M | 38 | 15 26,94 | 52 | 21 41 | 4 12,2 | 11 36 | 20 |
| 327 | 23 | G | 39 | 15 43,34 | 52 | 22 43 | 4 57,9 | 12 4 | 21 |
| 328 | 24 | V | 41 | 16 0,54 | 51 | 23 44 | 5 41,4 | 12 28 | 22 |
| 329 | 25 | S | 42 | 16 18,53 | 50 | —— | 6 23,0 | 12 51 | 23 |
| 330 | 26 | **D** | 43 | 16 37,29 | 50 | 0 45 | 7 4,0 | 13 13 | 24 |
| 331 | 27 | L | 44 | 16 56,80 | 49 | 1 47 | 7 45,2 | 13 34 | 25 |
| 332 | 28 | M | 46 | 17 17,05 | 49 | 2 49 | 8 27,6 | 13 57 | 26 |
| 333 | 29 | M | 47 | 17 38,02 | 48 | 3 53 | 9 12,2 | 14 23 | 27 |
| 334 | 30 | G | 48 | 17 59,70 | 48 | 5 0 | 9 59,9 | 14 54 | 28 |

***Fasi della Luna.***

3 Luna nuova alle 11ʰ 27ᵐ

10 Primo quarto „ 14ʰ 35ᵐ

17 Luna piena „ 11ʰ 18ᵐ

25 Ultimo quarto „ 7ʰ 35ᵐ

Il giorno nel mese diminuisce di 1ʰ 9ᵐ.

12 La Luna è in Perigeo alle 13ʰ

25 Id. Apogeo „ 25ʰ

Il Sole entra nel segno *Sagittario* il giorno 22 ad ore 13 min. 0.

## Dicembre 1899.

| GIORNO | | | TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE | | | | | | Età della Luna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Il SOLE | | | La LUNA | | | |
| dell'Anno | del Mese | della Settimana | nasce | passa al meridiano | tramonta | nasce | passa al meridiano | tramonta | |
| | | | h m | h m s | h m | h m | h m | h m | |
| 335 | 1 | V | 7 49 | 12 18 22,05 | 16 47 | 6 7 | 10 51,3 | 15 30 | 29 |
| 336 | 2 | S | 50 | 18 45,05 | 47 | 7 14 | 11 46,2 | 16 15 | 30 |
| 337 | 3 | D | 51 | 19 8,68 | 47 | 8 18 | 12 44,0 | 17 11 | 1 |
| 338 | 4 | L | 52 | 19 32,90 | 46 | 9 15 | 13 43,1 | 18 15 | 2 |
| 339 | 5 | M | 53 | 19 57,68 | 46 | 10 2 | 14 41,7 | 19 26 | 3 |
| 340 | 6 | M | 55 | 20 23,01 | 46 | 10 43 | 15 38,4 | 20 41 | 4 |
| 341 | 7 | G | 56 | 20 48,84 | 46 | 11 18 | 16 32,5 | 21 57 | 5 |
| 342 | 8 | V | 57 | 21 15,15 | 46 | 11 47 | 17 24,2 | 23 13 | 6 |
| 343 | 9 | S | 58 | 21 41,90 | 46 | 12 14 | 18 14,3 | —— | 7 |
| 344 | 10 | D | 59 | 22 9,06 | 46 | 12 40 | 19 3,8 | 0 27 | 8 |
| 345 | 11 | L | 59 | 22 36,62 | 46 | 13 6 | 19 53,6 | 1 40 | 9 |
| 346 | 12 | M | 8 0 | 23 4,53 | 46 | 13 36 | 20 44,7 | 2 54 | 10 |
| 347 | 13 | M | 1 | 23 32,77 | 46 | 14 9 | 21 37,3 | 4 5 | 11 |
| 348 | 14 | G | 2 | 24 1,32 | 46 | 14 47 | 22 31,3 | 5 16 | 12 |
| 349 | 15 | V | 3 | 24 30,13 | 46 | 15 33 | 23 26,2 | 6 22 | 13 |
| 350 | 16 | S | 3 | 24 59,20 | 46 | 16 24 | —— | 7 23 | 14 |
| 351 | 17 | D | 4 | 25 28,47 | 47 | 17 22 | 0 20,7 | 8 14 | 15 |
| 352 | 18 | L | 5 | 25 57,94 | 47 | 18 23 | 1 13,4 | 8 58 | 16 |
| 353 | 19 | M | 5 | 26 27,57 | 47 | 19 27 | 2 3,7 | 9 34 | 17 |
| 354 | 20 | M | 6 | 26 57,32 | 48 | 20 29 | 2 51,0 | 10 5 | 18 |
| 355 | 21 | G | 6 | 27 27,17 | 48 | 21 31 | 3 35,7 | 10 32 | 19 |
| 356 | 22 | V | 7 | 27 57,09 | 49 | 22 33 | 4 18,1 | 10 55 | 20 |
| 357 | 23 | S | 7 | 28 27,04 | 49 | 23 33 | 4 59,2 | 11 16 | 21 |
| 358 | 24 | D | 8 | 28 56,99 | 50 | —— | 5 40,0 | 11 37 | 22 |
| 359 | 25 | L | 8 | 29 26,90 | 50 | 0 34 | 6 21,2 | 11 59 | 23 |
| 360 | 26 | M | 9 | 29 56,74 | 51 | 1 36 | 7 4,1 | 12 23 | 24 |
| 361 | 27 | M | 9 | 30 26,49 | 51 | 2 41 | 7 49,2 | 12 51 | 25 |
| 362 | 28 | G | 9 | 30 56,09 | 52 | 3 47 | 8 38,1 | 13 22 | 26 |
| 363 | 29 | V | 9 | 31 25,52 | 53 | 4 54 | 9 31,7 | 14 3 | 27 |
| 364 | 30 | S | 9 | 31 54,75 | 54 | 5 59 | 10 27,1 | 14 54 | 28 |
| 365 | 31 | D | 9 | 32 23,73 | 55 | 7 0 | 11 26,2 | 15 54 | 29 |

***Fasi della Luna.***

3 Luna nuova alle $1^h$ $48^m$

9 Primo quarto " $22^h$ $3^m$

17 Luna piena " $2^h$ $31^m$

25 Ultimo quarto " $4^h$ $57^m$

Il giorno nel mese diminuisce di $0^h$ $14^m$.

7 La Luna è in Perigeo alle $7^h$

23 Id. Apogeo " $0^h$

Il Sole entra nel segno *Capricorno* il giorno 22 alle ore 1 min. 56.

## Relazione intorno alla Memoria del Prof. Edoardo Martel: *Contribuzione all'anatomia dell'Hypecoum procumbens.*

L'A. premette innanzi tutto, che i botanici, i quali si occuparono fin'ora di esaminare i legami di affinità fiorali che uniscono l'*Hypecoum procumbens* alle *Fumariacee* ed alle *Crucifere*, considerano il fiore del primo quale derivato da quello degli altri due gruppi.

L'A. invece con questa memoria tende a dimostrare l'opposto; che cioè il fiore dell'*Hypecoum* per la regolarità e per la semplicità della sua architettura costituisce il tipo del diagramma fondamentale delle *Fumariacee* e delle *Crucifere*, il quale deriva da quello dell'*Hypecoum*.

A dimostrare quanto sia fondata la sua opinione l'A. si ferma a definire l'entità morfologica dei singoli organi fiorali, desumendola dal decorso dei fasci vascolari innervatori; coi quali poi confronterà in altra memoria quelli delle *Fumariacee* e *Crucifere*.

Dal complesso delle sue osservazioni e dalla discussione delle varie teorie sulla architettura fiorale, l'A. conclude non esservi motivo di alterare nè il diagramma nè la formola fiorale dell'*Hypecoum*, che rimangono quali furono fin qui rappresentati dagli Autori. La memoria è accompagnata da due tavole.

La Commissione ne propone la stampa.

G. Gibelli, *Relatore*.
L. Camerano.

*L'Accademico Segretario*
Andrea Naccari.

# CLASSE

DI

## SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

### Adunanza del 12 Giugno 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO BARONE GAUDENZIO CLARETTA

DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Peyron, Bollati di Saint-Pierre, Pezzi, Boselli, Cipolla, Perrero e Nani Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della precedente seduta (22 maggio 1898).

Quindi il Presidente dà comunicazione del testo di un telegramma inviato dalla Presidenza, a nome dell'Accademia, per associarsi alle solenni onoranze tributate in Roma al Socio corrispondente prof. Francesco Schupfer, nella ricorrenza del 35° anniversario del suo insegnamento.

Comunica pure il programma di un concorso bandito dalla R. Accademia dei Georgofili sul tema: *Studio delle relazioni che intercedono fra capitale e lavoro nella mezzeria toscana.*

Il Socio Segretario C. Nani offre in omaggio alla Classe un suo opuscolo: *Istromenti sigillati e stile di sigillato, contributo alla storia dell'antica legislazione sabaudo-piemontese* (Torino, 1898).

Il Socio Claretta, a nome anche dei Socii Ferrero e Cipolla insieme con lui delegati ad esaminare una memoria del Dott. Arturo Segre, intitolata: *La marina militare sabauda ai tempi di Emanuele Filiberto e l'opera politico-navale di Andrea*

*Provana di Leynì,* riferisce sulla medesima proponendone la lettura alla Classe. Questa approva la proposta, e quindi la inserzione della detta memoria nei suoi volumi accademici.

Il Socio G. Claretta, proseguendo la lettura della sua Memoria sulle principali vicende del feudo di Cisterna nell'Astigiano, comincia a considerare i conflitti fra Roma e la Mensa vescovile d'Asti per l'investitura di quel feudo, ottenuta dal capitano Torquato Torto da Castelnuovo-Scrivia. La mensa d'Asti evocava in giudizio il Torto, e ricorreva anche al duca Emanuele Filiberto, il quale con un rescritto dato a Nizza il 12 dicembre 1559 dichiarava che non intendeva di recare il menomo pregiudizio ai pretesi diritti di quella Curia. Intanto il Torto era costretto a salvaguardia dei suoi diritti di dar una capatina a Roma, non senza notevole dispendio, sapendo bene che cosa fosse un viaggio a quei giorni, dove otteneva bensì qualche provvisione favorevole alle sue mire, ma inefficace a liberarlo dalla sequela dei guai ond'era omai impotente a liberarsi, ancorchè il Duca assistesse il feudatario della Cisterna nel fargli rendere rispetto dai sudditi. E qui l'autore riferisce i costituti di varii di quei Cisternesi chiamati in giudizio; dalle cui deposizioni si scorge, come omai quel popolo fosse stanco di essere soggetto a così frequente mutazione di signoria; dai quali documenti l'autore trae argomento a provare, come gli Astigiani, ad esempio dei Monferrini e di alcune popolazioni delle Langhe, tutti d'indole briosa, fossero men proclivi di altri della dizione Sabauda, a tollerare pazientemente il giogo. Senonchè l'intromissione del Duca negli interessi della Cisterna dava nell'occhio a Roma, che non lasciò di farne amare rimostranze, tanto al Duca, quanto al Vescovo d'Asti. Intanto già nel 1567 il capitano Torto risultava passato ad altra vita, e il retaggio suo litigioso veniva trasmesso alla sua figlia Isabella, congiuntasi in matrimonio col marchese Borso Acerbi di Milano.

Considera indi l'autore le relazioni speciali che pel feudo della Cisterna ebbe la Corte di Roma col duca Carlo Emanuele I, successore di Emanuele Filiberto, il quale avendo interesse di tenersi per altre ragioni affetta la Santa Sede, le diè appoggio in una spedizione armata avvenuta nel luglio del-

l'anno 1581, alla quale presero parte, oltre al conte Valperga di Masino, due cavalieri di Malta di Mondovì, Ettore Vasco e Ludovico Vivalda, nonchè il noto Guido Piovene da Vicenza, suddito veneto a' stipendii del Duca. Agli uomini di spada erano stati associati uomini di cappa; e col segretario della Nunziatura di Torino, Filippo Arbaudi, eravi il giureconsulto Filippo Bucci, cavaliere e poscia cancelliere dell'Ordine Mauriziano.

Quell'apparato di forze non mancò d'incutere timore agli assediati nel castello della Cisterna che dovettero arrendersi.

Ma posteriormente rappacificatesi le antiche contestazioni almeno in massima parte, come avveniva in quei tempi, il feudo della Cisterna passava al figlio dell'Isabella Torto, marchese Giovanni Acerbi, che nel 1650 lo alienava al marchese di Voghera, Francesco, dell'illustre famiglia dei Dalpozzo di Biella, sotto i quali la Cisterna veniva innalzata a principato col privilegio della zecca.

L'autore pone in tal guisa termine alla sua Memoria, facendo parecchie osservazioni sulle condizioni di quel feudo e di quei popoli, palleggiati per varii secoli d'uno in altro feudatario, ciascun dei quali pretendeva la ragione per sè e voleva riversare il torto sull'altro; mentre i poveri Cisternesi potevano a buon diritto esclamare col poeta, che

*Quicquid delirant reges plectuntur Achivi.*

Anche di questo lavoro la Classe delibera la pubblicazione nei volumi delle Memorie.

## Relazione sulla Memoria del Dott. Arturo Segre, avente per titolo:

*La marina militare sabauda ai tempi di Emanuele Filiberto, e l'opera politico-navale di Andrea Provana di Leynì dal 1560 al 1571.*

---

L'autore, cominciando dal ritorno nei suoi stati del vincitore di S. Quintino (1559), ci presenta subito il Provana che gli va incontro sin presso Marsiglia, e dal quale più non si scompagna che negli intervalli richiesti dai varii gravi incarichi affidatigli.

Dopo alcuni aneddoti relativi al successivo breve soggiorno del Duca a Nizza, e dopo alcune particolarità che rischiarano la giovinezza e le condizioni della famiglia Provana, il dottor Segre ci viene a tracciare un quadro storico sulla marina piemontese, della quale ci espone sommariamente le vicende dai tempi antichi sino a quelli di E. Filiberto, risoltosi a ricostituire questo punto notevole della forza militare del piccolo suo Stato. Ed ecco il giovine Provana consacrarsi all' opera ardua, nè scevra di attriti, sia nel còmpito di dirigere la costruzione delle galee, sia nel trattare con altri capitani ed avventurieri.

Quindi nel 1560 già noi possiamo vedere la nostra marina in possesso di quattro galere, due costrutte sotto gli occhi del sig. di Leynì, e due acquistate da altri. Ma il Duca desiderava che le quattro galee raggiungessero il numero di dieci: e a conseguire questo scopo in massima si adopera il Provana che l' ottiene sullo scorcio del 1561; non lieve assunto, ponendo mente al tempo ed ai mezzi finanziari ond'esso poteva disporre.

Senonchè Emanuele Filiberto, avute le sue dieci galee, ne desiderava altre due ancora, donde nuovi impegni dei suoi uffiziali e ministri.

Nel racconto di tutti questi fatti e nelle questioni amministrative che poi vi si inframettevano, le pagine del lavoro del Segre ci dànno notizie ch'egli potè ricavare compulsando, non solamente gli archivi di Torino, ma quelli altresì di altre città italiane, come di Modena e di Venezia.

Ed i documenti raggranellati gli consentirono di aggiungere notizie maggiori di quelle già note, su alcune spedizioni marinaresche, succedute in quel frattempo. Tale è in sostanza l'argomento del primo capo dell' opera del Segre. Il quale nel secondo considera i fatti succeduti dalla nota pace di Castel-Cambresis in poi.

Ivi ei comincia a discorrere della missione affidata dal Duca al Provana di recarsi alla Corte di Francia per profferire a Francesco II ed a sua madre Catterina de' Medici i suoi servizi, nel caso fossero per tornare loro accetti in quei tempi delle note guerre civili di quel regno. Poscia discorre di caccie date a navi turche e di corsari; e ci rivela un conflitto avuto colla repubblica di Venezia per essersi saccheggiate due sue navi che avevano a bordo sudditi turchi. Così pure egli tratta di alcune questioni tra il Duca e la Repubblica di Genova sul diritto di Villafranca, valendosi di documenti dell'archivio di quella città.

I viaggi del Provana poi si rinnovano frequenti negli anni 1562-1564, nei quali i corsari, profittando dei casi generali delle potenze, infestavano con maggiore sicurezza quei mari. Ma egli è nel 1565 che il Provana, ammiraglio della nostra marina, veniva a stabilire in modo sicuro la fama che meritamente erasi procacciata.

Solimano segretamente mirava su Malta, e il Provana, di mandato di E. Filiberto, salpa da Villafranca colle tre galee: la *Capitana*, la *Margherita* e la *Moretta*, per unire gli sforzi del valor bellico subalpino a quello degli altri principi della Cristianità tementi la ferocia turchesca.

Il nostro autore dà qui molte notizie sull'assedio di Malta del 1565 e sul soccorso introdottovi dall' ammiraglio Provana. Non minor importanza ha il capo terzo, nel quale il senno del Provana fu messo in pratica in uffici politici di grave momento. Gli Ugonotti avevano molte ramificazioni nel Nizzardo, ove ad interessi religiosi andavano frammisti interessi privati e politici. Le condizioni di questa provincia della Dizione Sabauda erano

tutt'altro che liete, e facevano presagire piuttosto male, essendovi implicate famiglie magnatizie, fra le quali i Beuil del ramo dei sig. di Ascros.

Qui il nostro autore viene a discussioni, nelle quali coll'aiuto degli scritti del Gioffredo e di parecchi altri, e mercè nuovi documenti raccolti da lui, è in caso di descriverci lo stato di quelle contrade, nonchè i maneggi del Provana con quelle famiglie secondo l'incarico che aveva avuto dal Duca. Il quale stanco delle tergiversazioni, ormai erasi risolto di appigliarsi a mezzi coercitivi, nei quali ebbe parte il Provana, che per altro sul principio nel timore si avesse a fomentare male maggiore, aveva consigliato partiti di conciliazione.

Erasi bensì venuto a patti, ma non tardò a manifestarsi la tenacia dei rubelli con cui il Duca era costretto a capitolare. Il mal seme poco dopo ripullulava, ed i signori di Ascros, profittando dei nuovi tumulti esterni, non tardarono minacciosi a rialzare il capo. E grande vantaggio per i dissidenti fu la disdetta cagionata dal caro dei cereali nel Nizzardo. L'affare riuscì anche intricato a cagione di urti avuti con Roma, che per essersi catturata una nave carica di grano, minacciava d'interdetto la città; e fu mestieri di porre in chiaro i fatti e l'incolpabilità del Duca in quell'avvenimento come riuscì all'autore di fare col mezzo di documenti ricavati dall'archivio Vaticano.

Ma intanto le questioni in fatto di religione non si appianavano; anzi minacciavano di farsi ancora più serie. E qui il nostro autore, col mezzo di una quantità di documenti qua e là raccolti, viene ad informarci, come di particolarità seguite fra il Duca e il signor di Monaco, così dell'orditura di una congiura su ampia scala, la quale aveva a capo quel signore di Montbrun, uno dei principali ugonotti, che ricoveratosi in Provenza dopo le avute sconfitte, manteneva relazioni segrete coi suoi correligionari del Nizzardo. Senonchè questa volta fu dato al Duca di sedare quei moti col processo ai principali sobillatori e colla meritata loro punizione ad esclusione del Montbrun. Ed ancor qui l'opera del Provana era riuscita assai efficace.

Infine il capo quarto del lavoro del dottor Segre tratta nei suoi particolari quanto si riferisce alla celebre battaglia di Lepanto, nella quale, com'è noto, E. Filiberto accedette alla gran lega cristiana. Qui naturalmente l'autore potè giovarsi dei molti

scritti pubblicatisi, specie in questi ultimi anni, su quell'avvenimento memorabile. Mercè però le sue indagini in parecchi archivi, ancor qui egli reca notevole contributo di notizie, che non mancano d'interesse: e termina il suo lavoro col far conoscere un poema spagnuolo dimenticato in Italia: *La felicissima vitoria concedida dal Cielo al Señor D. Iuan De Austria en el Golfo De Lepanto de la poderosa armada Othomana opera di Gerolamo Corte Real, cavaliere Portoghese,* e riporta le strofe che fanno elogio dell'armata Savoina, e del suo ammiraglio.

E così coll'anno 1571 ha compimento la narrazione delle imprese marinaresche dell'ammiraglio Provana di Leynì: molte lettere del quale compaiono fra i ventuno documenti nell'appendice a questo lavoro.

Chiarezza nella narrazione, lucidità d'idee, critica giudiziosa e temperanza severa d'opinioni, che non sempre sono osservate da parecchi che corrono lo stesso arringo, dovizia di documenti che concorrono a rendere originale il lavoro in discorso persuadono i sottoscritti a conchiudere che l'opera del dottor Segre possa essere ritenuta degna dell'approvazione della Classe, per essere quindi pubblicata nelle memorie Accademiche.

*I Commissarii*
G. Claretta, *Relatore.*
E. Ferrero.
C. Cipolla.

—

*L'Accademico Segretario*
Cesare Nani.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e Reali Principi

# CLASSE

DI

## SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

### Adunanza del 19 Giugno 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ALFONSO COSSA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

---

Sono presenti i Soci: Bizzozero, Direttore della Classe, Berruti, D'Ovidio, Mosso, Spezia, Camerano, Segre, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti e Naccari Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Presidente comunica una lettera del Prof. R. Bunsen, che ringrazia per la sua nomina a Socio straniero.

Il Socio Camerano presenta a nome del Prof. Federico Sacco alcuni opuscoli che trattano argomenti di Geologia, e a nome del Dott. Giuseppe Sperino un'opera intitolata: *Anatomia del Cimpanzé.*

Il Presidente fa menzione delle seguenti opere inviate in dono dagli autori:

1° *Origine del sistema planetario eliocentrico presso i Greci,* memoria del Socio nazionale G. V. Schiaparelli,

2° *Elemente der Gesteinslehre,* del Socio corrispondente E. Rosenbusch,

3° *Calcoli di stabilità delle scale metalliche aeree Viarengo,* del Socio Camillo Guidi.

Il Socio Foà, anche a nome del Socio Bizzozero, legge la relazione sulla memoria del Dott. Antonio Cesaris-Demel, intitolata: *Sull'azione tossica e settica di alcuni microorganismi patogeni sul sistema nervoso centrale.* Conforme alle proposte della Commissione la memoria vien letta alla Classe e quindi accolta nei volumi accademici.

In simil modo dietro relazione favorevole dei Soci Volterra e Naccari, viene accolta la memoria del Dott. G. B. Rizzo, intitolata: *Sopra le recenti misure della costante solare.*

Vengono poi accolti per l'inserzione negli *Atti* i seguenti scritti:

1° *Su una idroetildicianmetildiossipiridina,* nota del Socio Guareschi e del Dott. Ernesto Grande,

2° *Contribuzioni di Geologia chimica. Esperienze sul quarzo e sull'opale,* nota del Socio Spezia,

3° *Alcune osservazioni sul calcolo dell'errore medio di un angolo nel metodo delle combinazioni binarie,* nota del Socio Jadanza,

4° *Contribuzione allo studio della istologia normale e patologica del midollo delle ossa,* nota del Socio Foà,

5° *Sull'ematopoesi nella lampreda,* nota del Dott. Maurizio Ascoli, presentata dal Socio Bizzozero,

6° *Un coccidio parassita nei trombociti della rana,* nota del Dott. Ermanno Giglio-Tos, presentata dal Socio Camerano,

7° *Sull' integrazione dell'equazione* $\Delta_2\Delta_2 u = 0$, nota del Prof. Tullio Levi-Civita, presentata dal Socio Naccari a nome del Socio Volterra,

8° *Sulla teoria della trasformazione delle equazioni a derivate parziali con due variabili indipendenti,* nota del Prof. Onorato Niccoletti, presentata dal Socio Naccari a nome del Socio Volterra,

9° *Sulla propagazione del calore,* nota del Prof. Lauricella, presentata dal Socio Naccari, a nome del Socio Volterra,

10° *Sulle funzioni olomorfe e meromorfe nel campo razionale e nel campo ellittico,* nota del Dott. Tito Cazzaniga, presentata dal Socio Naccari a nome del Socio Volterra,

11° *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni reali discontinue di variabile reale,* nota del Dott. Severini, presentata dal Socio Naccari a nome del Socio Volterra.

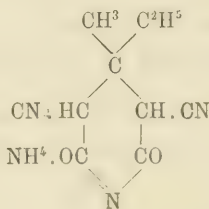
# LETTURE

## *Su una idroetildicianmetildiossipiridina;*

Nota del Socio ICILIO GUARESCHI e Dott. ERNESTO GRANDE.

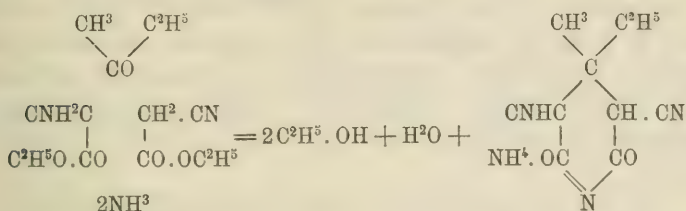
In due note precedenti (1) pubblicate nel principio del 1897, abbiamo fatto notare che per l'azione dell'ammoniaca e dell'etere cianacetico sul metiletilchetone si formava la *dicianmetilglutaconimide*, e in determinate condizioni anche un *composto intermedio* instabilissimo, il quale per l'azione dell'acqua si decompone producendo la dicianmetilglutaconimide, dell'acido cianidrico e un gas combustibile che per le sue proprietà e per l'analisi eudiometrica era da noi stato riconosciuto come *etano* $C^2H^6$.

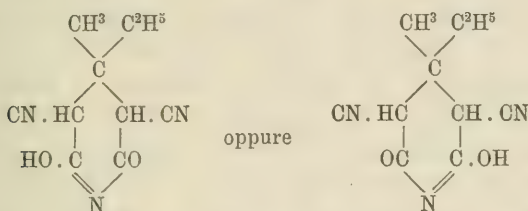
Studiando questo composto intermedio e un altro prodotto che si forma nella reazione abbiamo trovato modo di spiegare come si produce l'etano.

Dopo numerosi e replicati saggi abbiamo potuto stabilire con sicurezza che il composto intermedio è il sale di ammonio, instabilissimo, di un composto bicianico:

```
       CH³  C²H⁵
         \  /
          C
         / \
CN.HC       CH.CN
    |        |
NH⁴.OC       CO
      \     /
         N
```

(1) Guareschi, *Nuove ricerche sulla sintesi di composti piridinici e la reazione di Hantzsch*, “ Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, adunanza 21 febbraio 1897, vol. XXXII. — E. Grande, *Azione dell'etere cianacetico sopra il metiletilchetone in presenza di ammoniaca*, Ivi, T. XXXII.

che si forma dall'etere cianacetico col metiletilchetone e l'ammoniaca nel modo seguente:

```
      CH3  C2H5                                   CH3  C2H5
        \  /                                        \  /
         CO                                          C
                                                    /  \
  CNH2C       CH2.CN                           CNHC     CH.CN
     |          |       = 2C2H5.OH + H2O +        |       |
C2H5O.CO     CO.OC2H5                        NH4.OC      CO
                                                   \\  /
       2NH3                                          N
```

Questo sale ammonico, che è stabile in liquido alcalino, diluito con acqua e trattato con acido cloridrico lascia precipitare il derivato acido corrispondente che può denominarsi *idroetil*ββ'*dician*γ*metil*αα'*diossipiridina* (1) e che per le ragioni già addotte da uno di noi in una prima memoria sui derivati della cianglutaconimide si può scrivere con:

```
        CH3  C2H5                       CH3  C2H5
          \  /                            \  /
           C                               C
          /  \                            /  \
    CN.HC     CH.CN                 CN.HC     CH.CN
        |      |         oppure         |      |
     HO.C     CO                       OC     C.OH
         \\  /                           \  //
           N                               N
```

Questo corpo che si ha dal composto intermedio sovraccennato è identico con una sostanza cristallizzata in lamine ottenuta da uno di noi nel 1894 direttamente per l'azione dell'etere cianacetico e dell'ammoniaca sul metiletilchetone. Non ne fu proseguito allora lo studio sia perchè erano in corso altre ricerche, sia perchè le analisi non conducevano ad una formula esatta per le ragioni esposte nella nostra nota *Osservazioni sull'analisi elementare.* Ed invero allora il dott. Quenda per incarico di uno di noi analizzando quel composto trovava:

$$C = 58.57 \quad e \quad 57.89$$
$$H = 5.4 \quad e \quad 5.3$$
$$N = 21.7$$

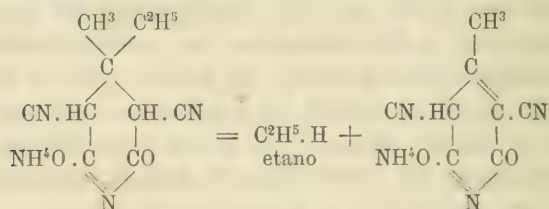
(1) Diamo questo nome di *idroetildicianmetildiossipiridina* per indicare che contiene $C^2H^5$ e H in istato da potersi eliminare sotto forma di etano.

Uno di noi riprendendo già nel 1895, in questo laboratorio, lo studio della reazione del metiletilchetone sull'etere cianacetico e l'ammoniaca ottenne insieme alla ββ'dicianmetilglutaconimide anche la sostanza fusibile 192°-193°, la quale analizzata diede risultati sconcordanti specialmente nel dosamento dell'azoto. Anche il dott. Pasquali analizzando lo stesso composto, in questo laboratorio per invito del direttore, trovava 26.47 e 26.86 % di azoto.

Scoperta la causa per la quale il dosamento dell'azoto può dare risultati molto erronei e riconosciuto che in questo caso insieme all'azoto si sviluppa dell'*etano*, si riuscì ad avere analisi concordantissime non solo della sostanza ma anche de' suoi derivati e potè essere stabilita con sicurezza la formola $C^{10}H^{11}N^3O^2$ già resa probabile per altre vie.

Perciò abbiamo ripreso insieme lo studio di questa sostanza, molto interessante.

Si noterà che mentre il composto intermedio ossia il sale ammonico dell' idroetilββ'dicianγmetildiossipiridina è instabilissimo e prontamente con acqua si decompone in *etano* e dicianmetilglutaconimide, questo composto in lamine cioè la idroetilββ'dicianγmetildiossipiridina libera è stabilissima, ed è pure stabilissima in presenza degli acidi ed anche di un *eccesso* di alcali, però non appena questo corpo è *neutralizzato* con ammoniaca o con un carbonato alcalino si decompone prontamente in etano e nel sale ammonico o sodico della dicianmetilglutaconimide:

```
    CH³  C²H⁵                           CH³
      \  /                               |
       C                                 C
      /  \                              / \\
CN.HC    CH.CN                   CN.HC    C.CN
   |      |      = C²H⁵.H +         |      |
NH⁴O.C    CO       etano        NH⁴O.C    CO
     \\  /                           \\  /
       N                               N
```

Interessante è pure, come si vedrà, l'azione del calore.

Lo studio di questa sostanza è importante anche perchè serve a spiegare la formazione, la composizione e la costituzione di altre sostanze simili cristallizzate in lamine, che anch'esse coll'azione del calore o neutralizzate cogli alcali, sviluppano idrocarburi, e che si formano in modo simile dal metilessilchetone,

dal metilbutilchetone, dal metilpropilchetone e dall'acetone ordinario; devono essere senza dubbio composti omologhi di quello da noi avuto dal metiletilchetone.

## Parte sperimentale.

In una delle prime esperienze la idroetilββ'dicianγmetilαα'diossipiridina fu ottenuta nel modo seguente: 30 cm³ di metiletilchetone mescolati con 25 cm³ di ammoniaca della densità 0.925 furono ben agitati per 24 ore con una turbina Rabe poi vi si aggiunsero 10 cm³ di etere cianacetico. Dopo aver agitato sino ad avere un liquido omogeneo, giallo, si lasciò evaporare a b. m. Il residuo lavato bene con etere si fa cristallizzare dall'acqua bollente. Cristallizza prima una sostanza in lamine incolori, fusibili a 192°-193° e dalle acque madri si ha il sale di ammonio della ββ'dicianγmetilglutaconimide o ββ' dicianγmetilαα'diossipiridina già descritta.

In questo modo però si ottiene poco prodotto e si trovò più conveniente operare come segue: si mescolano 9 grammi di metiletilchetone con 30 gr. di ammoniaca acquosa al 20 % e dopo aver agitato per pochi minuti si aggiungono 28 gr. di etere cianacetico. Si sviluppa calore ed a poco a poco il liquido diventa giallo, omogeneo. Dopo 24 ore si diluisce il liquido con 100 cm³ di acqua e si acidifica con 100 cm³ di acido cloridrico a 1.06. Precipita così circa 8 gr. di composto in lamine che dopo lavato, basta cristallizzarlo una volta dall'alcool diluito o dall'acqua bollente per averlo puro, fusibile a 193°.

Avendo lasciato 48 ore a sè la mescolanza, il rendimento non fu maggiore. Meglio ancora conviene operare nel modo seguente usando l' ammoniaca alcolica invece dell' ammoniaca acquosa.

9 gr. di metiletilacetone (1 mol.) si sciolgono in 28 cm³ di etere cianacetico (2 mol.) poi si aggiungono 50 gr. di ammoniaca alcolica al 12.6 % (circa 3 mol.). La miscela limpida e incolora diventa a poco a poco gialla e sviluppa poco calore; dopo alcune ore incomincia depositare dei cristalli ed infine dopo 24 ore si ha una massa compatta cristallina, che è appunto il sale ammonico del nuovo composto o ciò che prima si disse composto intermedio. Diluita la massa con egual volume di acqua o anche un poco di più, si acidula il liquido aggiungendo

a poco a poco dell'acido cloridrico a 1.06 di densità. Si ha così un precipitato bianco cristallino, che raccolto su filtro, lavato con poca acqua alla pompa, e poi ricristallizzato dall'acqua bollente fornisce la idroetildicianmetildiossipiridina in belle lamine brillanti. In questo modo si ottengono 14 a 15 gr. di prodotto purissimo.

Il prodotto puro e disseccato a 100° sottoposto all'analisi diede i risultati seguenti:

I. Gr. 0.1937 di sostanza fornirono 0.4113 di $CO^2$ e 0.0923 di $H^2O$.

II. Gr. 0.2367 fornirono 0.5084 di $CO^2$ e 0.1161 di $H^2O$.

III. Gr. 0.1754 fornirono 33 cm³ di N a 20° e 745 mm.

IV. Gr. 0.098 fornirono 19.6 cm³ di N a 24° e 742 mm.

V. Gr. 0.1214 fornirono 0.262 di $CO^2$ e 0.060 di $H^2O$.

VI. Gr. 0.1794 diedero 0.381 di $CO^2$ e 0.087 di $H^2O$.

VII. Gr. 0.1538 fornirono 27.4 cm³ di N a 13°.5 e 740 mm. L'azoto non bruciava.

VIII. Gr. 0.1192 fornirono 22 cm³ di N a 21° e 745 mm. L'azoto non bruciava.

Da cui la composizione centesimale seguente:

| | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C = | 57.89 | 58.57 | — | — | 58.85 | 57.92 | — | — |
| H = | 5.3 | 5.4 | — | — | 5.49 | 5.38 | — | — |
| N = | — | — | 20.99 | 21.08 | — | — | 20.30 | 20.13 |

Numeri che conducono alla formula $C^{10}H^{11}N^3O^2$ per la quale si calcola:

$$C = 58.53$$
$$H = 5.36$$
$$N = 20.48$$

La idroetil$\beta\beta'$dician$\gamma$metil$\alpha\alpha'$diossipiridina cristallizza in lamine sottili, leggiere, brillanti, incolore, fusibili a 193° in liquido incoloro che per raffreddamento si rappiglia in massa cristallina. È poco solubile nell'acqua fredda (1 p. in circa 530 p. di acqua a 22°), molto più solubile nell'acqua bollente, solubile in alcol e nell'acido acetico glaciale, dal quale per lenta evaporazione può

aversi in grossi cristalli. È poco solubile nel cloroformio e nell'etere. La soluzione acquosa ha reazione acida.

Neutralizzata con ammoniaca dà un sale di ammonio solubile, alterabile, che in contatto dell'acqua prontamente si decompone in *etano* e in sale di ammonio della dicianmetilglutaconimide, come è indicato nell'esposizione data più sopra. Insieme a un poco di acido cianidrico. E che il gas che si sviluppa sia veramente *etano*, oltre che le proprietà fisiche e chimiche lo dimostra l'analisi eudiometrica:

| | Volume letto | Temperatura | Pressione in millim. | Volume a 0° e 1 m. |
|---|---|---|---|---|
| Gaz impiegato . . . | 98,33 | 13° | 261,5 | 24,54 |
| Dopo l' aggiunta dell'ossigeno . . . | 380,92 | 12°,5 | 538,0 | 195,95 |
| Dopo aggiunta l'aria . | 538,47 | 11°,5 | 691,0 | 357,00 |
| Dopo la combustione . | 488,83 | 12°,5 | 639,5 | 298,93 |
| Dopo l'azione della potassa . . . . . | 442,37 | 13°,0 | 590,0 | 249,14 |

| | trovato | calcolato per $C_2H_6$ |
|---|---|---|
| Ossigeno consumato totale | 83,32 | 85,89 |
| „ „ per il C | 49,79 | 49,08 |
| „ „ per l'H | 33,53 | 36,81 |

e facendo il volume del gaz = 1 si ha

| | trovato | calcolato per $C_2H_6$ |
|---|---|---|
| Gaz impiegato . . . . . | 1 | 1 |
| Ossigeno consumato totale | 3,39 | 3,5 |
| „ „ per il C | 2,02 | 2,0 |
| „ „ per l'H | 1,36 | 1,5 |

Le letture erano fatte sempre sopra i gas disseccati.

La diciannetilidroetildiossipiridina messa in contatto con una soluzione acquosa di soda caustica nel rapporto di 1 mol. di $C^{10}H^{11}N^{3}O^{2}$ per 2 mol. o di 3 mol. di NaOH *non* sviluppa gas etano, mentre lo sviluppa se si neutralizza con 1 mol. di NaOH. La soda si comporta come l'ammoniaca.

In modo simile si comporta colle soluzioni di carbonato sodico; in questo caso però il gas si sviluppa tanto con $^1/_2$ mol. di $Na^2CO^3$ quanto con 1 mol. di $Na^2CO^3$.

Anche per neutralizzazione con metilamina sviluppa gas etano.

La idroetildicianmetildiossipiridina in presenza di soda caustica o di carbonato sodico si comporta come un *acido monobasico*. Questo composto è instabilissimo allo stato di sale neutro alcalino mentre è stabile in presenza di un eccesso di alcali o di un acido; dalla soluzione alcalina si può riprecipitare inalterato, coll'acido cloridrico.

La soluzione acquosa satura della ββ'diciannetilidroetildiossipiridina non precipita col nitrato d'argento; se si tratta la sostanza solida con acqua e poca ammoniaca in modo che il liquido rimanga ancora acido e si filtra, si ha una soluzione di sale ammonico che dà le reazioni seguenti:

Col *nitrato d'argento* dà un precipitato bianco cristallino pochissimo solubile nell'acqua fredda, solubile nell'acqua bollente da cui cristallizza, solubile nell'acido nitrico a freddo.

Coll'acetato neutro di rame dà a poco a poco un precipitato verde costituito da piccoli cristalli spesso riuniti a rosetta. Precipita pure col solfato di rame.

Col cloruro ferrico dà precipitato rosso solubile in eccesso di reattivo.

Col *nitrito potassico* e poco acido solforico diluito dà colore giallo vivo che rimane anche dopo alcuni giorni, e che ricorda la stessa reazione data dal (3)metilpirrazolone di Knorr.

Sale di ammonio. Questo è ciò che precedentemente si è denominato composto intermedio. Si forma come abbiamo visto quando si mescolano i tre corpi: metiletilchetone, etere cianacetico e ammoniaca. Raccolto rapidamente il precipitato su filtro, lavato con ammoniaca diluita, e disseccato nel vuoto sull'acido solforico, si ha un prodotto bianco cristallino che non si

può ricristallizzare senza decomporlo e che per la sua facile decomposizione coll'acqua si trova spesso mescolato col sale ammonico della dicianmetilglutaconimide.

Gr. 0.408 di sale ammonico così preparato e secco nel vuoto sull'acido solforico, distillati con MgO fornirono 0.3867 di cloroplatinato di ammonio, pari a 0.0296 di $NH^3$.

Da cui:

| | trovato | calcolato per $C^{10}H^{10}N^3(NH^4)O^2$ |
|---|---|---|
| $NH^3$ % | 7.26 | 7.65 |

Questo sale sciolto in acqua, e acidulata la soluzione con acido cloridrico, lascia cristallizzare la idroetildicianmetildiossipiridina.

In presenza di acqua si decompone prontamente con effervescenza sviluppando etano; producendo anche dell'acido cianidrico e lasciando poi cristallizzare il sale di ammonio della dicianmetilglutaconimide. Il gas *etano* che si sviluppa non contiene traccia di gas non saturi, ed ha tutti i caratteri del gas etano puro. In una combustione, ad esempio, nell'eudiometro di Bunsen, diede i risultati seguenti:

*Gas prodotto da scomposizione del composto intermedio nell'acqua.*

| | Volume letto | Temperatura | Pressione del gaz | Volume a 0° e 1 m. |
|---|---|---|---|---|
| Gaz impiegato . . . | 74,89 | 24° | 238$^{mm}$ | 16,32 |
| Dopo aggiunta di O . | 279,57 | 24°,5 | 440,5 | 112,99 |
| Dopo aggiunta di aria | 494,38 | 24° | 653 | 296,69 |
| Dopo combustione . . | 455,50 | 25° | 612,5 | 255,54 |
| Dopo la KOH . . . | 420,54 | 23° | 574,0 | 222,6 |

| | trovato | calcolato per $C_2H_6$ |
|---|---|---|
| Ossigeno consumato totale | 57,77 | 57,12 |
| „ „ per C | 32,94 | 32,64 |
| „ „ per H | 24,83 | 24,48 |

e facendo il volume del gas impiegato = 1

| | trovato | calcolato |
|---|---|---|
| Ossigeno consumato totale | 3,52 | 3,5 |
| " " per C | 2,01 | 2,0 |
| " " per H | 1,50 | 1,5 |

Non abbiamo dosato la quantità di acido cianidrico che si forma in questa reazione. L' acido cianidrico proviene senza dubbio dai gruppi CN contenuti in questo composto, per una reazione secondaria riducente, le cui condizioni non abbiamo ancora studiato.

Sale d'argento. Si prepara sciogliendo la idroetildicianmetildiossipiridina in acqua con poca ammoniaca in modo che resti un poco di composto indisciolto e che la soluzione sia ancora acida; il liquido filtrato si tratta con un eccesso di soluzione di nitrato d'argento. Lasciato depositare il precipitato, si raccoglie su filtro e si lava.

In una preparazione da 1.083 di lamine si ottenne 1.446 di sale d'argento.

All'analisi diede i risultati seguenti:

I. Gr. 0.2742 di sale secco nel vuoto sull'acido solforico fornirono 0.0952 di Ag.

II. Gr. 1.1332 di sale secco a 100°, sospesi in acqua e trattati a caldo con acido solfidrico fornirono 0.4508 di $Ag^2S$.

III. Gr. 0.1768 di sostanza fornirono 21.6 cm³ di N a 13° e 755 mm.

Da cui:

| | trovato | | | calcolato per $C^{10}H^{10}N^3AgO^2$ |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | |
| Ag = | 34.71 | 34.64 | — | 34.61 |
| N = | — | — | 14.24 (1) | 13.46 |

(1) Quest'analisi fu fatta quando ancora non ci eravamo accorti che il gas N poteva essere mescolato con idrocarburi.

Questo sale d'argento è stabile alla luce; coll'acqua non si altera, però in contatto con la quantità teorica di ammoniaca, sufficiente per rigenerare il sale ammonico, si scompone dando al solito del gas *etano*.

Col gas solfidrico rigenera la bicianmetilidroetildiossipiridina inalterata: gr. 1.1332 di sale fornirono coll'acido solfidrico 0.4508 di solfuro d'argento e dal liquido filtrato si riottennero 0.7266 di bicianmetilidroetildiossipiridina, ciò che corrisponde quasi alla quantità teorica e dimostra che questo composto non è alterato dall'acido solfidrico.

Sulla preparazione dell'etano. Noi crediamo che la decomposizione coll'acqua del sale ammonico o sodico neutro della idroetildicianmetilchetildiossipiridina costituisca uno dei migliori, metodi, se non il migliore, per ottenere presto e in quantità il gas *etano purissimo*. Da 100 gr. di lamine che si preparano in brevissimo tempo, si possono ottenere alcuni litri di gas etano purissimo. Senza bisogno di depurarlo come è necessario fare con altri processi, quali quello di Köhnlein o di Gladstone e Tribe, come ha fatto Hainlen (1).

La formazione dell'etano in questa reazione può servire per fare una elegante esperienza di corso. Si mette entro un tubo munito di robinetto e pieno di mercurio, in comunicazione mediante tubo di gomma con un recipiente contenente pure del mercurio, una soluzione della idroetildicianmetildiossipiridina (2 a 3 gr.) con acqua e poca ammoniaca o soda caustica, fatta in maniera che il liquido rimanga neutro o lievemente alcalino. Dopo poco tempo si è già prodotto tanto gas che aprendo il robinetto ed innalzando il recipiente col mercurio si può dimostrare che il gas brucia con fiamma luminosa. Col carbonato sodico la reazione è più rapida, ma vi è mescolanza con anidride carbonica.

Azione del calore sulla idroetil$\beta\beta'$dician$\gamma$metil$\alpha\alpha'$diossipiridina. Quando si scalda questo composto in una stortina o in un palloncino a bagno d'olio e la temperatura è arrivata a 320°, incomincia a bollire decomponendosi con sviluppo di gas che può raccogliersi direttamente in un azotometro contenente potassa cau-

(1) " Ann. d. Chem. ", 1894, t. 282, pag. 236.

stica al 50 %. Prima di riscaldare si scaccia completamente l'aria dall'apparecchio con una corrente di anidride carbonica pura e secca. Da 1,22 gr. di composto ottenemmo 17.6 $cm^3$ di gas a 14° e 730 mm.; e in un'altra esperienza da 1.35 di sostanza si ottennero 25 $cm^3$ di gas a 22° e 743 mm.

Il gas che si ottiene è incoloro, brucia con fiamma luminosa, non è assorbito dal bromo nè dal cloruro rameoso ammoniacale, è pochissimo solubile nell'acqua. Questo gas analizzato nell'eudiometro di Bunsen diede una quantità di anidride carbonica ed una contrazione corrispondenti all'*etano* $C^2H^6$. Ecco, ad esempio. i risultati di una combustione:

*Gas avuto da scomposizione pirogenica della idroetildicianmetildiossipiridina.*

| | Volume letto | Temperatura | Pressione in millim. | Volume a 0° e 1 m. |
|---|---|---|---|---|
| Gaz impiegato . . . | 85,83 | 13° | 231,5 | 18,96 |
| Dopo l'aggiunta dell'O | 345,71 | 13° | 485,5 | 160,21 |
| Dopo aggiunta dell'aria | 532,46 | 13° | 667,0 | 339,02 |
| Dopo la combustione . | 485,80 | 12° | 624,5 | 290,62 |
| Dopo l'azione della potassa . . . . . | 451,97 | 13° | 592,0 | 255,41 |

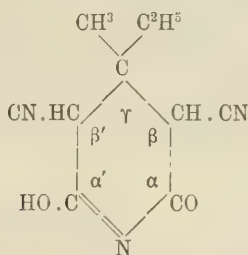
| | trovato | calcolato per $C_2H_6$ |
|---|---|---|
| Ossigeno consumato totale | 64,65 | 66,36 |
| „ „ per C | 35,21 | 37,92 |
| „ „ per H | 29,34 | 28,44 |

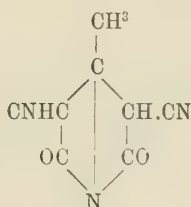
e riducendo il volume del gaz = 1

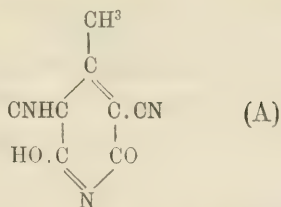
| | trovato | calcolato |
|---|---|---|
| Ossigeno consumato totale | 3,40 | 3,5 |
| „ „ per C | 1,85 | 2,0 |
| „ „ per H | 1,55 | 1,5 |

Oltre al gas etano si sviluppa dell'ammoniaca, distilla un poco di materia che cristallizza nel collo della storta o nel tubo ricurvo annesso al palloncino se si fa la distillazione in un palloncino tubulato; questa sostanza cristallina diventa rossa stando all'aria. Nella storta o nel palloncino rimane un residuo quasi nero.

Noi non sappiamo se la idroetildicianmetildiossipiridina:

```
        CH3  C2H5
          \  /
           C
          / \
CN.HC /  γ   \ CH.CN
     | β'    β |
     |         |
     | α'    α |
 HO.C \\      / CO
        \\  /
          N
```

si scomponga in modo da eliminare l'etano da $\gamma\alpha'$ dando:

```
          CH3
           |
           C
         / | \
   CNHC    |   CH.CN
     |     |     |
    OC     |    CO
      \    |   /
           N
```

oppure, come è più probabile, eliminando l'etano da $\gamma\beta$ e dando la dicianmetilglutaconimide:

```
         CH3
          |
          C
        /  \\
   CNHC     C.CN        (A)
     |      |
   HO.C     CO
      \\   /
        N
```

Essendochè per l'azione dell'acqua e dell'ammoniaca la idroetil$\beta\beta'$dician$\gamma$metil$\alpha\alpha'$diossipiridina dà appunto etano e il sale di ammonio della dicianmetilglutaconimide (A) così è probabile che

pure per l'azione del calore si elimini $C^2H^5$ e H da γβ. Però essendochè la reazione ha luogo a 320° che è la temperatura a cui già si scompone da dicianmetilglutaconimide così non possiamo con sicurezza affermare che la decomposizione avvenga in un senso piuttostochè in un altro. Ad ogni modo nel caso nostro è praticamente importante sapere che già a 320° si sviluppa regolarmente un idrocarburo gasoso saturo che può indurre in gravi errori quando si dosa l'azoto.

Altri casi come questo dello sviluppo *regolare* di un idrocarburo gasoso *puro* durante la decomposizione di una sostanza per l'azione del calore, non si conosceva. Ora noi dobbiamo aggiungere gli eteri idropiridinici, come dimostreremo in una prossima nota.

*Derivato bromurato.* La idroetilββ'dicianγmetilαα'diossipiridina, in polvere finissima, sospesa in acqua e trattata con acqua di bromo, versata con buretta graduata, reagisce prontamente, il liquido si decolora, formasi dell'acido bromidrico e un nuovo composto bromurato bianchissimo. Si deve aggiungere il bromo a poco a poco agitando, sino a che il liquido rimanga permanentemente colorato in giallognolo. Dopo alcune ore si raccoglie il precipitato su filtro, si lava bene ripetutamente con acqua poi si ricristallizza dall'alcol diluito o dall'acqua bollente. In varie preparazioni abbiamo osservato che la quantità di bromo assorbito corrisponde pressochè esattamente a 2 molecole di bromo, con formazione di un derivato bibromurato. Anche la quantità di prodotto bromurato ottenuto corrisponde pressochè alla quantità teorica, infatti, ad esempio, in tre esperienze da gr. 1; 1.404 e 2.732 di sostanza, si ottennero rispettivamente gr. 1.85; 2.27 e 5 gr. di prodotto greggio bianchissimo; quantità corrispondenti quasi esattamente alla formola $C^{10}H^9N^3Br^2O^2$.

Un dosamento di bromo e uno d'azoto confermarono che il prodotto contiene due atomi di bromo:

I. Gr. 0.2312 di sostanza fornirono 0.2435 di AgBr.

II. Gr. 0.2162 di sostanza fornirono 22.4 $cm^3$ di N a 19° e 736 mm. La sostanza fu bruciata col cromato di piombo. L'azoto ottenuto *non* era combustibile.

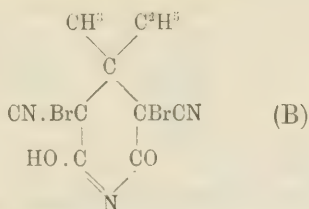
Da cui:

| | trovato | | calcolato per $C^{10}H^9N^3Br^2O^2$ |
|---|---|---|---|
| | I | II | |
| Br % | 44.98 | — | 44.07 |
| N % | — | 11.48 | 11.57 |

Questo composto bromurato cristallizza bene dall'acqua bollente in piccoli cristalli incolori, brillanti, in forma di prismi corti, duri e pesanti, fusibili con scomposizione a 175°-185°; non ha un punto di fusione netto perchè già a 110°-120° comincia a scomporsi sviluppando del bromo. Dall'alcol diluito e caldo si deposita allo stato di liquido oleoso incoloro che poi cristallizza; se però la soluzione alcolica non è troppo concentrata il composto cristallizza direttamente.

Questo bibromoderivato è discretamente solubile nell'acqua bollente e la soluzione satura a freddo, che ha reazione acida, trattata con nitrato d'argento dà un precipitato bianco solubile nell'acido nitrico e solo dopo lunga ebollizione di questa soluzione si ha un intorbidamento bianco. Lo stesso derivato bromurato fatto bollire con soluzione diluita di soda caustica dà dopo acidulata la soluzione con acido nitrico con abbondante precipitato bianco di bromuro di argento. È solubile nell'acido solforico concentrato senza colorarsi; è pure solubile nell'acido nitrico concentrato senza colorarsi, anche a caldo. Con nitrito di sodio e acido solforico diluito non si colora.

Non abbiamo ancora esperienze sufficienti che dimostrino essere il composto bromurato:

```
        CH³   C²H⁵
          \   /
            C
          /   \
  CN.BrC       CBrCN        (B)
       |        |
   HO.C        CO
          \   /
            N
```

Ma questa formola è molto probabile.

Scaldato per lunghissimo tempo a 110°-120° perde il bromo e non sviluppa acido bromidrico, diventa alquanto giallastro

e quando cessa di perdere peso, il residuo *non contiene* più traccia di bromo. Gr. 0.9938 di sostanza scaldati per varî giorni in istufa a 100°-110° prima, e poi a 110°-120°, perdettero 0.444 del proprio peso il che corrisponde a 44.65 %. Per la eliminazione di $Br^2$ da $C^{10}H^9N^3Br^2O^2$ si calcola 44.07 %.

Più rapidamente perde tutto il bromo se si scalda in un tubo Liebig a 130°-135° in bagno d'olio e in corrente lenta di aria. Gr. 1.4940 scaldati a 130°-135° per circa 29 ore perdettero 0.6565, cioè 43.94 %; ma il residuo allora è più bruno.

Il residuo, che non contiene più bromo, è cristallino, solubile nell'acqua bollente con reazione acida da cui cristallizza in piccoli prismi rombici corti, assai belli e regolari, brillanti, duri; è solubile nell'alcol; fonde verso 210° scomponendosi. Questo prodotto neutralizzato con ammoniaca e trattato col nitrato di argento dà un precipitato bianco cristallizzato in piccoli aghi solubili nell'ammoniaca e nell'acido nitrico.

Il composto bromurato $C^{10}H^9N^3Br^2O^2$ si scioglie nell'ammoniaca e la soluzione dà precipitato cristallino col nitrato d'argento: questo precipitato è solubile nell'acido nitrico diluito e quasi subito si riprecipita il composto bromurato inalterato.

La soluzione ammoniacale evaporata nel vuoto sull'acido solforico lascia un residuo cristallino il cui peso corrisponde esattamente al sale di ammonio; e che sia il sale di ammonio $C^{10}H^8(NH^4)N^3Br^2O^2$ lo confermerebbe anche un dosamento di azoto:

Gr. 0.1848 di sostanza fornirono 25 cm³ di N a 18° e 737 mm.

Da cui:

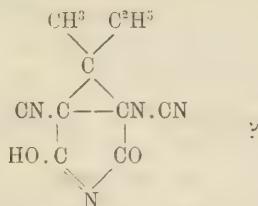
| | trovato | calcolato per $C^{10}H^8(NH^4)N^3Br^2O^2$ |
|---|---|---|
| N % | 15.02 | 14.73 |

Questo composto bromurato messo in contatto dell'acqua sul mercurio, insieme a poca ammoniaca per sciogierlo, sviluppa una piccola quantità di gas: il mercurio rimane intaccato formandosi del bromuro metallico.

Lo studio ulteriore di questo derivato bromurato speriamo

dia risultati interessanti. Che da questo, per eliminazione semplice del bromo, si possa formare il composto

```
 CH³  C²H⁵
   \ /
    C
   / \
CN.C——CN.CN
   |    |
HO.C    CO
   \   /
     N
```

?

Da quanto siamo venuti esponendo si può concludere:

Nell'azione tra il metiletilchetone l'etere cianacetico e l'ammoniaca si forma prima il sale ammonico $C^{10}H^{10}(NH^4)N^3O^2$ (composto intermedio) da cui coll'acido cloridrico si ottiene la idroetildicianmetildiossipiridina $C^{10}H^{11}N^3O^2$ in lamine fusibili a 193°.

La idroetildicianmetildiossipiridina per decomposizione dei suoi sali alcalini neutri coll'acqua sviluppa una regolare corrente di gas *etano*; ed è questo il migliore metodo per avere il gas etano purissimo.

La idroetildicianmetildiossipiridina per l'azione del calore sviluppa, a 320°, una corrente regolare di gas etano. Reazione questa analoga a quella che dànno gli eteri idropiridinici come abbiamo già accennato nella nota *Osservazioni sull' analisi elementare* e come meglio dimostreremo in un successivo lavoro (1).

La idroetildicianmetildiossipiridina fornisce col bromo un derivato bibromurato che per riscaldamento perde tutto il bromo.

Torino R. Università, 19 Giugno 1898.

---

(1) Ora sono occupato anche nello studio dei prodotti della distillazione degli eteri idropiridinici e di altri corpi da cui con facilità si ottengono degli idrocarburi quali il metano, l'etano e l'etilene. Dall'etere diidrocollidindicarbonico si è ottenuto del $CH^4$, $C^2H^4$, $CO^2$, dell'alcol e gli eteri lutidinmonocarbonico e lutidindicarbonico, confermando così quanto è stato accennato nella nota: *Osservazioni sull'analisi elementare*. Si vedrà poi quali sono le condizioni migliori perchè si elimini $CH^4$, $C^2H^6$ oppure $C^2H^4$. Dall'etere fenilidrolutidindicarbonico si forma dell'*alcool*, poco *benzene*, del $CO^2$, un carburo saturo che pare etano, e dell'*etere fenillutidindicarbonico*. Intendo riserbarmi questo campo di studio, per evitare che altri senza alcun riguardo e senza scrupoli entri anche in questo ordine di miei studii che si fanno nel mio laboratorio. I. G.

## *Contribuzioni di Geologia chimica.*

### *Esperienze sul quarzo e sull'opale.*

Nota del Socio GIORGIO SPEZIA.

In un precedente lavoro (1) nel quale era argomento la solubilità del quarzo e l'accrescimento di esso, io venni, per alcune esperienze eseguite, alla conclusione, che nel quarzo esistessero due direzioni normali fra loro di massimo e minimo accrescimento; ed a riguardo del risanamento dei cristalli asserii, che, supponendo in un cristallo di quarzo due fessure di eguale ampiezza, una parallela all'asse di simmetria principale e l'altra inclinata ad esso, quest'ultima avrebbe dovuto riempirsi di sostanza quarzosa, molto più presto e tanto più velocemente, quanto più la sua direzione si avvicinava ad essere normale alla direzione dell'asse di simmetria principale.

Era un'induzione basata sul fatto sperimentale che mi aveva dimostrato, come nel quarzo la massima velocità di accrescimento coincidesse colla direzione dell' asse di simmetria principale.

Infatti supponendo in un cristallo di quarzo una fessura normale all'asse principale, evidentemente il deposito quarzoso si farà contemporaneamente e con maggior velocità secondo le normali alle due pareti della fessura, perciò i due accrescimenti che si formerebbero sulle pareti dovrebbero presto incontrarsi e chiudere la fessura.

Ma anche un'induzione derivata dall' osservazione di un fatto deve essere provata, quando sia possibile, da un'esperienza

(1) " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XXXIII, p. 289.

diretta; perciò ritengo opportuno di indicare alcuni esperimenti da me eseguiti in proposito.

In una prima esperienza presi un cristallo bipiramidato di quarzo ematoide e vi feci tre tagli che dovevano avere la stessa ampiezza, perchè segati con uno stesso disco metallico e con smeriglio di eguale finezza. Un taglio era parallelo all'asse principale di simmetria e gli altri due erano normali allo stesso asse.

Il cristallo così preparato fu sottoposto ad aumento di quarzo col solito sistema descritto nel lavoro precedente, ossia fu collocato nel recipiente in modo che esso si trovava immerso nell'acqua in un vano, nel quale per diffusione doveva discendere la soluzione silicea proveniente dalla decomposizione del vetro. Il cristallo fu disposto in modo che le pareti dei tre tagli rimanevano verticali e perciò in posizione eguale rispetto alla soluzione silicea discendente.

Il risultato dell'esperienza fu, che il taglio parallelo all'asse di simmetria non presentò restringimento visibile ad occhio nudo, invece gli altri due erano quasi chiusi da nuovo quarzo incoloro.

Tale esperienza, benchè assai persuasiva, permetteva ancora di supporre che potesse avere influenza nella direzione del deposito quarzoso la forma esterna del cristallo di quarzo, ossia, in altre parole, che la speciale direzione di accrescimento non dipendesse da causa intrinseca inerente alla struttura molecolare.

Perciò feci due altre esperienze nelle quali era in parte tolta la forma esterna. A tal fine adoperai due cristalli di quarzo bianchiccio di Alghero, i quali si presentano bipiramidati e con traccia soltanto delle faccie del prisma. Impiegai tali materiali, in cui il deposito quarzoso nuovo doveva per la sua limpidezza essere più visibile, perchè mi fu impossibile di procurarmi altri grossi cristalli di quarzo ematoide, che fossero costituiti da un solo individuo e fossero tali da lasciarsi segare in lastre e frastagliare senza rompersi. Dai due cristalli tagliai due lastre parallele all'asse di simmetria, e poi in una di dette lastre feci due tagli eguali, uno parallelo all'asse e l'altro normale; nell'altra lastra, oltre i due detti tagli, ne feci uno inclinato all'asse segando il cristallo quasi normalmente ad una faccia di romboedro.

Dopo l'esperienza, nella quale s'intende sempre che la po-

sizione delle lastre era tale da porre in eguale circostanza rispetto alla soluzione i tagli, trovai comprovato il primo risultato ottenuto, che cioè il taglio parallelo all'asse subì un assai lieve restringimento mentre in quello normale il riempimento fu quasi completo.

Nella lastra poi in cui vi era anche il taglio normale alla faccia del romboedro si fece pure il deposito di quarzo nella fessura; ma minore di quello avvenuto nel taglio normale all'asse, e la fig. 1 rappresenta coll'ingrandimento di 3 diametri la detta lastra dopo l'esperienza (1).

Ma anche in queste due esperienze, sebbene non vi fosse il cristallo completo, tuttavia le due lastre presentavano ancora, nelle superficie costituenti il loro contorno, un residuo di faccie di romboedri; perciò feci un'ultima esperienza nella quale non vi fosse più traccia di faccie naturali.

Considerando poi, che pel risultato dell'esperienza, era sufficiente di conoscere la modificazione all'ampiezza dei tagli prodotta dal deposito quarzoso, feci uso di quarzo jalino escludendo così anche il dubbio, che nei risultati prima ottenuti, col quarzo ematoide e bianchiccio, avesse potuto avere qualche influenza l'impurità del quarzo.

Da un grosso cristallo perfettamente incoloro tagliai una lastra dello spessore di 4 millimetri parallela all'asse di simmetria; da tale lastra finamente smerigliata tolsi un pezzo e lo foggiai a settore coi due raggi uno parallelo e l'altro normale all'asse; poi vi produssi 5 tagli, s'intende di eguale larghezza; e la fig. 2 rappresenta il preparato per l'esperienza ingrandito di 2 diametri e mezzo.

Anche per quest'esperienza la lastra, foggiata a settore, aveva nell' apparecchio la disposizione orizzontale, per cui le pareti dei tagli rimanevano verticali e quindi tutte sottoposte ad eguale azione del deposito di silice della soluzione.

Dopo l'esperimento il settore si presentava come nella fig. 4, in cui appare con evidenza come il riempimento o deposito di nuovo quarzo sia stato progressivo, a partire da quello quasi

---

(1) Per le fig. 1ª, 2ª e 4ª che rappresentano lastre di quarzo parallele all'asse principale di simmetria, la disposizione è tale che la direzione dell'asse corre dal basso all'alto della tavola.

nullo nel taglio parallelo all'asse a quello completo nel taglio normale all'asse.

Evidentemente anche quest'ultima esperienza conferma il risultato delle altre, che cioè nel quarzo l'accrescimento è maggiore nella direzione dell'asse di simmetria e la velocità di risanamento dipende dalla direzione della ferita rispetto a quella di accrescimento.

Per norma di coloro i quali volessero intraprendere simili esperienze posso suggerire come un buon materiale per avere quarzo la varietà di vetro di Iena lavorato a tubi e che presenta nella sezione di rottura un colore azzurrognolo. Tale vetro lasciato nell'acqua alla temperatura da 300° a 310°, per 17 giorni, si decompone totalmente e dalla soluzione si deposita. per raffreddamento, quarzo.

Si possono adoperare anche altri vetri, i quali da soli non darebbero quarzo, purchè vi si aggiunga della silice libera. Nello sperimentare varie qualità di vetro per stabilire un materiale che mi servisse per le esperienze sull'accrescimento del quarzo, mi accadde per alcuni vetri di osservare che i cristalli di quarzo avevano subìto un' erosione prima che su di essi si depositasse quarzo nuovo; mentre per altre varietà di vetri il quarzo si depositò senza che vi fosse indizio di erosione o soluzione del quarzo preesistente.

Io non posso ora indicare qual sia il processo chimico, perchè nelle esperienze mie lo scopo non era di cercare come si formasse l'anidride silicica libera, ma bensì come questa potesse depositarsi sopra i cristalli di quarzo preesistenti. Ma volendo fare ipotesi, s'intende soltanto relative all'esperienza, io credo che, o si formi un silicato più acido solubile solo ad una data temperatura, al diminuire della quale si separa allo stato di quarzo la quantità di anidride silicica (o acido silicico ?) costituente la maggior acidità; ovvero che si formi un qualche silicato il quale possa comportarsi come un solvente del quarzo soltanto per una data temperatura.

L' interessante argomento della ricostituzione dei cristalli fu già trattato da varii osservatori con differente scopo. Parecchie esperienze furono intraprese con scopo puramente cristallografico, da Frankenheim, Scharff, Loir, Hauer, Lavalle, Lehmann, ecc.; altre eseguite da biologi avevano per oggetto

la possibilità di relazioni fra l'accrescimento nei corpi organici e quelli inorganici; e fra queste ultime sono certamente importanti per la cristallogenesi le esperienze eseguite da Rauber.

Ma i risultati ottenuti non sono ancora tali da permettere deduzioni di un certo valore sulla genesi dei cristalli e sul fenomeno del risanamento di essi; forse non ultima causa di ciò può apparire nel fatto che le ricerche o ebbero specialmente di mira, nello studio della rigenerazione dei cristalli, la forma esterna di essi, ovvero, come quelle di Rauber, furono fatte soltanto sull'allume di rocca in cui l'accrescimento deve essere naturalmente eguale in tre direzioni normali fra loro, trattandosi di una sostanza monometrica.

Perciò io credo che, per l'argomento sopraindicato non sieno prive d'importanza le esperienze da me indicate, sia perchè esse furono eseguite sopra un corpo cristallizzato in cui vi sono due direzioni assai differenti nell'intensità di accrescimento, sia perchè nell'esperienza sulla lastra di quarzo tagliata a settore era esclusa l'influenza che si potrebbe supporre esercitata da una forma esterna o da faccie di cristallo preesistenti.

I risultati ottenuti possono anche servire di contribuzione allo studio delle cause che determinano il vario sviluppo delle forme cristalline; il quale sviluppo, pure rimanendo sempre soggetto alle leggi di simmetria che governano l'assetto delle molecole in un dato sistema cristallino, potrebbe considerarsi come una risultante delle diverse velocità di accrescimento e delle forze esterne inerenti all' ambiente in cui cresce il cristallo.

E p. e. nel quarzo, essendo la velocità di accrescimento a seconda l'asse principale di simmetria molto maggiore che non in direzione normale ad esso, le cause esterne non potrebbero che assai difficilmente agire in modo d'avere per risultante la forma del pinacoide, la cui presenza è infatti nel quarzo rarissima per non dire problematica.

Da ciò si potrebbe anche indurre che, nelle sostanze del sistema romboedrico i cui cristalli si possono presentare o senza il pinacoide o con questo prevalente, come p. es. la calcite, la differenza di velocità di accrescimento nelle due direzioni sopradette a proposito del quarzo, dovrà essere piccola, per cui la presenza o l'assenza del pinacoide dipenderebbe da cause

esterne dell'ambiente. E per chiudere con un'altra induzione si potrebbe dire che nel berillo, i cui cristalli raramente mancano del pinacoide, se si potesse sperimentare l'accrescimento, questo dovrebbe risultare molto maggiore nella direzione normale all'asse di simmetria principale.

Inoltre le dette esperienze di carattere puramente mineralogico sull'accrescimento del quarzo potranno, io spero, essere anche utili alla geologia per lo studio della formazione delle quarziti. Perchè cementando sperimentalmente con quarzo due o tre granuli pure di quarzo con diversa posizione delle loro direzioni di accrescimento, si potrà osservare se le linee di unione possano per il loro andamento spiegare quello speciale intreccio caratteristico di certe quarziti, itacolumiti, quarzo di filoni, e quarzo dei gneiss e dei graniti; intreccio di cui, lo confesso, non so trovare finora, escludendo le ipotesi non avvalorate da esperienze, ragione per me persuasiva, sebbene io abbia già potuto ottenerlo artificialmente nei tentativi che sto facendo sulla trasformazione in quarzo dell'opale e del tripoli per lo studio genetico di certe quarziti.

La trasformazione dell'opale in quarzo fu ottenuta nel seguente modo: da un pezzo di opale resinite di Baldissero tagliai un prisma a base quadrata di 1 centimetro di lato e 2 centimetri di lunghezza; quindi posi tale prisma di opale in un tubo d'argento con acqua e piccola quantità di silicato sodico, poi nei consueti apparecchi mantenni l'esperienza per 7 giorni alla temperatura da 280° a 290°.

L'effetto fu, che il prisma, alla rottura, non presentava più traccia di frattura concoide; ma aveva assunto una struttura granulare ed aspetto saccaroide, e fatta una sezione, questa si presentava al microscopio costituita da granuli di quarzo con l'intreccio di certe quarziti e come appare dalla fig. 3 che rappresenta la sezione vista fra i Nicol incrociati.

Per ora non saprei indicare la causa più probabile di tale trasformazione dell'opale; ma credo di potere già ammettere che nel fenomeno debba concorrere un movimento molecolare o prodotto da un processo chimico, o attivato dalla presenza di un silicato solubile.

Tale mia opinione è fondata sul fatto che in un'altra esperienza eseguita contemporaneamente a quella descritta, con egual

tempo e temperatura e con un prisma di eguali dimensioni e staccato dallo stesso pezzo di opale, ma nella quale esperienza vi era acqua pura, senza cioè il silicato sodico, l'effetto non fu lo stesso ed il prisma aveva ancora nella frattura l'aspetto concoide.

Ed anche l'ipotesi, che la causa sia una semplice disidratazione e che la struttura dell'intreccio fosse già latente nell'opale, corrispondente per così dire ai grumi che si osservano quando si produce artificialmente della silice idrata, la quale poi per sineresi diventa compatta e assume frattura concoide, non mi pare probabile; perchè in altre analoghe esperienze, in cui vi era la presenza di un silicato solubile, l'opale si trasformò in un aggregato di perfetti cristalli di quarzo.

Finora l'intreccio speciale dei granuli articolati del quarzo, quando non sia visibile un cemento di quarzo, è ritenuto dai litologi, quasi assiomaticamente, come un effetto della sola pressione. Infatti il Rosenbusch (1), nella sua recente opera, dopo avere descritto tale intreccio dichiara che: " esso si trova anche in quelle arenarie, le quali senza un cemento e per sola pressione si consolidarono da sabbie sciolte (itacolumite, quarzo articolato) ".

L'esperienza da me eseguita prova come si possa ottenere un intreccio articolato di quarzo anche in altro modo; ed in un prossimo scritto ritornando su detto argomento indicherò tutte quelle obbiezioni, le quali impedirebbero di ritenere la sola pressione come causa dello speciale intreccio articolato del quarzo; obbiezioni che, a mio avviso, dovrebbero essere dimostrate prive di valore prima di ritenere senza discussione come causa esclusiva del fenomeno la pressione, a meno che si voglia in geologia continuare a professare quella fede che L. Buchner chiama fede ufficiale scientifica, la quale è più di ostacolo che di aiuto al progresso delle scienze.

(1) *Elemente der Gesteinslehre.* Stuttgart, 1898, pag. 390.

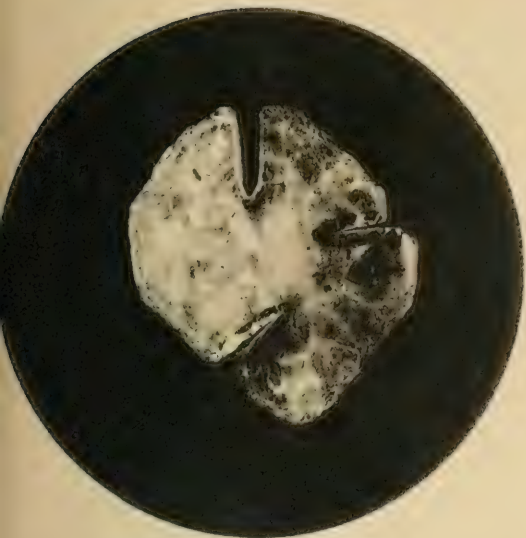



Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

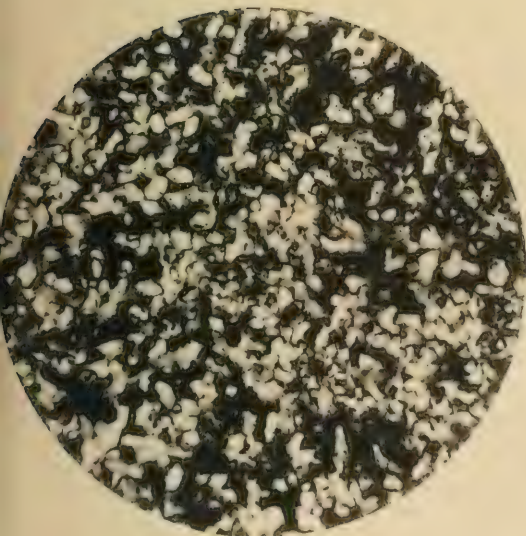



Fig. 4.

ELIOT. CALZOLARI & FERRARIO, MILANO.

# *Alcune osservazioni sul calcolo dell'error medio di un angolo nel metodo delle combinazioni binarie;*

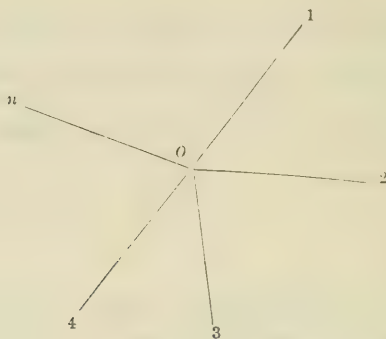
Nota del Socio NICODEMO JADANZA.

Il metodo di eseguire una stazione geodetica detto delle *combinazioni binarie* è stato adoperato dall' Istituto Geografico Militare, in un gran numero di vertici della rete geodetica italiana. Nel volume che ha per titolo: *Triangolazione di 1° ordine nella regione dell'Italia settentrionale che rimane ad ovest del meridiano di Milano* (Vol. I, *Osservazioni azimutali eseguite dal 1877 al 1881*), Firenze, Tipografia di G. Barbèra, 1881-82, a pag. XIX, è indicato il *metodo di calcolo,* cioè il modo di ricavare le direzioni probabili non che la ricerca dell'error medio di un angolo.

Tale metodo, siccome si è voluto farlo dipendere dal metodo di Bessel, non è così semplice per chi legge la prima volta quel volume senza aver letto le pubblicazioni anteriori del benemerito Istituto Geografico. La ricerca dell' error medio di un angolo poi è, secondo noi, troppo artificiosa e non dà al lettore una idea giusta del valore reale delle osservazioni fatte.

Abbiamo pensato quindi di esporre in modo più chiaro ed elementare non solo il metodo di trovare i valori più probabili degli angoli misurati ed il relativo error medio, quale è calcolato in quel volume, ma anche il *metodo più rigoroso* di trovare l'error medio di un angolo in ciascuna stazione. Verrà così modificato l'error medio generale che dovrà essere introdotto nei calcoli successivi, però si guadagnerà molto in sincerità.

I.

Il metodo delle combinazioni binarie è il seguente:
Nel punto $O$ si debbono fissare le $n$ direzioni $O1$, $O2$, $O3$, ... $On$.

Si sono misurati gli $\frac{n(n-1)}{2}$ angoli,

$$\begin{array}{llll} (1.2), & (1.3) \ldots\ldots (1.n) \\ & (2.3) \ldots\ldots (2.n) \\ & (3.4) \ldots\ldots (3.n) \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & \qquad (n-1).n) \end{array}$$

ognuno $k$ volte (ogni angolo è la media delle due osservazioni coniugate destra e sinistra).

È evidente che gli angoli indipendenti sono in numero di $n-1$, e possiamo scegliere quelli della prima orizzontale, cioè:

$$(1.2),\ (1.3),\ (1.4) \ldots\ldots (1.(n-1)),\ (1.n).$$

I valori probabili di questi angoli li indicheremo rispettivamente coi simboli

$$[1.2],\ [1.3],\ [1.4] \ldots\ldots [1.n]$$

e con

$$(1.2),\ (1.3),\ (1.4) \ldots\ldots (1.n)$$

indicheremo le medie dei $k$ valori osservati.

Per dedurre da tutti gli angoli osservati, che sono in tutto $k \cdot \frac{n(n-1)}{2}$, i valori probabili si osserva che ciascun angolo è misurato una volta direttamente e poi può essere ottenuto per differenza o per somma in altri $n-2$ modi differenti. Così p. e. gli angoli (1.2), (1.3)..., oltre ad essere misurati direttamente, possono ottenersi negli $(n-2)$ modi seguenti:

$$
\begin{array}{ll}
(1.2) = (1.3) - (2.3) & (1.3) = (1.2) + (2.3) \\
(1.2) = (1.4) - (2.4) & (1.3) = (1.4) - (3.4) \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
(1.2) = (1.n) - (2.n) & (1.3) = (1.n) - (3.n)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(1.n) = (1.2) + (2.n) \\
(1.n) = (1.3) + (3.n) \\
\dots\dots\dots \\
(1.n) = (1.(n-1)) + ((n-1).n).
\end{array}
$$

E siccome il *peso* del valore di un angolo misurato direttamente è doppio di quello dedotto per somma o per differenza, così non si deve fare altro che la media degli $n$ valori di uno stesso angolo (quello *diretto* ripetuto due volte, ed $(n-2)$ valori dedotti).

Si avrà quindi il valore probabile di ciascun angolo espresso nel modo seguente:

$$[1.2] = \frac{(1.2)+(1.2)+\{(1.3)-(2.3)\}+\{(1.4)-(2.4)\}+\dots+\{(1.n)-(2.n)\}}{n}$$

$$[1.3] = \frac{(1.3)+(1.3)+\{(1.2)+(2.3)\}+\{(1.4)-(3.4)\}+\dots+\{(1.n)-(3.n)\}}{n}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$[1.n] = \frac{(1.n)+(1.n)+\{(1.2)+(2.n)\}+\{(1.3)+(3.n)\}+\dots+\{(1.n-1)+(n-1.n)\}}{n}$$

Non è necessario, per la ricerca dei valori probabili [1.2], [1.3]... ricorrere alle formole precedenti. Basta fare lo specchietto seguente, il quale è composto di $n-1$ linee orizzontali

ed $n$ colonne verticali. Si registrano le medie dei $k$ valori degli angoli misurati così come vedesi:

| Punti | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | $(n-1)$ | $n$ | $\sigma$ | $\sigma_1-\sigma_\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Medie degli angoli misurati | — | (1.2) | (1.3) | (1.4) | ... | $(1.n-1)$ | $(1.n)$ | $\sigma_1$ | — |
| | | — | (2.3) | (2.4) | ... | $(2.n-1)$ | $(2.n)$ | $\sigma_2$ | $\sigma_1-\sigma_2$ |
| | | | — | (3.4) | ... | $(3.n-1)$ | $(3.n)$ | $\sigma_3$ | $\sigma_1-\sigma_3$ |
| | | | | ... | ... | ...... | ...... | ... | ...... |
| | | | | | | | $(n-1.n)$ | $\sigma_{n-1}$ | $\sigma_1-\sigma_{n-1}$ |
| | | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | | $s_{n-1}$ | $s_n$ | | |

e quindi si sommano tutti i valori su di una stessa orizzontale e tali somme si indicano con $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_{n-1}$.

Poi si sommano i numeri contenuti in una stessa colonna verticale a cominciare dalla seconda e tali somme sono indicate con $s_2, s_3 \ldots s_{n-1}, s_n$. Indi si facciano le differenze $\sigma_1 - \sigma_\lambda$ dando a $\lambda$ i valori $2, 3, 4 \ldots (n-1)$.

I valori probabili degli angoli $(12) \ldots (1.n)$ sono dati dalle $(n-1)$ equazioni:

$$(2) \quad \begin{cases} n[1.2] = s_2 + \sigma_1 - \sigma_2 \\ n[1.3] = s_3 + \sigma_1 - \sigma_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ n[1.n] = s_n + \sigma_1 - \sigma_n \end{cases}$$

Nell'ultima di queste equazioni si è introdotto, per simmetria, il simbolo $\sigma_n$ che è nullo.

Per maggior facilità non si scrivono nello specchio precedente le medie dei singoli angoli osservati, ma soltanto le differenze fra esse medie e valori provvisori scelti opportunamente. In tal caso le equazioni (2) dànno le correzioni da fare ai valori provvisori per ottenere i valori più probabili.

Per fare un esempio numerico prendiamo dal volume citato innanzi dell'Istituto Geografico Militare la stazione di Rioburent, che trovasi a pag. 179. Essa è la seguente:

## Stazione a Rioburent.

*Angoli misurati.*

| | (1.2) | (1.3) | (1.4) | (1.5) |
|---|---|---|---|---|
| | 78° 38′ 45″.80 | 115° 50′ 25″.95 | 166° 12′ 19″.65 | 314° 01′ 13″.10 |
| | 45.25 | 23.05 | 20.45 | 12.90 |
| | 45.45 | 25.40 | 22.50 | 12.85 |
| | 46.05 | 23.85 | 17.50 | 12.75 |
| | 48.05 | 25.45 | 21.95 | 14.20 |
| | 45.85 | 25.35 | 18.75 | 12.10 |
| Media | 46.075 | 24.842 | 20.133 | 12.983 |

| | (2.3) | (2.4) | (2.5) | (3.4) |
|---|---|---|---|---|
| | 37° 11′ 38″.00 | 87° 33′ 35″.25 | 235° 22′ 30″.30 | 50° 21′ 57″.35 |
| | 37.55 | 35.45 | 26.40 | 57.15 |
| | 40.80 | 35.30 | 24.30 | 55.10 |
| | 39.85 | 35.60 | 26.70 | 54.50 |
| | 37.60 | 32.90 | 27.75 | 56.45 |
| | 37.75 | 36.15 | 27.45 | 54.25 |
| Media | 38.592 | 35.108 | 27.150 | 55.80 |

| | (3.5) | (4.5) |
|---|---|---|
| | 198° 10′ 50″.00 | 147° 48′ 51″.85 |
| | 46.85 | 51.25 |
| | 47.45 | 52.15 |
| | 52.30 | 52.70 |
| | 47.60 | 55.65 |
| | 48.55 | 55.90 |
| Media | 48.792 | 53.250 |

*Osservatore* Jadanza.

*Valori provvisori.*

$$(1.2) = 78^\circ\ 38'\ 45''.0$$
$$(1.3) = 115\ \ 50\ \ 24.0$$
$$(1.4) = 166\ \ 12\ \ 20.0$$
$$(1.5) = 314\ \ 01\ \ 12.0$$

e di conseguenza i valori provvisori dei rimanenti angoli saranno

$$(2.3) = 37^\circ\ 11'\ 39''.0$$
$$(2.4) = 87\ \ 33\ \ 35.0$$
$$(2.5) = 235\ \ 22\ \ 27.0$$
$$(3.4) = 50\ \ 21\ \ 56.0$$
$$(3.5) = 198\ \ 10\ \ 48.0$$
$$(4.5) = 147\ \ 48\ \ 52.0$$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\sigma$ | $\sigma_1 - \sigma_\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| — | + 1.075 | + 0.842 | + 0.133 | + 0.983 | + 3.033 | — |
| | — | — 0.408 | + 0.108 | + 0.150 | + 0.150 | + 3.183 |
| | | — | — 0.200 | + 0.592 | + 0.792 | + 2.441 |
| | | | — | + 1.250 | + 1.250 | + 1.783 |
| | + 1.075 | + 0.434 | + 0.041 | + 3.175 | | |
| $\sigma_1 - \sigma_\lambda$ | + 3.183 | + 2.441 | + 1.783 | + 3.033 | | |
| | + 4.258 | + 2.875 | + 1.824 | + 6.208 | | |

$$[1.2] = \frac{+4.258}{5} = +0''.85 \qquad [1.3] = \frac{+2.875}{5} = +0''.58 \qquad [1.4] = \frac{+1.824}{5} = +0''.36$$

$$[1.5] = \frac{+6.208}{5} = +1''.24.$$

Si avranno dunque i valori probabili definitivi degli angoli

$$[1.2] = 78^\circ\ 38'\ 45''.85$$
$$[1.3] = 115\ \ 50\ \ 24.58$$
$$[1.4] = 166\ \ 12\ \ 20.36$$
$$[1.5] = 314\ \ 01\ \ 13.24$$

Volendo i valori probabili degli altri angoli, si faranno le differenze tra i valori precedenti. Così p. e. sarà:

$$[2.3] = [1.3] - [1.2] = 37^\circ\ 11'\ 38''.73 \text{ ecc.}$$

*Calcolo dell'error medio di un angolo* (*).

Dopo aver calcolato i valori probabili degli $(n - 1)$ angoli indipendenti, si calcoleranno le differenze

$$v_{1.2} = [1.2] - (1.2) \qquad v_{2.3} = [2.3] - (2.3)$$
$$v_{1.3} = [1.3] - (1.3) \qquad v_{2.4} = [2.4] - (2.4)$$
$$\dots\dots \qquad \dots\dots$$
$$v_{1.n} = [1.n] - (1.n) \qquad v_{2.n} = [2.n] - (2.n)$$
$$v_{(n-1).n} = [(n-1).n] - ((n-1).n)$$

le quali sono in numero di $\frac{n(n-1)}{2}$. Se si osserva che il numero degli angoli indipendenti è $n - 1$, si avrà per l'error medio la formola

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)}} = \sqrt{\frac{2[vv]}{(n-1)(n-2)}}.$$

E poichè ciascun $v$ è stato dedotto introducendo la media delle $k$ osservazioni (destra e sinistra), così la formola definitiva per calcolare l'error medio di un angolo è:

$$m = \sqrt{\frac{2k[vv]}{(n-1)(n-2)}} \tag{3}$$

(*) Cfr. nel " Zeitschrift für Vermessungswesen „, 1878, pag. 209, una nota del maggiore SCHREIBER. — W. JORDAN, " Handbuch der vermessungskunde „. Erster Band, 1895, pag. 259.

Indicando con $\mu$ l'error medio della media aritmetica, ed osservando che il valore probabile di un angolo è la media di $nk$ valori, si avrà:

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{nk}} = \sqrt{\frac{2[vv]}{n(n-1)(n-2)}} \tag{4}$$

Per la stazione geodetica di Rioburent si ha: $n=5$; $k=6$ (*).

| $v$ | $vv$ |
|---|---|
| $v_{1.2} = -0.22$ | 0.0484 |
| $v_{1.2} = -0.26$ | 0.0676 |
| $v_{1.4} = +0.23$ | 0.0529 |
| $v_{1.4} = +0.26$ | 0.0676 |
| $v_{2.3} = +0.14$ | 0.0196 |
| $v_{2.4} = -0.60$ | 0.3600 |
| $v_{2.5} = +0.24$ | 0.0576 |
| $v_{3.4} = -0.02$ | 0.0004 |
| $v_{3.5} = -0.13$ | 0.0169 |
| $v_{4.5} = -0.37$ | 0.1369 |
| | 0.8279 |

$$m = \sqrt{\frac{2.6.0,8279}{12}} = \sqrt{0.8279} = 0''.91$$

$$\mu = \sqrt{\frac{2.0,8279}{60}} = \sqrt{\frac{0.8279}{60}} = 0''.17.$$

(*) In ogni stazione geodetica è stabilito a priori il suo peso P. Esso nel metodo delle combinazioni binarie è dato da $P = n.k$, $n$ essendo il numero dei punti e $k$ il numero delle misure di ciascun angolo. Il peso P in Italia è poco differente da 30. In ciascuna stazione $k$ è determinato, essendo noto $n$. Così è:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Per $n=2$ | $k=16$ | Per $n=6$ | $k=5$ |
| $n=3$ | $k=10$ | $n=7$ | $k=5$ |
| $n=4$ | $k=8$ | $n=8$ | $k=4$ |
| $n=5$ | $k=6$ | | |

## II.

Questo metodo di calcolare l'error medio è del tutto *artificioso*. Cosa significa quel miscuglio di errori residui di angoli differenti?

Ciascuno dei precedenti $v$ risulta dalla differenza tra il valore probabile ed una media di $k$ valori osservati. Non si ha dunque alcun criterio sull'andamento delle osservazioni.

Esso par fatto apposta per alimentare la vanità degli osservatori. Che si scherza?

Quando un osservatore, dopo aver fatto una stazione geodetica su di un'alta montagna esposto a tutte le vicende atmosferiche, che solo può conoscere chi le ha provate, si sente annunziare che l'error medio di un angolo isolato è p. e. di $0''.35$ o pure di $0''.29$, deve certamente compiacersi della sua *abilità* che non ha riscontro nella storia della Geodesia!

La formola (3) dà per $m$ un valore indeterminato per $n = 2$.

Cerchiamo dunque un altro metodo che dia con maggiore *sincerità* l'error medio che si cerca.

Prendiamo p. e. l'angolo (1.2) il cui valore probabile è [1.2]. Poichè quell'angolo è stato misurato direttamente $k$ volte, otterremo $k$ *scostamenti* dalla media togliendo dalla media [1.2] ciascuno dei valori osservati; avremo cioè, chiamando $v_1\, v_2 \ldots v_k$ gli scostamenti corrispondenti a ciascun valore $(1.2)_1$, $(1.2)_2$, $(1.2)_3 \ldots (1.2)_k$

$$
\begin{aligned}
v_1 &= [1.2] - (1.2)_1 \\
v_2 &= [1.2] - (1.2)_2 \\
&\ldots\ldots \\
v_k &= [1.2] - (1.2)_k .
\end{aligned}
$$

Similmente si otterranno altri gruppi di $k$ valori ognuno nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
v_{k+1} &= [1.2] - [(1.3)_1 - (2.3)_1] & v_{2k+1} &= [1.2] - [(1.4)_1 - (2.4)_2] \\
v_{k+2} &= [1.2] - [(1.3)_2 - (2.3)_2] & v_{2k+2} &= [1.2] - [(1.4)_2 - (2.4)_2] \\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\
v_{2k} &= [1.2] - [(1.3)_k - (2.3)_k] & v_{3k} &= [1.2] - [(1.4)_k - (2.4)_k]
\end{aligned}
$$

$$v_{(n-2)k+1} = [1.2] - [(1.n)_1 - (2.n)_1]$$
$$v_{(n-2)k+1} = [1.2] - [(1.n)_2 - (2.n)_2]$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$v_{(n-1)k} = [1.2] - [(1.n)_k - (2.n)_k]$$

Tutti questi scostamenti dovranno sodisfare alla condizione $\Sigma pv = 0$, quando si tien conto del peso di ciascuno. I primi $k$ scostamenti hanno il peso $= 2$, gli altri hanno il peso $= 1$. Sarà dunque

$$2\sum_{1}^{k} v + \sum_{(k+1)}^{(n-1)k} v = 0 \tag{5}$$

la quale serve di verifica.

Se si fanno i quadrati di tutti gli scostamenti precedenti si otterrà per la somma totale $[pvv]$ il seguente valore:

$$[pvv] = 2\sum_{1}^{k} vv + \sum_{k+1}^{(n-1)k} vv \tag{6}$$

da cui si dedurrà l'error medio dell'angolo (1.2) che indicheremo con $m_{1.2}$, cioè

$$m_{1.2} = \sqrt{\frac{[pvv]}{nk-1}} \tag{7}$$

Se con $\mu_{1.2}$ s'indica l'error medio della media [1.2], questo sarà dato da:

$$\mu_{1.2} = \frac{m_{1.2}}{\sqrt{nk}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{nk(nk-1)}}\,. \tag{8}$$

Allo stesso modo si farà per gli altri angoli (1.3) . . . (1.$n$). Gli *scostamenti* della media di ciascuno di essi si dedurranno dalle differenze seguenti:

| $v_{1.3}$ | $v_{1.4}$ |
|---|---|
| $[1.3] - (1.3)$ | $[1.4] - (1.4)$ |
| $[1.4] - [(1.2) + (2.3)]$ | $[1.4] - [(1.2) + (2.4)]$ |
| $[1.3] - [(1.4) - (3.4)]$ | $[1.4] - [(1.3) + (3.4)]$ |
| . . . . . . . . . | . . . . . . . . . |
| $[1.3] - [(1.n) - (3.n)]$ | $[1.4] - [(1.n) - (4.n)]$ |

$$v_{1.n}$$

$$[1.n] - (1.n)$$
$$[1.n] - [(1.2) + (2.n)]$$
$$[1.n] - [(1.3) + (3.n)]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$[1.n] - [(1.(n-1)) + ((n-1).n)].$$

S'intende che si ottengono $k$ valori di ciascuno scostamento in corrispondenza dei $k$ valori osservati.

Se si pone per brevità:

$$m = \frac{m_{1.2} + m_{1.3} + m_{1.4} + \ldots + m_{1.n}}{n-1} \tag{9}$$

e

$$\mu = \frac{\mu_{1.2} + \mu_{1.3} + \mu_{1.4} + \ldots + \mu_{1.n}}{n-1} \tag{10}$$

$m$ si dirà *error medio di un angolo*, $\mu$ *error medio della media* nella stazione geodetica composta di $n$ punti.

## Applicazione alla Stazione Rioburent.

*Error medio dell'angolo* (1.2).

| $v$ | | $vv$ |
|---|---|---|
| $[1.2] - (1.2)$ | $= + 0''.05$ | 0.0025 |
| „ | $+ 0.60$ | 0.3600 |
| „ | $+ 0.40$ | 0.1600 |
| „ | $- 0.20$ | 0.0400 |
| „ | $- 2.20$ | 4.8400 |
| „ | $+ 0.00$ | 0.0000 |
| | | 5.4025 |
| $[1.2] - [(1.3) - (2.3)]$ | $= - 2.10$ | 4.4100 |
| „ | $+ 0.35$ | 0.1225 |
| „ | $+ 1.25$ | 1.5625 |
| „ | $+ 1.85$ | 3.4225 |
| „ | $- 2.00$ | 4.0000 |
| „ | $- 1.75$ | 3.0625 |
| | | 16.5800 |

| $v$ | | $vv$ |
|---|---|---|
| $[1.2]-[(1.4)-(2.4)]=$ | $+1''.45$ | 2.1025 |
| „ | $+\ 0.85$ | 0.7225 |
| „ | $-\ 1.35$ | 1.8225 |
| „ | $+\ 3.95$ | 15.6025 |
| „ | $-\ 3.20$ | 10.2400 |
| „ | $+\ 3.25$ | 10.5625 |
| | | 41.0525 |
| $[1.2]-[(1.5)-(2.5)]=$ | $+\ 3.05$ | 9.3025 |
| „ | $-\ 0.65$ | 0.4225 |
| „ | $-\ 2.70$ | 7.2900 |
| „ | $-\ 0.20$ | 0.0400 |
| „ | $-\ 0.60$ | 0.3600 |
| „ | $+\ 1.20$ | 1.4400 |
| | | 18.8550 |

$$\Sigma\, p\, vv = 2.5.4025 + 16.5800 + 41.0525 + 18.8550 = 87.2875$$

$$m_{1.2} = \sqrt{\frac{87.2875}{29}} = 1''.73 \qquad \mu_{1.2} = \frac{m}{\sqrt{30}} = 0''.32.$$

*Error medio dell'angolo* (1.3).

| $v$ | | $vv$ |
|---|---|---|
| $[1.3]-(1.3) =$ | $-1''.37$ | 1.8769 |
| „ | $+\ 1.53$ | 2.3409 |
| „ | $-\ 0.82$ | 0.6724 |
| „ | $+\ 0.73$ | 0.5329 |
| „ | $-\ 0.87$ | 0.7569 |
| „ | $-\ 0.77$ | 0.5929 |
| | | 6.7729 |
| $[1.3]-[(1.2)+(2.3)]=$ | $+\ 0.78$ | 0.6084 |
| „ | $+\ 1.78$ | 3.1684 |
| „ | $-\ 1.67$ | 2.7889 |
| „ | $-\ 1.32$ | 1.7424 |
| „ | $-\ 1.07$ | 1.1449 |
| „ | $+\ 0.98$ | 0.9604 |
| | | 10.4134 |

| $v$ | $vv$ |
|---|---|
| [1.3] — [(1.4) — (3.4)] = + 2.28 | 5.1984 |
| „ + 1.28 | 1.6384 |
| „ — 2.82 | 7.9524 |
| „ + 1.58 | 2.4964 |
| „ — 0.92 | 0.8464 |
| „ + 0.08 | 0.0064 |
| | 18.1384 |
| [1.3] — [(1.5) — (3.5)] = + 1.48 | 2.1904 |
| „ — 1.47 | 2.1609 |
| „ — 0.82 | 0.6724 |
| „ + 4.13 | 17.0569 |
| „ — 2.02 | 4.0804 |
| „ + 1.03 | 1.0609 |
| | 27.2219 |

$$\Sigma\, pvv = 69.3195$$

$$m_{1.3} = \sqrt{\frac{69.3195}{29}} = 1''.55 \qquad \mu_{1.3} = 0''.28.$$

*Error medio dell'angolo* (1.4).

| $v$ | $vv$ |
|---|---|
| [1.4] — (1.4) = + 0''.71 | 0.5041 |
| „ — 0.09 | 0.0081 |
| „ — 2.14 | 4.5796 |
| „ + 2.86 | 8.1796 |
| „ — 1.59 | 2.5281 |
| „ + 1.61 | 2.5921 |
| | 18.3916 |
| [1.4] — [(1.2) + (2.4) = — 0.69 | 0.4761 |
| „ — 0.34 | 0.1156 |
| „ — 0.39 | 0.1521 |
| „ — 1.29 | 1.6641 |
| „ — 0.59 | 0.3481 |
| „ — 1.64 | 2.6896 |
| | 5.4456 |

| $v$ | $vv$ |
|---|---|
| $[1.4] - [(1.3) + (3.4)] = - 2.94$ | 8.6436 |
| " $+ 0.16$ | 0.0256 |
| " $- 0.14$ | 0.0196 |
| " $+ 2.01$ | 4.0401 |
| " $- 1.54$ | 2.3716 |
| " $+ 0.76$ | 0.5776 |
| | 15.6781 |
| $[1.4] - [(1.5) - (4.5)] = - 0.89$ | 0.7921 |
| " $- 1.29$ | 1.6641 |
| " $- 0.34$ | 0.1156 |
| " $+ 0.31$ | 0.0961 |
| " $+ 1.81$ | 3.2761 |
| " $+ 4.16$ | 17.3056 |
| | 23.2496 |

$$\Sigma pvv = 81.1565$$

$$m_{1.4} = \sqrt{\frac{81.1565}{29}} = 1''.67 \qquad \mu_{1.4} = 0''.31.$$

*Error medio dell'angolo* (1.5).

| $v$ | $vv$ |
|---|---|
| $[1.5] - (1.5) = + 0.14$ | 0.0196 |
| " $+ 0.34$ | 0.1156 |
| " $+ 0.39$ | 0.1521 |
| " $+ 0.49$ | 0.2401 |
| " $- 0.96$ | 0.9216 |
| " $+ 1.14$ | 1.2996 |
| | 2.7486 |
| $[1.5] - [(1.2) + (2.5)] = - 2.86$ | 8.1796 |
| " $+ 1.59$ | 2.5281 |
| " $+ 3.49$ | 12.1801 |
| " $+ 0.49$ | 0.2401 |
| " $- 2.56$ | 6.5536 |
| " $- 0.06$ | 0.0036 |
| | 29.6851 |

| $v$ | $vv$ |
|---|---|
| $[1.5] - [(1.3) + (3.5)] = - 2.71$ | 7.3441 |
| " $+ 3.34$ | 11.1556 |
| " $+ 0.39$ | 0.1521 |
| " $- 2.91$ | 8.4681 |
| " $+ 0.19$ | 0.0361 |
| " $- 0.66$ | 0.4356 |
| | 27.5916 |
| $[1.5] - [(1.4) + (4.5)] = + 1.74$ | 3.0276 |
| " $+ 1.54$ | 2.3716 |
| " $- 1.41$ | 1.9881 |
| " $+ 3.04$ | 9.2416 |
| " $- 4.36$ | 19.0096 |
| " $- 1.41$ | 1.9881 |
| | 37.6266 |

$$\Sigma pvv = 100.4005$$

$$m_{1.5} = \sqrt{\frac{100.4005}{29}} = 1.86 \qquad \mu_{1.5} = 0.34.$$

Prendendo la media degli $m$ e dei $\mu$ si ottiene per la *Stazione di* RIOBURENT:

$$m = 1'',70, \ \mu = 0'',31.$$

Il quale risultamento e molto differente da quello dato dalle formole (3) e (4).

Il valore di $m$ si può anche dedurre indipendentemente dai singoli valori $m_{1.2} \dots m_{1.n}$. È sufficiente adoperare le formole seguenti:

$$(11) \quad \begin{cases} m = \sqrt{\dfrac{[pvv]_{1.2} + [pvv]_{1.3} + \dots + [pvv]_{1.n}}{(n-1)(nk-1)}} \\[2ex] \mu = \dfrac{m}{\sqrt{nk}} \end{cases}$$

## III.

Il metodo di trovare l'error medio mediante le formole (3) e (4) potrebbe essere giustificato, come fa il Ferrero nel caso del metodo a strati (*), se i valori ottenuti fornissero all'osservatore un criterio, anche provvisorio, per giudicare della bontà delle proprie osservazioni. E ciò si otterrebbe quando i valori di $m$ e $\mu$ ottenuti colle (3) e (4) fossero poco differenti da quelli avuti con metodo più rigoroso. Ora ciò non è.

Valgano i due esempi seguenti per far vedere ad evidenza che i valori ottenuti dalle formole (3) e (4) non dicono proprio nulla.

1° — 2ª Stazione a: *Estremo Nord della base del Ticino* (**).

*Valori probabili degli angoli misurati.*

$$[1.2] = 125^\circ\ 00'\ 27''.15$$
$$[1.3] = 235\ \ 31\ \ 00.06.$$

| $v_{1.2}$ | | $vv$ |
|---|---|---|
| [1.2] — (1.2) | = — 0.09 | 0.0081 |
| " | — 0.89 | 0.7921 |
| " | — 2.16 | 4.6656 |
| " | — 2.17 | 4.7089 |
| " | — 0.24 | 0.0576 |
| " | — 0.39 | 0.1521 |
| " | + 0.11 | 0.0121 |
| " | + 1.24 | 1.5376 |
| " | + 2.16 | 4.6656 |
| " | + 1.93 | 3.7249 |
| [1.2] — [(1.3) — (2.3)] | = — 0.91 | 0.8281 |
| " | — 1.91 | 3.6481 |
| " | — 1.87 | 3.4969 |
| " | — 2.16 | 4.6656 |
| " | — 0.29 | 0.0841 |
| " | — 0.45 | 0.2025 |
| " | + 1.76 | 3.0976 |
| " | + 2.46 | 6.0516 |
| " | + 2.22 | 4.9284 |
| " | + 2.25 | 5.0625 |

(*) Cfr. A. Ferrero, *Esposizione del metodo dei minimi quadrati*, p. 157-58.
(**) Cfr. Vol. citato, pag. 151.

| $v_{1.3}$ | | $vv$ |
|---|---|---|
| [1.3] — (1.3) | = — 0.16 | 0.0256 |
| " | — 1.19 | 1.4161 |
| " | — 1.79 | 3.2041 |
| " | — 1.64 | 2.6896 |
| " | + 0.16 | 0.0256 |
| " | + 0.48 | 0.2304 |
| " | + 1.76 | 3.0976 |
| " | + 1.96 | 3.8416 |
| " | + 0.89 | 0.7921 |
| " | + 0.08 | 0.0064 |
| [1.3] — [(1.2) + (2.3)] | = + 0.66 | 0.4356 |
| " | — 0.16 | 0.0256 |
| " | — 2.08 | 4.3264 |
| " | — 1.65 | 2.7225 |
| " | + 0.21 | 0.0441 |
| " | + 0.54 | 0.2916 |
| " | + 0.11 | 0.0121 |
| " | + 0.74 | 0.5476 |
| " | + 0.83 | 0.6889 |
| " | — 0.24 | 0.0589 |

$$\Sigma\, pvv = 72.7146$$

$$m_{1.2} = \sqrt{\frac{72.7146}{29}} = 1.58 \qquad \mu_{1.2} = \frac{m_{1.2}}{\sqrt{30}} = 0''.29$$

$$\Sigma\, pvv = 39.8102$$

$$\mu_{1.2} = \sqrt{\frac{39.8102}{29}} = 1''.17 \qquad \mu_{1.3} = \frac{m_{1.2}}{\sqrt{30}} = 0.21$$

e quindi

$$m = 1'',37$$
$$\mu = 0,25.$$

Secondo le formole (3) e (4)

$$m = 0'',29$$
$$\mu = 0,25.$$

2° — 2ª Stazione a: *Estremo Sud della base del Ticino* (*).
*Valori probabili degli angoli misurati.*
[1.2] = 144° 07′ 25″.581      [1.3] = 245  32′ 20.212.

| $v_{1.2}$ | | $vv$ |
|---|---|---|
| [1.2] — (1.2) | = + 2.206 | 5.8664 |
| " | + 1.056 | 1.1151 |
| " | — 0.094 | 0.0088 |
| " | — 0.219 | 0.0480 |
| " | + 0.131 | 0.0172 |
| " | — 1.460 | 2.1580 |
| " | — 1.719 | 2.9550 |
| " | — 1.669 | 2.7856 |
| " | — 0.344 | 0.1183 |
| " | + 1.931 | 3.7288 |
| [1.2] — [(1.3) — (2.3)] | = + 0.806 | 0.6496 |
| " | + 1.431 | 2.0478 |
| " | — 0.419 | 0.1756 |
| " | — 0.369 | 0.1362 |
| " | + 1.456 | 2.1199 |
| " | — 1.669 | 2.7856 |
| " | — 2.969 | 8.8150 |
| " | — 1.844 | 3.4003 |
| " | + 1.556 | 2.4211 |
| " | + 2.406 | 5.7888 |
| [1.3] — (1.3) | = + 0.787 | 0.6194 |
| " | + 0.237 | 0.0562 |
| " | — 0.613 | 0.3758 |
| " | — 0.338 | 0.1142 |
| " | + 0.362 | 0.1310 |
| " | — 1.588 | 2.5217 |
| " | — 2.213 | 4.8974 |
| " | — 1.013 | 1.0262 |
| " | + 1.662 | 2.7622 |
| " | + 2.912 | 8.4797 |
| [1.3] — [(1.2) + (2.3)] | = + 2.187 | 4.7830 |
| " | — 0.138 | 0.0190 |
| " | — 0.288 | 0.0829 |
| " | — 0.188 | 0.0353 |
| " | — 0.963 | 0.9274 |
| " | — 1.388 | 1.9265 |
| " | — 0.963 | 0.9274 |
| " | — 0.838 | 0.7022 |
| " | — 0.238 | 0.0566 |
| " | + 2.437 | 5.9390 |

(*) Cfr. vol. citato, pag. 56.

$$\Sigma\, p\, vv = 63.9423$$

$$m_{1.2} = \sqrt{\frac{63.9423}{29}} = 1.49 \qquad \mu_{1.3} = \frac{m_{1.3}}{\sqrt{30}} = 0.27$$

$$\Sigma\, pcv = 57.3669$$

$$m_{1.3} = \sqrt{\frac{57.3669}{29}} = 1''.41 \qquad \mu_{1.3} = \frac{m_{1.3}}{\sqrt{30}} = 0.27$$

e quindi

$$m = \pm 1''.45$$
$$\mu = \pm 0.265.$$

Colle formole (3) e (4)

$$m = \pm 0'',09$$
$$\mu = \pm 0,02.$$

Che cosa significa in pratica che l'error medio di un angolo misurato è $0''.09$?

Per semplificare alquanto i calcoli si può introdurre la *media degli errori,* la quale è data dalla *media aritmetica dei differenti errori presi tutti col segno positivo.* Indicando con $\eta$ tale media, si ha:

$$\eta = \frac{[+v]}{n}\ .$$

È noto che l'error medio $m$ si esprime in funzione di $\eta$ mediante la relazione (*)

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.\,\eta = 1.2533\,\eta \tag{12}$$

la quale è applicabile al nostro caso in cui il numero $n$ varia da 28 a 35 ed è quindi abbastanza grande.

Nel quadro che segue abbiamo registrati gli errori medi di un angolo e quello della media per tutte le stazioni fatte da noi. Da esso emerge la piccola differenza esistente tra i valori medi calcolati colla formola rigorosa e quelli calcolati colla (12).

---

(*) Cfr. FERRERO, loc. cit., pag. 59; C. L. DOOLITTLE, *A Treatise on Practical Astronomy, as applied to Geodesy and Navigation,* pag. 18.

La media adunque dell'*Osservatore* JADANZA non deve essere quella che trovasi a pag. 303 del volume citato, ma deve essere la seguente

$$m = \pm 1'',73$$

| STAZIONI | colle formole (7) ed (8) | | colla formola (12) | | colle formole (3) e (4) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $m$ | $\mu$ | $m$ | $\mu$ | | |
| M. Bezimauda. . . | ± 1''.75 | ± 0''.29 | ± 1''.68 | ± 0''.28 | ± 1''.15 | ± 0''.19 |
| M. Settepani . . . | ± 1.91 | ± 0.35 | ± 1.83 | ± 0.33 | ± 0.50 | ± 0.09 |
| M. Bignone . . . . | ± 1.71 | ± 0.31 | ± 1.68 | ± 0.30 | ± 0.35 | ± 0.06 |
| M. Torre . . . . . | ± 2.07 | ± 0.38 | ± 1.92 | ± 0.35 | ± 0.78 | ± 0.14 |
| M. Mongioie . . . | ± 2.55 | ± 0.46 | ± 2.49 | ± 0.35 | ± 1.29 | ± 0.24 |
| M. Monnier . . . . | ± 1.76 | ± 0.32 | ± 1.73 | ± 0.32 | ± 0.75 | ± 0.14 |
| M. Rioburent . . . | ± 1.70 | ± 0.31 | ± 1.64 | ± 0.30 | ± 0.91 | ± 0.17 |
| M. Pagliano . . . . | ± 1.36 | ± 0.23 | ± 1.27 | ± 0.21 | ± 0.46 | ± 0.08 |
| M. Musinè . . . . . | ± 1.42 | ± 0.26 | ± 1.36 | ± 0.24 | ± 0.68 | ± 0.12 |
| M. Vesco . . . . . | ± 1.53 | ± 0.22 | ± 1.47 | ± 0.21 | ± 0.88 | ± 0.12 |
| Crea . . . . . . . . | ± 1.69 | ± 0.29 | ± 1.61 | ± 0.28 | ± 0.73 | ± 0.12 |
| Biandrate . . . . . | ± 1.34 | ± 0.24 | ± 1.38 | ± 0.24 | ± 0.55 | ± 0.10 |
| Mondovì. . . . . . | ± 1.81 | ± 0.33 | ± 1.89 | ± 0.35 | ± 0.54 | ± 0.10 |
| Pavia . . . . . . . | ± 1.35 | ± 0.25 | ± 1.36 | ± 0.25 | ± 0.52 | ± 0.10 |
| M. Aiguille Rouge | ± 2.00 | ± 0.35 | ± 2.09 | ± 0.37 | ± 0.48 | ± 0.08 |
| M. Colma . . . . . | ± 1.77 | ± 0.32 | ± 1.80 | ± 0.32 | ± 0.68 | ± 0.12 |

## *Contribuzione allo studio della istologia normale e patologica del midollo delle ossa;*

Nota del Socio PIO FOÀ.

Fra gli elementi che compongono il midollo delle ossa ve ne ha uno, la così detta cellula gigantesca a nucleo in gemmazione o megacariocito (Howel), intorno al cui significato si è molto discusso dagli studiosi. Fin dai primi tempi in cui si studiò il midollo delle ossa nello stato normale e patologico si era supposto che le cellule gigantesche fossero in istretto rapporto coi globuli bianchi del sangue, e sebbene non si avesse potuto dimostrarlo direttamente, pure si dubitava che le predette cellule avessero per ufficio di generare i globuli bianchi. Più tardi si credette che dalle cellule gigantesche traessero origine degli elementi incolori a nucleo vescicolare e a protoplasma omogeneo, il quale poi producendo emoglobina li convertisse in globuli rossi nucleati.

A queste ipotesi, che a poco a poco furono abbandonate, è seguìta un'altra più recente secondo la quale il protoplasma dei predetti grandi elementi avrebbe un còmpito chimico biologico: quello, cioè, di elaborare e di secernere dei materiali albuminoidi atti alla nutrizione.

Frattanto l'osservazione diretta di alcuni casi in cui nel protoplasma dei grandi elementi si trovano inclusi dei leucociti, ha fatto sorgere l'idea che la funzione di quelli fosse essenzialmente la fagocitosi. Solo di recente uno studioso, osservando gli effetti dell'estirpazione parziale o totale della milza nel porcospino, ha ripresa la vecchia ipotesi che dai grandi elementi derivassero delle cellule incolori.

La conoscenza intima della struttura degli elementi giganteschi del midollo delle ossa fece essa pure in questi ultimi anni dei notevoli progressi.

Infatti, si sono scoperti negli stessi numerosi centrosomi i quali stanno in rapporto colla facoltà che hanno i nuclei in gemmazione di moltiplicarsi per cariocinesi, e si sono descritte

alcune particolarità nella struttura del protoplasma. Si è creduto altresì di scoprire nei nuclei dei grandi elementi la facoltà di moltiplicarsi per frammentazione indiretta, ma più tardi si è dimostrato che questo non è che un prodotto degenerativo dovuto o semplicemente alla morte naturale dell'elemento, o all'azione tossica esercitata sul nucleo da talune sostanze.

In realtà solo in alcuni elementi giganteschi e nei soggetti giovani si rileva la facoltà di moltiplicare i loro nuclei, e ciò ha luogo solo per mezzo di una complessa cariocinesi, ma alla detta proliferazione non tien dietro mai la divisione del protoplasma, onde il solo risultato che si ottiene è quello dell'aumento numerico degli articoli che compongono la massa nucleare del grande elemento, i quali poi si fondono insieme.

In questi ultimi mesi io mi sono particolarmente occupato di applicare allo studio del midollo delle ossa alcuni metodi di recente introdotti nella tecnica microscopica.

Adoperando il metodo di Mallory si pone in evidenza molto chiaramente il reticolo che costituisce lo stroma del midollo. Era opinione un tempo che gli elementi del midollo stessero in mezzo ad una sostanza mucosa, la quale fosse a sua volta trattenuta da cellule connettive ramificate rare, anastomizzate fra loro e facenti capo alle pareti dei vasi sanguigni. In realtà lo stroma del midollo, oltrechè dei vasi sanguigni, consta di un vero reticolo il quale ha delle scarse trabecole robuste cui sono applicate le cellule connettive ramificate, e dalle dette trabecole si partono delle più sottili ramificazioni che formano una rete minuta a maglie circolari entro cui stanno uno, o più elementi midollari. Con altri metodi di recente introdotti, e che valgono a colorare le fibre connettive, come ad esempio: quello di Van Gieson, e quello di Ramon y Cajal (fuxina satura acquosa e Indigocarmino), non si ottengono risultati così netti come quelli che si hanno col metodo di Mallory. Però ad ottenerli, vale particolarmente il modo di fissazione; così essi non riescono bene nei pezzi fissati nelle varie soluzioni di sublimato; riescono, invece, ottimamente nei pezzi freschissimi posti a fissare nel liquido di Flemming, o nel liquido di Hermann, ma preferibilmente nel primo di questi.

L'applicazione del metodo di colorazione del Mallory ai tagli di midollo delle ossa posto, appena ucciso l'animale, a fis-

sare in uno dei liquidi predetti, serve a porre, altresì in evidenza un altro particolare sulla intima struttura delle cellule gigantesche del midollo (megacariociti).

Dopo M. Heidenhain è ammesso che il citoplasma dei megacariociti si mostri distinto in tre zone, di cui una esterna molto chiara e striata; una media più scura che si colora un poco più intensamente di quella esterna coi colori acidi di anilina; infine una terza zona, pure assai chiara che circonda il nucleo e che è compresa nel nucleo stesso quando questo ha forma di ferro di cavallo o di ciambella.

Col metodo di Mallory si pone in grande evidenza l'esistenza di due modalità diverse di protoplasma: l'una finemente granulosa, e l'altra opaca, costituita verosimilmente di un intreccio fitto di filamenti. Il protoplasma granuloso circonda il nucleo, e s'intromette fra le gemme che lo costituiscono, per via di quelle interruzioni del nucleo che Heidenhain ha chiamato canali perforanti.

Fra i nuclei a ferro di cavallo si osserva una penetrazione del protoplasma granuloso, il quale converge verso un centro colorato più intensamente e che secondo Heidenhain rappresenta l' introflessione della parte compatta dell'esoplasma. Intorno al protoplasma granuloso, quasi fosse un involucro di esso sta il protoplasma corticale, il quale è talora così denso, che lascia scorgere ben poco del protoplasma granuloso, e tal'altra, invece, è così scarso, che il protoplasma granuloso prevale in quasi tutta la superficie dell'elemento, che è solo debolmente rivestito alla periferia di scarse fibrille di protoplasma corticale. La diversità dell'aspetto si ha nei diversi animali, in genere, e particolarmente per uno stesso animale, secondo le diverse età. Così le cellule gigantesche della cavia, del cane, del riccio e del coniglio adulto mostrano il citoplasma in cui la parte corticale opaca è abbondantissima, e appena lasciano scorgere una zona sottile più chiara intorno al nucleo; invece, esaminando il midollo di giovani conigli del peso di 4-500 gr. vi si trovano, segnatamente nelle epifisi, numerosi megacariociti, a citoplasma prevalentemente granuloso con scarso intreccio di fibrille alla periferia.

A rendere meglio evidente la struttura suddescritta giova più del metodo di Mallory, quello di Ramon y Cajal.

Infatti, con questo metodo di colorazione si tingono in rosso vivo le minute granulazioni del protoplasma e resta colorato in verdastro il protoplasma corticale.

Con tale metodo è facile di scorgere che non sempre la parte corticale riveste interamente il protoplasma granuloso, ma questo talvolta si trova parzialmente scoperto alla periferia dell'elemento, in cui si trova allora una zona sottile di protoplasma granuloso. Altre volte la parte corticale sembra smagliata in vari punti, e allora traspaiono da essi i granuli del sottostante protoplasma. Col metodo di Mallory non si scorge facilmente lo strato periferico assai chiaro, e quasi trasparente che presentano i megacariociti in certi periodi della loro attività, ma, invece, esso traspare evidente col metodo di Ramon. Infatti, taluni elementi e in taluni periodi d'attività presentano, come è noto, alla loro periferia delle frangie o delle piccole vescicole e talvolta delle grandi bolle di protoplasma sottilissimo, omogeneo e rifrangente che rimane pressochè incoloro coi metodi vari di colorazione dell'elemento.

Questa zona ultraperiferica in realtà apparisce talora di aspetto più complicato, perchè esso sembra formare un intreccio di fini filamenti mirabilmente intrecciati, o una disposizione più grossolana e varia di prolungamenti larghi, sottilissimi e trasparenti, o, infine, l'elemento, avendo un aspetto quasi piriforme, emette dalla parte più larga del suo citoplasma un ciuffo di filamenti lunghi, sottili, come fossero un fascio di cilia. È notevole il fatto che nelle maglie degli intrecci sovradescritti si vedono molto spesso dei numerosi piccoli leucociti a nucleo polimorfo intensamente tingibile.

Certo, il reticolo che costituisce lo stroma del midollo comprende entro una grande maglia il corpo del megacariocito, e dall'orlo della maglia si attaccano in varie direzioni i filamenti del reticolo stesso, ma talvolta al reticolo dello stroma sembra sovrapporsi un altro più intricato e mirabile intreccio fatto dai prolungamenti o dall'emanazione ultraperiferica del protoplasma.

Così, secondo il mio concetto, l'elemento gigantesco a nucleo in gemmazione sarebbe costituito: 1° da un protoplasma finemente granuloso che circonda immediatamente e compenetra la massa nucleare; 2° da un protoplasma denso, verosimilmente fibrillare compatto, che avvolge il primo, ora completamente,

ora, invece, incompletamente così da lasciare qui e là delle smagliature, o da lasciare scoperta una sottile zona periferica dell' elemento; 3° infine, da uno strato o emanazione ultraperiferica a forma, o di corta frangia, o di vescicole, o di bolle, o d'intreccio mirabile di filamenti sottili, o d'intreccio più grossolano a maglie disuguali per ampiezza e per forma, o di ciuffi di filamenti somiglianti a lunghe cilia prevalentemente impiantate sopra una parte più larga del corpo cellulare. Ritengo verosimile con altri autori che l' emissione di questa zona ultra periferica sia in rapporto coll'attività funzionale dell'elemento, e rappresenterebbe il rigonfiarsi di una parte omogenea, sottile e rifrangente che formerebbe il sostrato di quella zona di protoplasma che ci apparisce nel corpo cellulare più chiara e munita di finissimi granuli (zona interna di Heidenhain). O in altri termini: partendo dalla corteccia e andando verso il nucleo, l'elemento sarebbe costituito da un mantello periferico corticale di protoplasma fibrillare; indi da un protoplasma chiaro il quale a sua volta sarebbe formato da una parte esterna finemente granulosa, e da una parte più intima di protoplasma ialino, alla protrusione del quale sotto vari aspetti, sarebbe dovuto lo strato ultraperiferico sopradescritto. Ripeto che in contatto con quest'ultimo si vedono spesso dei leucociti a nucleo polimorfo intensamente colorabile.

Ho già più addietro accennato all'esistenza di figure cariocinetiche complesse nei nuclei dei megacariociti, e al significato che esse hanno di attiva proliferazione dei nuclei stessi. A tale proposito io mi associo a quelli osservatori i quali hanno dichiarato che la proliferazione non è seguita mai dalla divisione del protoplasma cellulare e che ha solo per effetto di moltiplicare i nuclei componenti l'ammasso nucleare. Tali figure si trovano spesso nel midollo delle epifisi più di frequente che in quello delle diafisi, e più nei giovani animali che negli adulti, e più spesso nelle cavie che nei conigli. Frequenti sono pure le figure cariocinetiche in alcuni elementi incolori del midollo, e talvolta esse sono numerose anche in midolli di animali sani e normali, onde è forza tenerne conto prima di giudicare di una proliferazione abbondante degli elementi midollari provocata ad arte da qualche sostanza introdotta nell'organismo, o da particolari circostanze in cui questo è stato posto.

Ma se alle figure cariocinetiche degli elementi mononucleati si può attribuire il significato di vere proliferazioni cellulari, non altrettanto, come si è detto, si può ammettere per i megacariociti, in cui la proliferazione nucleare indica forse nulla più che uno stato particolare di vita dell'elemento, cui terrà dietro più o meno lontana la sua finale distruzione.

Il Flemming, ponendo in luce questo stato di vita regressiva che rappresenta il megacariocito, lo affratella in quanto all'origine ai comuni leucociti midollari, e gli nega ogni reale funzione.

Se io consento, poichè in nessun caso ho avuto campo di convincermene, che dal megacariocito non derivi mai una produzione di nuove cellule incolori, io dubito tuttavia, che uno qualsiasi degli elementi incolori del midollo possa costituire un megacariocito, e ritengo, invece, che a formarlo sia destinato un elemento mononucleato ricco di protoplasma, a nucleo grosso vescicolare, a contorno molto forte e contenente nel carioplasma oltre a qualche minutissimo cariosoma un più grosso ed evidente corpicciuolo centrale o nucleolo. Non è difficile trovare in certi casi molti di tali elementi il cui nucleo presenta vari gradi di imperfetta suddivisione donde risultano poi le gemme del futuro ammasso nucleare. Se il predetto elemento mononucleato sia una cellula distinta o specifica, oppure se essa a sua volta sia una differenziazione di uno dei molteplici elementi incolori i quali sieno tutti fra loro equivalenti del midollo, io non saprei dire, ma ritengo tuttavia che quello segni il punto di partenza del futuro megacariocito.

Ho già accennato alla dimostrazione che venne data da vari autori della non esistenza di una frammentazione indiretta del nucleo ammessa da Arnold; qui, aggiungo solo avere confermata la presenza delle figure cui si attribuiva il significato suddetto, nei midolli di animali espressamente uccisi, e fissati solo diverse ore dopo la morte; e di avere compiute alcune osservazioni le quali mi fecero escludere che il fenomeno sia dovuto ad una vera intossicazione cadaverica. Infatti, uccisa per emorragia una cavia sana, le ho estratto immediatamente tutti gli organi, indi la posi in fresco, circondata di ghiaccio, per 24 ore. L'animale si è conservato benissimo, e non presentava traccia di putrefazione. Un pezzetto di midollo accuratamente

stemprato in brodo sterilizzato, e coltivato, rimase sterile, come già in casi simili aveva osservato il Demarbaix, e ciò malgrado, gli elementi giganteschi presentavano il nucleo frammentato, suddiviso in blocchi grossolani e disuguali di aspetto omogeneo e rifrangente, fortemente tingibili.

Non è inverosimile che il fenomeno sia piuttosto legato alla cessazione del circolo, e alle conseguenti variazioni delle correnti osmotiche nel protoplasma cellulare e nel nucleo rispettivo, e non escludo tuttavia che taluni veleni possano anche in vita produrre lo stesso fenomeno, come ha descritto il Tambusti nella difterite.

È noto che abbastanza di frequente si osserva nel midollo di animali sani qualche elemento a nucleo polimorfo incluso nel protoplasma dei megacariociti, e che questo fenomeno fece ritenere al Denys che dal nucleo complicato dei megacariociti e del rispettivo protoplasma, avessero origine i leucociti a nucleo polimorfo. Osservazioni posteriori hanno indotto, invece, gli autori e lo stesso Denys a ritenere, che la presenza dei leucociti nel protoplasma dei megacariociti fosse dovuta realmente ad un fenomeno di fagocitosi. Io ho osservato diversi casi in cui si produce una fagocitosi attiva nei megacariociti midollari, e stimo opportuno di riferirli.

Alcuni di questi si riferivano a conigli in cui per un qualsiasi motivo esisteva un processo suppurativo in qualche parte del corpo. Il midollo in questi casi era molto ricco di leucociti a nucleo polimorfo e di questi molti venivano inclusi nel protoplasma dei megacariociti.

Una riproduzione assai meno intensa del fenomeno, ma pure superiore d'alquanto a quella che si può trovare anche nell'organismo normale, ho osservato nel midollo di coniglie gravide. Anche in queste è alquanto esagerato l'accumulo di leucociti polimorfi nel midollo, e non molto di raro si trovano dei megacariociti che ne contengono uno solo, o qualcheduno.

Ma il fenomeno nella sua massima evidenza l'ho riscontrato nel midollo di conigli giovani lasciati morire per inanizione. In questi trovai numerosi megacariociti contenenti un gran numero di globuli bianchi a nucleo polimorfo. Essi erano già notevolmente impiccoliti, e il nucleo era addensato e fortemente colorabile. Non sempre nei conigli morti per inanizione, il fenomeno

riesce così colossale come in taluni casi, pure assai di frequente vi si trova qualche bello esemplare di fagocitosi abbondante da parte di diversi megacariociti. Taluni di essi presentavano solo dei frammenti di nucleo, altri dei detriti granulosi come residui della digestione cellulare. In altri casi di morte per inanizione ho osservato in quasi tutti i megacariociti l'emissione di abbondanti vescicole omogenee, o di frange a pieghe. Queste ultime mi apparvero prodotte dal protrudere di una sostanza omogenea attraverso dei pori vicinissimi, cosicchè ogni goccia fuoriuscita si trova a contatto della vicina e si comprime. Il tutto insieme forma come una frangia in cui le linee di contatto delle goccie fuoriuscite costituiscono una specie di radiazione regolare.

Inoltre ho riveduto il fenomeno in proporzioni notevoli nel midollo di un coniglietto giovine che avevo assoggettato a scottatura quasi istantanea nell'acqua a 90°, degli arti posteriori. L'animale è morto spontaneamente dopo *12 ore,* e ancora caldo ne fissai il midollo come al solito nel liquido di Flemming, e nella mia soluzione di sublimato nel liquido di Müller. Vi ho trovato numerosi megacariociti che avevano fagocitato molti globuli bianchi impiccoliti a nucleo polimorfo raggrinzato e molto colorabile.

In un coniglio, il quale per avere avuto in breve tempo tre salassi abbondanti si trovava in istato di notevole deperimento, ho pure veduto molti esemplari di fagocitismo nei megacariociti, e altrettanto ho veduto in un caso di marasmo acuto provocato con colture filtrate di diplococco lanceolato in una coniglia gravida. Parimenti ho visto prodursi una fagocitosi abbondante nei megacariociti dopo avere iniettato entro le vene di un coniglio 2-3 c.c. di lecitina. In quasi tutti questi casi che ho brevemente piuttosto indicati che descritti, ho rilevato del pari che dopo un tempo vario dell'esperimento si produceva una evidente leucocitosi del sangue, che durava uno o più giorni secondo la durata e l'intensità dell'esperimento stesso.

Da tutte queste osservazioni credo si possa ricavare la conclusione: essere il midollo delle ossa una delle sedi precipue per la distruzione dei leucociti, i quali, avendo compiuta la loro funzione, od essendo per qualsiasi causa resi incapaci di funzionare, vengono assorbiti e digeriti dal protoplasma dei megacariociti. È questa la sola funzione oggettivamente dimostrabile

dei predetti elementi, chè la funzione secretiva, sebbene si basi sulla visibile emissione di sostanza protoplasmatica in varia forma alla periferia dell'elemento. pure essa è sempre, per quanto verosimile, una concezione teorica, e la supposta derivazione dai megacariociti di giovani cellule incolore non ha alcun fondamento. Il d[r] Pugliesi avrebbe trovato, come accennai più sopra, questa derivazione nel midollo del porco spino, cui ha estirpato la milza, oppure in questa ultima, dopo averne amputata una parte parecchie settimane prima. Il d[r] Pugliesi ha scelto il riccio perchè questo animale possiede numerosi megacariociti nella sua milza, ma di questi se ne trovano pure, benchè meno abbondanti, nella milza di conigli assai giovani, del peso da 4 a 500 grammi. Io ho estirpato la milza a questi animali — che tollerano benissimo l'operazione — e ne esaminai il midollo a varie distanze di tempo. Solo in un caso esaminato dopo 8 giorni dall'operazione, ho trovato che il midollo era caratterizzato da una notevolissima quantità di elementi mononucleati in via di proliferazione indiretta, nonchè da una quantità molto grande di leucociti polimorfi. In tutti gli altri casi, che furono esaminati dopo maggior tempo dalla operazione, io non ho veduto nel midollo nessun sensibile cambiamento, o tutto al più una leggera esagerazione del reperto consueto, cioè, piuttosto abbondanti i leucociti polimorfi, e più facili a trovare i megacariociti contenenti uno o due leucociti. In nessun caso ho veduto una moltiplicazione delle grandi cellule, e neppure un aumento di quelle figure policariocinetiche, che si trovano non di rado nei midolli giovani.

I megacariociti non si trovano solo nel midollo delle ossa; è noto che prima furono osservati nel fegato e nella milza embrionale; io ne vidi più volte nelle ghiandole linfatiche di feti di vitello, e benchè di raro, ne vidi anche nella polpa splenica di cani giovani, come spessissimo si trovano nella milza di giovani conigli, e sempre in quella del ratto e del Riccio.

Tuttavia è possibile di riprodurre sperimentalmente un tale stato di cose che riconduca un organo adulto nelle condizioni in cui si trova nel periodo del suo sviluppo. Io cercai di ottenere queste condizioni nel cane adulto, allacciandogli l'arteria splenica. In conformità di mie vecchie esperienze, ho potuto rilevare che la milza del cane in tali condizioni perde dap-

prima una parte dei suoi elementi, e più tardi li rigenera. È nel periodo di tale rigenerazione, il quale coincide col formarsi di un circolo nuovo collaterale compensatore, che si trovano nella polpa splenica i caratteri che essa presenta nel suo primo periodo di sviluppo. Ordinariamente messa allo scoperto la milza ne asportavo un pezzetto; indi gettavo un laccio sul tronco dell'arteria splenica. Riposto il viscere nell'addome lo esaminavo a varie riprese; così cominciai a estirparlo a un cane operato tre giorni prima, e poi in altri alla distanza di otto, quindici, venti, trenta e sessanta giorni.

Frattanto, esaminavo il pezzo di milza asportato e vi osservavo ordinariamente la non esistenza di megacariociti (1). Questi, invece, benchè non numerosissimi, erano presenti già dopo un mese, e più ancora dopo 40 giorni dall'operazione.

Io non ho potuto scorgere in essi alcuna differenza di struttura dai megacariociti del midollo delle ossa; solo in alcuni casi ho trovato che dal protoplasma protrudevano, invece di vescicole o di frangie o di processi retiformi, dei fasci di filamenti quasi fossero delle cilia. Anche in questi elementi ho trovato degli esemplari che racchiudevano dei leucociti a nucleo polimorfo, onde, dal complesso ritengo che essi, come nell'aspetto, così anche nel significato, si possano identificare ai megacariociti midollari.

La mia attenzione fu rivolta altresì a talune variazioni che presentano i megacariociti in particolari circostanze della vita dell'animale.

Già ho rilevato la facilità con cui si trovano degli esemplari colossali di fagocitismo cellulare, ogni qualvolta esista una condizione che alteri una quantità più o meno grande di leucociti, mettendoli nell'incapacità di funzionare più oltre. Vi sono altre circostanze nelle quali sembra che si eserciti un'azione chimica speciale sul protoplasma dei megacariociti, in virtù della quale il protoplasma si rarefà, diventa sempre più areolare, e alla fine si distrugge, lasciando solo a rappresentare l'antico elemento il nucleo, il quale ha subìto esso pure una trasformazione. In-

(1) Non fece eccezione che un caso, in cui si trattava di un giovanissimo cane da caccia, e nella cui milza erano delle rare cellule giganti a nucleo in gemmazione e dei globuli rossi nucleati.

fatti, le pareti sembrano accartocciate, la cromatina è scomparsa dal contenuto nucleare che è chiaro, e andò ad adossarsi alla membrana nucleare, la quale si colora per ciò più intensamente. Il fenomeno fu già osservato da Demarbaix (*La Cellule*, 1889. Tome V) nel midollo fresco normale, e già fu da esso dichiarato affatto indipendente da alterazioni cadaveriche, e io ho osservato che in talune condizioni, i nuclei così trasformati e liberi si trovano assai più abbondanti che nei midolli normali; anzi vi si trovano in grande prevalenza. Infatti, io ottenni questa alterazione in modo spiccatissimo injettando nelle vene di giovani conigli da uno a due centimetri di latte non sterilizzato, e uccidendoli dopo due a cinque giorni. Il midollo in questi casi, oltre a una grande dilatazione di vasi in cui si trovano addensati globuli rossi e cumuli di piastrine distrutte, presenta numerosi megacariociti, il cui protoplasma è sensibilmente attenuato, rarefatto e ridotto di volume, fino a scomparire quasi del tutto, mentre residuano nuclei a pareti accartocciate, intensamente tingibili, e a contenuto omogeneo e chiuso come fossero vuoti.

Infine, ho esaminato altri casi in cui il midollo presentava una grave alterazione e sono quelli in cui io facevo la iniezione endovenosa di stafilococco piogeno aureo alla dose di 1 centimetro, oppure anche la iniezione subdurale di mezzo centimetro di coltura di stafilococco uccisa col cloroformio. Sia negli animali che morirono spontaneamente per iniezione endovenosa dopo 3-5 giorni; sia in quelli che soccombettero alla iniezione subdurale di coltura viva o morta, nel brevissimo periodo di 6 ore, il midollo si trova sempre di colore rosso scuro, il che dipende dall'avere esso assunto un carattere emorragico. Nei tagli di questi midolli si osserva, infatti, un enorme ingorgo di tutti i vasi sanguigni, e cumuli di globuli stravasati fra gli elementi cellulari. I megacariociti in questi casi, specie per morte rapidissima, presentano sopratutto il fatto della loro disorientazione cagionata dalla alterazione circolatoria, e alcuno di essi si trova libero nel sangue stravasato, o anche nel lume di vasi sanguigni.

È positivo che il veleno dello stafilococco esercita un'azione elettiva sul midollo delle ossa, e ciò spiega come esso sia l'agente ordinario dell' osteomiellite infettiva. Nelle mie esperienze io

non trovai differenze a tale riguardo fra l'uso di colture vive e quello di colture morte; onde reputo che i tossici abbiano una parte molto importante.

Così sono venuto accennando man mano alle diverse condizioni sperimentali nelle quali ho prodotto delle alterazioni nel midollo delle ossa, che specialmente riguardano i megacariociti. Abbiamo veduto che essi esagerano notevolmente la loro proprietà fagocitica *nella inanizione;* la trovammo pure esagerata e attivissima *nelle scottature estese* con morte rapida; la vedemmo assai manifesta *nella suppurazione*, e anche dopo *salassi esaurienti;* la vedemmo anche molto esagerata dopo *iniezioni endovenose di lecitina,* e dopo ripetute iniezioni di *filtrati di diplococco lanceolato* (varietà fibrinogena) in coniglie che si trovavano in istato di gravidanza, il quale presenta già di per sè una leggiera esagerazione della fagocitosi normale.

Abbiamo inoltre rilevato le gravi alterazioni di circolo, e la conseguente lesione dei megacariociti nelle infezioni acutissime da stafilococco aureo e la distruzione del protoplasma con variazione del nucleo rispettivo, in taluni casi, come, ad esempio, dopo l'iniezione endovenosa di latte non sterilizzato. Ebbene, in tutti questi casi, le lesioni del midollo si accompagnarono al fenomeno dell'*embolismo di nuclei giganti nei capillari del polmone.* In taluno dei miei esperimenti e segnalo tra questi: *l'inanizione, l'iniezione endovenosa di lecitina, di latte, di stafilococco,* e in minor grado *la scottatura e l'iniezione di filtrato di diplococco nella gravida,* il fenomeno si produsse in grande estensione. Infatti, talvolta in ogni taglio microscopico del polmone si potevano trovare tre o quattro nuclei embolizzanti. Io preferisco accennare all'embolia del nucleo gigantesco, anzichè del megacariocito, perchè non è dimostrabile con sicurezza che tutto l'elemento sia trasportato. È per lo meno assai più frequente il trasporto embolico dell'ammasso nucleare. Talora sono nuclei relativamente piccoli accartocciati, a membrana assai tingibile; altre volte sono dei nuclei o degli ammassi nucleari veramente giganteschi, e si trovano di preferenza nei vasi della corteccia polmonare. In un caso in cui le circostanze che avevano provocato l'embolismo erano cessate da qualche giorno, io vidi nei vasi polmonari dei corpi a figure bizzarre che si coloravano intensamente e che ho interpretati come trasformazione dei

nuclei embolizzati in via di distruzione. Infatti, io ritengo che l'embolismo polmonare dei predetti elementi abbia per fine la loro definitiva eliminazione dall'organismo.

Il fenomeno che ho descritto fu scoperto, come è noto, da Lubarsch, il quale recentemente ha rilevato che a produrlo non è necessario nessun traumatismo sulle ossa, ma bastare invece una iniezione artificiale di elementi parenchimatosi. Io ho trovato le più svariate condizioni in cui il predetto fenomeno si produce, e ritengo di potere affermare che esso si ottiene per qualunque causa che generi un grave disordine circolatorio nel midollo, o che alteri il protoplasma del megacariocito. Io pure, come altri autori, ho trovato dei casi rari di embolismo cellulare nel polmone, anche in conigli normali, o in coniglie gravide. E anche nei midolli normali si trovano particolarmente nelle parti centrali dei nuclei alterati, liberi, derivanti da involuzione dell'antico elemento gigantesco. In tali casi occorre però eseguire molti tagli del polmone per trovarne un solo esemplare; invece, nei casi sperimentali che ho descritto, ad ogni taglio se ne trovano parecchi, e in taluno di essi il fenomeno fu complicato dal trasporto in massa nei capillari polmonari di leucociti polimorfi e granuli acidofili, provenienti certamente dal midollo.

Ritengo, pertanto, che i fatti patologici rappresentino la esagerazione di un fatto normale, e abbia per fine la distruzione completa e definitiva del megacariocito nei capillari del polmone. La penetrazione dell'elemento nel circolo avviene assai facilmente per la grande facilità con cui si possono rompere o alterare le sottilissime pareti dei numerosi vasi midollari; questo fatto, però, ha il suo riscontro in altri, in cui avviene pure il trasporto di elementi parenchimatosi nel circolo (cellule placentari, cellule epatiche, epiteli cilindrici), e al trasporto embolico non segue necessariamente la trombosi; anzi nell'embolismo polmonare dei megacariociti, io non la vidi mai anche quando era abbondantissima. Se i predetti elementi si trovano nei trombi, essi devono esservi come un reperto non causale, sebbene taluno di essi (epiteli cilindrici) raccolti separatamente e iniettati in circolo, possano da soli determinare la coagulazione del sangue. Ma di questo argomento tratterò più in esteso nello studio sulla trombosi che ho in preparazione.

---

## *Sull'ematopoesi nella Lampreda;*

Nota di MAURIZIO ASCOLI.

L'origine dei globuli rossi, all'infuori dei primissimi periodi embrionali, è da tempo oggetto di controversia da parte degli studiosi. Due principalmente furono le teorie che si contesero il terreno: l'una che sostiene la loro derivazione da una speciale varietà di globuli bianchi, detti eritroblasti, l'altra che ne ripete la produzione indipendentemente da questi, da moltiplicazione di elementi specifici preesistenti.

Un argomento validissimo a sostegno della seconda tesi ci è offerto dal fatto che la moltiplicazione delle cellule rosse del sangue per mitosi è stata effettivamente dimostrata in molti vertebrati.

È merito di Neumann e di Bizzozero di avere fornito questa dimostrazione per ciò che si riferisce ai mammiferi, nei quali essi assodarono, che nell' età adulta il processo di scissione degli eritrociti si localizza nel midollo delle ossa, dove costantemente si riscontrano globuli rossi giovani (nucleati) e figure cariocinetiche di questi.

Ulteriori ricerche del professor Bizzozero in collaborazione col D[r] Torre (1), misero in chiaro i fatti seguenti:

*a)* In tutti i vertebrati *adulti* ha luogo una continua produzione di globuli rossi per scissione indiretta di forme giovani di globuli rossi preesistenti.

*b)* In tutti i vertebrati esistono organi speciali che debbonsi considerare quali focolai, in cui la produzione di nuovi globuli rossi specialmente si compie. Questi organi sarebbero rappresentati per i mammiferi, gli uccelli, i rettili, gli anfibi anuri dal *midollo delle ossa;* per gli anfibi urodeli dalla *milza* e pei pesci non solo dalla *milza*, ma anche da quel *parenchima linfoide, il quale in questi animali occupa una parte più o meno grande del rene.*

*c)* Nei vertebrati inferiori (rettili, anfibi e pesci) il sangue presenta quella particolarità che allo stato embrionale si osserva nel sangue di tutti i vertebrati, contiene cioè in maggiore o minor numero dei globuli rossi giovani e delle forme di scissione indiretta. Ma sì gli uni che le altre vi si trovano sempre in numero notevolmente minore che non negli organi che formano, per i diversi ordini di animali, il relativo focolaio ematopoetico.

*d)* Questo ricordo per così dire, dello stato embrionale del sangue circolante, diventa più spiccato in quegli animali, che furono soggetti ad emorragie; e per contro si va facendo meno appariscente, o scompare anche affatto sotto quelle condizioni (mancanza ed insufficenza di nutrimento, stato di cattività ecc.) che inducono una diminuzione dell'attività generale dell'organismo.

Sulla produzione degli elementi del sangue nei Ciclostomi non si avevano fino a poco tempo fa osservazioni, ad eccezione di quella di Bizzozzero (2), pubblicata nel '92, la quale stabiliva che nella larva di Petromyzon si trovano costantemente nel tessuto linfoide della valvola spirale dell'intestino dei leucociti in via di scissione indiretta e che questa valvola spirale ha quindi valore di organo ematopoetico.

Recentemente il D[r] E. Giglio-Tos ha rivolto la sua attenzione a questo argomento e se ne è occupato diffusamente in due memorie (3) (4) sulle " Cellule del sangue della Lampreda „ l'una, sull'" Ematopoesi nella Lampreda „ l'altra, che si limita però al suo studio nella larva.

Per quanto concerne i globuli rossi l'A. sostiene la loro derivazione da una varietà di leucociti (eritroblasti) e descrive minutamente questa loro supposta trasformazione in eritrociti nel tessuto linfoide della valvola spirale; asserisce inoltre di non essersi mai imbattuto nei numerosi preparati esaminati in cariocinesi di globuli rossi ed esplicitamente esclude una loro moltiplicazione per qualsiasi via. La sua affermazione recisa è (1) (pag. 33): " Gli eritroblasti in circolazione non si riproducono mai per divisione indiretta; forse, ma raramente per divisione diretta. Gli eritrociti non si riproducono mai „.

Riguardo ai leucociti, fra le conclusioni alle quali giunge il D[r] Giglio-Tos si trova questa (3) (pag. 32) che riproduco:

" I leucoblasti (cioè le cellule bianche produttrici dei leucociti) si riproducono (in circolazione) per divisione nucleare diretta; giammai per indiretta „. Più tardi, nella seconda memoria (4) (a pag. 16) afferma: " La mitosi è il modo di divisione di tutti questi elementi (cellule madri, cellule emocitogene, eritroblasti e *leucoblasti*) finchè sono rinchiusi nello stroma della valvola „. Ne verrebbe quindi secondo l'A. che diverso è il modo di accrescimento dei leucoblasti, secondochè sono rinchiusi nelle maglie del parenchima valvolare, oppure circolano liberamente nel sangue. Nei leucociti (3) (pag. 32) egli trova soltanto una divisione amitotica del nucleo, non seguita da quella del corpo cellulare.

La circostanza che, secondo il D[r] Giglio-Tos, nella lampreda l'ematopoesi seguisse in maniera dissonante da quella riconosciuta negli altri vertebrati, meritava degli studi di controllo. Essa attrasse già l'attenzione di qualche biologo: la recensione del lavoro sulle " Cellule del sangue nella Lampreda „ nel *Zoologisches Centralblatt* ha parole poco favorevoli in proposito.

Per consiglio del prof. Bizzozero — al quale, nonchè al suo aiuto D[r] Sacerdotti, che mi furono larghi del loro benevolo appoggio, esprimo qui la mia gratitudine — ho ripreso lo studio della provenienza degli elementi cellulari sospesi nel sangue di Petromyzon Planeri.

Il mio esame si limitò dapprima alla larva e si portò anzitutto sul tessuto interstiziale del rene; i preparati di questo organo colorati con ematossilina, dopo fissazione in liquido di Zenker, indurimento in alcool ed inclusione in paraffina, ci mostrano — come lo attesta la Fig. 1 della tavola annessa — delle figure di mitosi nei leucociti situati in quantità nel tessuto linfoide interposto ai canalicoli renali. Questo complesso di organo secretore e di organo linfoide circonda il tubo intestinale alla guisa d'un ferro di cavallo; le forme ora accennate abbondano di preferenza in corrispondenza dei rami liberi di questo ferro di cavallo, mentre a misura che ci avviciniamo al tratto d'unione la sostanza linfoide ed insieme i tubuli renali sono gradatamente sostituiti da grasso e da vasi sanguigni comuni. La presenza delle menzionate figure di divisione indiretta è costante; esse si presentano alle volte così abbondanti, che

mi avvenne di numerarne fino a 4 in un solo campo d'osservazione (obbiettivo ad immers. omog. Reichert $\frac{1}{15}$ oculare 4). Da questi dati possiamo dunque concludere che tale tessuto linfoide, assieme alla valvola spirale dell'intestino, concorre alla produzione dei globuli bianchi.

Assodato questo fatto sono passato a studiare quanto in proposito si osserva nel sangue circolante. A questo scopo ottenevo i preparati per distensione d'una goccia di tale liquido fra due vetrini coprioggetti, come è pratica comune; staccati l'uno dall'altro e lasciati essiccare all'aria, li fissavo in una miscela d'alcool ed etere a parti uguali; per la colorazione usavo l'ematossilina.

Giova notare che in questa serie di ricerche io non mi limitai allo studio di preparati ottenuti da animali pescati da qualche giorno e tenuti per qualche tempo in cattività, in un ambiente che differisce molto dal loro abituale e nel quale il ricambio organico deve essere notevolmente intorpidito; ma portai altresì le mie indagini su esemplari appena presi, facendone dei preparati sul posto.

Un'osservazione anche superficiale di questi, ottenuti nelle esposte favorevoli condizioni, rivela subito che i suoi elementi devono essere oggetto d'una rigenerazione vivace: lo attestano la differenza della quantità di emoglobina contenuta nei singoli globuli; la presenza di un numero cospicuo di globuli rossi giovani, che è agevole distinguere perchè costituiti da un nucleo relativamente grosso circondato da una sottile zona di protoplasma, colorata dall' emoglobina; **infine il reperto costante di cariocinesi in eritrociti.**

Trattandosi di eritrociti giovani, il cui contenuto emoglobinico è spesso scarso, per mettere in evidenza la differenza dai leucociti, ricorsi alle doppie colorazioni con ematossilina ed eosina, ematossilina ed acido picrico, al metodo di Foà ed alla triplice colorazione con ematossilina rubina ed eliantina secondo Kultschitzky. L'affinità maggiore dei globuli rossi per l'eosina e per l'acido picrico rende agevole la loro distinzione dai bianchi; col metodo di Foà (che consiste nel far passare i preparati fissati in acido osmico. in una soluzione acquosa allungata di bleu di metilene, immergendoli dopo 3-4 minuti in

acido cromico all' 1°/$_0$ e lasciandoveli per altri 5 minuti) le emazie sono tinte in un bel verde smeraldo col nucleo azzurro, laddove rimangono incolori i leucociti, il loro nucleo violetto.

Il metodo di Kultschitzky pure mi diede ottimi risultati; la colorazione rossa che assume l'emoglobina fa spiccare distintamente i globuli rossi; i bianchi riescono colorati in giallo od in ranciato.

Nelle fig. 2, 3 e 4 sono riprodotti diversi stadî di eritrociti in via di scissione indiretta, notati in preparati ottenuti coi metodi sopraddetti e la maniera con la quale essi sono colorati mette chiaramente in evidenza la loro natura di globuli rossi.

Per appurare poi la circostanza che queste mitosi provengono sicuramente dal sangue circolante nei vasi, e non sono fuoruscite dagli interstizi dei tessuti, ho fatto delle sezioni trasverse dell'animale fissato in totalità in liquido di Zenker od in sublimato e le colorai con i soliti metodi; riscontrai in esse pure figure cariocinetiche in eritrociti nell'interno del lume vasale e ne riporto due nelle fig. 5 e 6, che ci presentano questo processo in vasi branchiali.

Ma non soltanto i globuli rossi, anche i bianchi si moltiplicano nel circolo per scissione indiretta, proprietà che la lampreda ha comune con altre classi dei vertebrati; ne fanno fede le forme di mitosi, nelle quali m' imbattei nell' esame di vari preparati, una delle quali è rappresentata nella fig. 7. Anche qui il controllo con sezioni trasversali complete dell'animale mi confermò la loro presenza nell' interno dei vasi sanguigni.

A queste ricerche eseguite nella primavera e nell' estate, stagioni nelle quali la melma delle acque che costituisce il vivaio delle lamprede contiene soltanto larve di Petromyzon, ne feci seguire nell' inverno delle altre sull' animale adulto, a fine di appurare se in esso l'ematopoesi segua nella stessa guisa.

Trovai negli esemplari che sottoposi al mio esame — in rapporto col ciclo evolutivo di questa specie e coll'epoca delle mie osservazioni — la cavità addominale occupata quasi in totalità dal materiale riproduttivo — uova o seme — con una corrispondente progressiva riduzione dell' intestino e del rene, nei quali l'elemento linfoide va diminuendo fino a scomparire.

Giova notare che secondo la maggioranza degli autori il Petromyzon Planeri dopo aver compiuto la funzione della riproduzione perisce; ed è lecito mettere in rapporto le atrofie sopraddette del rene e dell'intestino, come pure i fenomeni regressivi notati in altri organi, con questo sacrifizio dell' individuo alla conservazione della specie.

Cionondimeno, sebbene l'intensità dei processi di ricambio per le esposte circostanze debba essere assai affievolita, mi riuscì di mettere in evidenza qualche rara figura cariocinetica tanto in globuli rossi, quanto in globuli bianchi nell'interno dei vasi. Ne ho disegnate alcune che sono riprodotte nella tavola annessa. Devo notare però che in un caso fui colpito da una enorme abbondanza di forme di scissione indiretta in globuli bianchi; questa, che non so se chiamare leucocitosi o leucemia, era così cospicua che riusciva cosa agevole il sottoporre al microscopio dei campi d'osservazione, dove fossero raccolte fino a 10-15 mitosi. Resta assodato adunque che nell'animale adulto l'ematopoesi avviene cogli stessi processi che nella larva.

E questi nella lampreda non differiscono essenzialmente da quanto succede nelle altre classi dei Vertebrati e rappresenta soltanto il gradino più basso fra quelli descritti nella evoluzione dell'ematopoesi. La sua localizzazione in organi speciali è limitata ai soli leucociti. Il sangue circolante, l'importanza del quale nella produzione dei globuli rossi va scemando a misura che procediamo verso i Vertebrati superiori sino a diventare nulla, è la fonte precipua delle emazie della lampreda.

Ma poichè da varie parti si insiste ancora sulle teorie, che affermano la provenienza delle emazie da leucociti, mi piace riprodurre qui le parole del prof. Bizzozero, che stanno in chiusa dell'appendice al citato lavoro fatto in collaborazione col D[r] Torre, tantopiù inquantochè esse sono perfettamente valide anche nel caso attuale. Dopo aver preso in esame e fatta una minuziosa critica delle varie ipotesi emesse sull'origine dei globuli rossi, egli termina così:

" Esposti così i risultati dell'osservazione diretta, a me pare di dover concludere che fino ad ora non si è dimostrato con quel rigore che richiede la scienza, altro modo di produzione dei globuli rossi, che quello per scissione indiretta. Quanto si scrive intorno ad altri modi non è che ipotesi; ed alle ipotesi

non si dovrebbe ricorrere che nel caso in cui il prodotto di tale scissione apparisse insufficiente a compensare quelle perdite globulari che il sangue quotidianamente subisce. Ma questo rapporto fra produzione e distruzione dei globuli rossi per ora ci è impossibile accertarlo, giacchè non abbiamo mezzi per determinare nè il numero dei globuli che continuamente si distruggono, nè quello dei globuli che si producono. A questo riguardo però, abbiamo parecchi fatti, che per altra via ci dimostrano l'importanza della scissione indiretta „.

Questi fatti che per brevità non fo che riassumere, sono:

" Il numero notevole delle forme cariocinetiche anche nello stato perfettamente fisiologico;

la rapidità con cui la scissione si compie;

il variare costante del numero delle forme cariocinetiche a seconda del bisogno più o meno grande che l'organismo ha di globuli rossi;

la circostanza che non v'è alcuno stadio della vita, a cominciare dai primi periodi della vita embrionale in cui manchi la cariocinesi dei globuli rossi „.

E chiude in questo modo:

" Dopo aver posto in sodo così la intensità e la continuità del processo di scissione dei globuli rossi nell'animale adulto, io, lo ripeto, non posso nè voglio esplicitamente escludere la possibilità che i globuli stessi, secondo le ipotesi sopra discusse, possono avere origine per altri processi. So abbastanza, come, nelle scienze di osservazione, sia impossibile la dimostrazione rigorosa d'una negazione. Credo però che sia inutile di continuare a parlare di queste ipotesi, se prima coloro, che le propugnano non le abbiano dimostrate necessarie e non le abbian sostenute con argomenti più convincenti di quelli posti in campo finora „.

Ora che la dimostrazione dell'esistenza d'una moltiplicazione di globuli rossi per cariocinesi nella lampreda è fornita, le riferite parole sono perfettamente applicabili ed hanno valore anche per essa.

Non è necessario ricorrere all'ipotesi del D[r] Giglio-Tos sulla derivazione degli eritrociti da eritroblasti incolori e le sue asserzioni, che gli eritrociti non si riproducono mai e che le cellule bianche non si moltiplicano nel circolo per divisione indiretta non sono confermate.

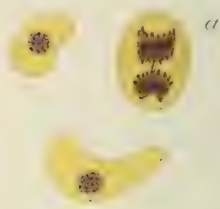
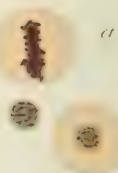
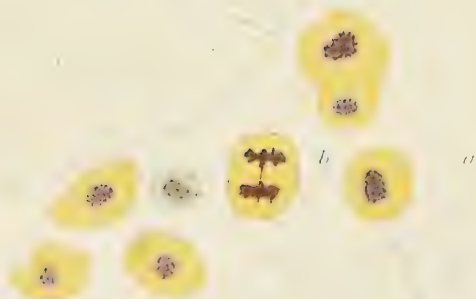
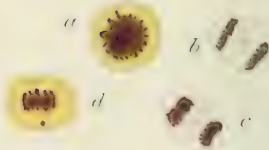



Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8

Conclusioni. — *Nella lampreda la produzione tanto dei globuli bianchi, quanto dei globuli rossi ha luogo per moltiplicazione per mitosi di corrispondenti forme giovani di globuli bianchi e di globuli rossi;*

*le mitosi dei leucociti si osservano tanto nel sangue circolante, quanto nel tessuto linfoide della valvola spirale e del rene;*

*le mitosi dei globuli rossi vennero da me trovate soltanto nel sangue circolante.*

Laboratorio di Patologia della R. Università di Torino.

---

## BIBLIOGRAFIA


1. Bizzozero e Torre, *Sulla produzione dei glob. rossi nelle varie classi dei Vertebrati.* " Reale Accad. dei Lincei „. Anno 281, 1883-84, pag. 16.
2. Bizzozero G., *Sulle ghiandole tubulari del tubo gastro-enterico.* Nota V. " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, 26 giugno 1892.
3. Giglio-Tos E., *Sulle cellule del sangue della Lampreda.* " Accad. Reale d. Scienze di Torino „, 1895-96.
4. Giglio-Tos E., *L'Ematopoesi nella Lampreda.* " Accad. R. d. Scienze di Torino „, 1896-97.


## SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Le figg. 1, 3, 6, 7, 8 sono osservate coll'obb. ad imm. omog. Reichert $^{1}/_{15}$; ocul. N. 2; le fig. 2, 4, 5 con lo stesso obb., ocul. N. 4.

Fig. 1. Sezione trasversa di rene di larva di Petromyzon; fissatore liq. di Zenker; *a*, glob. rosso; *b*, leucocito in mitosi; *c* tubulo renale.

Figg. 2, 3, 4. Preparati a secco di sangue circolante di larva di Petromyzon; *a*, globuli rossi in mitosi; *b* globuli bianchi.

Figg. 5, 6. Sezioni trasverse di larva di Petromyzon, in corrispondenza delle branchie, fissatore liquido di Zenker; *a*, endotelio dei vasi branchiali; *b*, globuli rossi in mitosi.

Fig. 7. Preparato a secco di sangue di larva di Petromyzon; *a*, globulo rosso; *b*, globulo bianco in mitosi.

Fig. 8. Petromyzon adulto; *a*, globulo rosso in mitosi; *b*, *c*, leucociti in mitosi, in preparati di sangue a secco; *d*, globulo rosso in mitosi da un grosso vaso branchiale in una sezione trasversa di pezzo fissato in liquido di Zenker.

# *Un coccidio parassita nei trombociti della rana;*

Nota del Dott. ERMANNO GIGLIO-TOS.

I lavori comparsi in questi ultimi anni intorno allo studio comparato dei parassiti del sangue e quelli specialmente del Danilewsky, del Grassi e del Labbé — per non citare quegli altri che trattano unicamente di questo parassitismo nell'uomo — hanno aumentato considerevolmente ed hanno anche rischiarato le nostre cognizioni su questo interessante punto della Biologia.

Ma se è venuto crescendo il numero dei parassiti endoglobulari, di quelli cioè che svolgono il loro ciclo vitale in parte od interamente nell' interno dei corpuscoli rossi, son rimaste per contro molto scarse le nozioni che si hanno su quelli viventi nei corpuscoli bianchi del sangue. Così che, se si eccettua un lavoro del Danilewsky (1) su di un parassita nei leucociti degli uccelli e certi vaghi accenni che qua e là si possono trovare su organismi ritenuti molto dubbiamente parassiti nei leucociti, non si posseggono per ora altri documenti per la storia di questo speciale argomento.

Il caso che descrivo in questa nota presenta un certo interesse per l'elemento del sangue in cui fu trovato il parassita. È la prima volta di fatto che si faccia menzione di un parassita in quelle cellule del sangue che Recklinghausen chiamò " Spindelzellen „, Hayem " hématoblastes „, Bizzozero " piastrine nucleate „ e Dekhuyzen " Thrombocyten „.

In un mio recente lavoro (2) su queste speciali cellule del sangue io ho, fra le altre cose, dimostrato che esse si devono

(1) Danilewsky, *Développement des parasites malariques dans les leucocytes des Oiseaux*, in " Annales de l'Institut Pasteur „, 1890, p. 427.

(2) Giglio-Tos E., *I Trombociti degli Ittiopsidi e dei Sauropsidi*, in " Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino „, 1898.

— come giustamente già asseriva il Bizzozero — ritenere come un terzo elemento morfologico del sangue, rappresentanti in questi vertebrati delle piastrine dei mammiferi, ma non omologhe ad esse, e che non hanno nulla in comune con gli altri elementi del sangue da cui si possono distinguere e per caratteri del nucleo e per altri ancora del corpo protoplasmatico. In quel lavoro si troveranno anche esposte le ragioni per cui ho creduto più opportuno di accogliere, fra le varie denominazioni, quella di Trombociti ultimamente proposta dal Dekhuyzen.

Si è appunto mentre stava facendo le osservazioni e ricerche su questo speciale argomento che mi capitò sott'occhio il presente caso di parassitismo.

La rana comune (*Rana esculenta*), in cui trovai il parassita, era stata presa sul mercato di Torino e perciò proveniva dai dintorni stessi della città. Fu uccisa il giorno 20 settembre 1897, ed il sangue, preso dal cuore, disteso sul vetrino porta-oggetti e disseccato alla fiamma, fu colorato con una soluzione satura di azzurro di metilene. Quando, osservando i preparati, mi accorsi della presenza del parassita che fin'allora non aveva mai scorto in nessun'altra rana, per quanto ne avessi già esaminato nello stesso modo qualche decina, la rana da cui il sangue fu tolto era già stata buttata via e perciò non potei nè fare altri preparati, nè tentare l'infezione di altri individui con iniezioni artificiali, come sarebbe stato mio desiderio. Dovetti perciò limitarmi a fare ricerche sul sangue di altre rane della stessa provenienza, sempre sperando di ritrovare un altro individuo affetto dello stesso parassita. Ma le mie speranze tornarono vane.

Che le cellule del sangue dove trovai questo parassita sieno veramente trombociti, non ne ho proprio dubbio alcuno. La disposizione della cromatina nel nucleo, le proprietà del succo nucleare, la struttura del protoplasma, la forma della cellula stessa corrispondono perfettamente a quei caratteri che nel lavoro suddetto io ho descritto come specifici di questi speciali elementi morfologici. Si noti poi che in nessun altro elemento del sangue io ho potuto riscontrare la presenza di questo parassita.

Risulta dunque stabilito: 1° che l'elemento cellulare ospite è il trombocito; 2° che il parassita è proprio di questa specie di elemento.

Del resto si sa come di solito questi parassiti intracellulari abbiano quasi tutti una speciale sede di predilezione.

Se si pon mente a questo fatto, si è indotti a credere che molto probabilmente il parassita in questione è una specie nuova, giacchè, ripeto, non mi risulta che finora sia stato descritto un parassita intracellulare in questa sorta di elementi del sangue. Ma non potendo avere tutti quei dati che sono necessari per una buona determinazione ed una chiara descrizione, ho preferito non dargli alcuna denominazione. I più recenti lavori e del Mingazzini e del Labbé (1) e di altri ancora hanno di fatto dimostrato che i caratteri che servono per determinare i coccidi risiedono principalmente nel loro modo di sporulazione. Ora io non ho potuto vedere nei miei preparati stadio alcuno che in modo certo corrispondesse a questa fase della loro vita, nè, per le ragioni suesposte, ho potuto mettermi in condizione di ottenerla.

Io descriverò qui pertanto il parassita in quella fase di sviluppo in cui l'ho trovato e per renderlo più facilmente riconoscibile vi aggiungo alcune figure dal vero.

Il coccidio in parola si presenta come un corpicciuolo di forma schiettamente ellittica, della lunghezza quasi costante di circa 6 μ per una larghezza di 3 μ. Esso occupa quasi sempre una posizione polare nel trombocito e di prevalenza sta allogato in quel polo appunto dove, — come dimostrai nel lavoro sopra

citato — sta accumulato più abbondante il protoplasma (fig. 1). Tuttavia questa posizione non pare assolutamente necessaria perchè ho trovato anche qualche trombocito in cui il coccidio

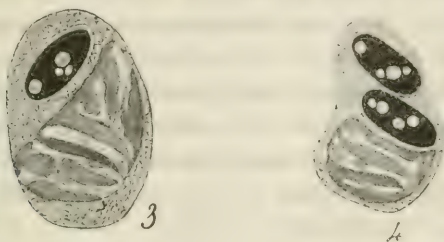
(1) Labbé A., *Recherches sur les Coccidies,* in " Arch. de Zool. expér. ", 3e sér., tom. IV, 1896.

stava ad uno dei lati del nucleo, dove di solito il protoplasma è molto scarso, ed in questo caso naturalmente la forma della cellula ospite ne era alquanto alterata (fig. 2).

In presenza di un simile corpicciuolo estraneo il nucleo del trombocito è sempre alquanto modificato nella forma e, schiacciandosi più o meno, presenta alla superficie una leggera depressione che si modella in certo modo sul contorno del coccidio (fig. 3).

Di solito non c'è che un parassita per ogni trombocito ed allora il nucleo non ha bisogno di deformarsi molto per lasciar posto al coccidio. Tuttavia in certi casi esso è addirittura piegato in due così da occupare nella cellula uno spazio molto minore e lasciare il parassita a suo più grand'agio. Ma la deformazione del nucleo è poi notevole, quando — come in qualche raro caso ho osservato — i coccidî sono due nella stessa cellula.

3

4

Si può scorgere dalla annessa figura 4 che il nucleo è respinto all'uno dei poli, e che, schiacciato e ripiegato su di se stesso, ha perduto affatto la sua primitiva forma ellittica caratteristica.

Qualunque sia però la forma assunta, io non ho mai notato che alla deformazione fosse accompagnata una qualche alterazione palese della sua struttura o della sua propria funzione. In tutti la cromatina è visibilmente disposta in quei cordoni caratteristici detti dal Dekhuyzen mitocromi. In tutti il succo nucleare e la cromatina stessa presentano le identiche proprietà dei trombociti normali. La presenza dunque del parassita non serve — per quanto almeno se ne può giudicare dall'osservazione microscopica — ad alterare le funzioni dell'elemento.

Altrettanto si può dire del protoplasma. Il quale, — se si eccettua una stretta zona incolora che ravvolge tutto il coccidio come in un guscio — si presenta nel resto affatto immutato e

con tutti quei caratteri che ho dimostrato altrove distintivi dei trombociti.

Quanto alla struttura del coccidio essa mi apparve molto semplice.

Nel descrivere altrove (1) il metodo da me tenuto nel colorare il sangue dei vertebrati su cui feci le mie ricerche, io ho fatto notare che l'azzurro di metilene colora in azzurro di Prussia tutto ciò che è vero citoplasma delle cellule, mentre la cromatina ed i granuli di varia natura del protoplasma si tingono in azzurro oltremare, in roseo, in violetto scuro od anche rimangono affatto incolori. Così che si può ritenere la colorazione in azzurro di Prussia propriamente caratteristica del vero citoplasma.

Or bene, il corpo del coccidio nei preparati colorati nel modo suddetto appare per l'appunto tinto di quel colore azzurro di Prussia. Ma in essi la tinta si mostra così uniforme ed intensa che non vi si scorge assolutamente alcuna traccia di struttura fibrillare, nè essa è in alcun modo alterata da granulazioni di sorta, se si eccettuano certi grossi granuli i quali rimangono affatto incolori dentro al corpo colorato del coccidio. Il protoplasma del parassita presenta insomma lo stesso aspetto che ci offre quello dei leucoblasti e degli eritroblasti che non contengono ancora i granuli loro specifici.

Nei disegni qui uniti io ho tentato con una tinta sola di rendere fedelmente l'aspetto presentato dai trombociti affetti dal parassita, ed a bella posta ho fatto in nero uniforme il corpo del coccidio, tinto in azzurro Prussia, per metterlo in contrapposizione con la colorazione più sbiadita del trombocito dove sono solamente rappresentati i fili citoplasmatici, avendo fatto astrazione, per maggiore semplicità, dei granuli specifici in essi racchiusi. I cordoni di cromatina del nucleo sono rappresentati più sbiaditi per indicare la diversità di tinta (azzurro oltremare) da quella del citoplasma.

Si può dunque riassumere in breve che il corpo del coccidio

---

(1) Giglio-Tos E., *Un metodo semplice di colorazione del sangue nei vertebrati ovipari*, in " Zeitschr. f. wissens. Mikrosk. ", Bd. XIV, 1897, p. 359-365 — e *I Trombociti degli Ittiopsidi e dei Sauropsidi*, in " Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1898.

è costituito da una massa di citoplasma compatta ed uniforme contenente uno o più granuli di una sostanza speciale, diversa dal citoplasma.

Io non voglio con ciò negare che il corpo del coccidio possegga nucleo e centrosoma, che forse si potrebbero mettere in evidenza con altri metodi di colorazione. Ma poichè non ebbi la opportunità di poter incontrare altri casi di infezione e ripetere altrimenti le mie osservazioni, debbo tenermi a questa semplice descrizione.

Così è dei granuli contenuti nel coccidio, e che nei preparati ottenuti rimangono incolori affatto e brillanti e sui quali avrei volontieri fatto ricerche per determinarne la natura. Non li ho mai trovato molto abbondanti: da uno in una forma evidentemente giovane (fig. 5), a sette od otto al più. Essi sono perfettamente sferici, all'aspetto un po' simili a sostanza amiloide, disposti nel coccidio senza un ordine apparente. Probabilmente sono solidi, e ciò arguisco dall'aver notato che conservano la loro forma sferica anche quando si trovano a mutuo contatto. Cosa che certamente non avverrebbe se fossero liquidi, poichè la loro superficie si appiattirebbe là dove si toccassero.

Thélohan (1), che fece ricerche speciali sui diversi granuli contenuti nei coccidî, li distingue nei quattro gruppi seguenti: 1° granuli plastici; 2° grossi globuli rifrangenti; 3° granuli cromatoidi; 4° globuli grassi.

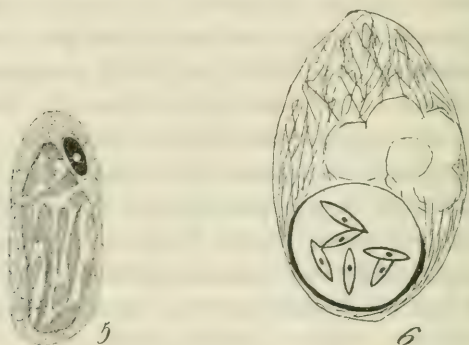
Io credo di non errare ascrivendo i detti granuli alla prima categoria: sia perchè sono i più comuni e costanti in ogni specie di coccidio, sia perchè presentano quei caratteri che Thélohan ritiene appunto distintivi di questa sorta di granuli. È bensì vero che essi non mostrano quel punticino centrale o periferico colorabile con i colori di anilina che Thélohan cita fra i loro caratteri distintivi, ma queso autore stesso ammette che esso non si trovi che in certe specie di coccidî.

Molto probabilmente questi granuli plastici, che io non vidi mai in numero superiore ad 8, coll'invecchiare del coccidio diventano più numerosi fino a riempirne tutto il corpo al fine dello sviluppo, come si sa avvenire in tutte le altre specie.

---

(1) Thélohan P., *Nouvelles recherches sur les Coccidies*, in " Archives de Zool. expérim. ", III sér., tom. II, 1894, p. 541-573.

Quanto allo sviluppo di questa specie di coccidio, per le ragioni già esposte, io non sono in grado di dir nulla di certo. Gli individui che potei osservare si presentavano press' a poco tutti nello stesso periodo vitale, nè potei in essi osservare una differenza di struttura che fosse indizio di una fase più o meno avanzata nel loro ciclo di vita. Solo uno ne rinvenni, quello disegnato nella fig. 5, che molto verosimilmente è da ritenersi più giovane, sia perchè assai più piccolo degli altri, sia ancora perchè non contenente che un solo granulo brillante.

Nè tanto meno trovai fasi di sporulazione le quali mi avrebbero permesso di determinarne la specie. Tuttavia ho voluto presentar qui nella figura 6 un caso di sporulazione che potrebbe

anche darsi si riferisse precisamente a questa specie. L'elemento che contiene il parassita sporulante è molto alterato, con il protoplasma appena rappresentato da alcuni irregolari filamenti intrecciantisi, ed il nucleo rigonfio, verrucoso, così pallidamente tinto, che ho creduto nella figura di rappresentarlo appena con i contorni.

Si direbbe — a giudicare dalla forma di questa cellula — che sia un trombocito, ma non oserei asserirlo essendo scomparsi con l'alterazione subìta quei caratteri che dovrebbero servire a riconoscerlo. Ad una estremità poi si scorge una capsula ben distinta contenente sei spore e senza alcun reliquato di sporulazione.

Mi si potrebbe da taluni obbiettare che — dato l'alto potere fagocitario dei trombociti quale ho dimostrato nel sopra citato lavoro — potrebbe anche essere che questo coccidio non

rappresentasse un parassita dell'elemento, ma semplicemente un corpicciuolo stato incluso per fagocitismo nel trombocito, per toglierlo così dalla corrente sanguigna. Ma contro a questa opinione stanno alcuni fatti che mi paiono sufficienti a confutarla. In primo luogo non ho trovato libero nel sangue circolante nessun simile coccidio, nè corpuscolo alcuno che avesse con esso una certa somiglianza. In secondo luogo la struttura, la forma e l'aspetto del coccidio quali furono descritti non sono quelli di un corpo organico che venga distrutto dall'elemento che lo introdusse nel suo interno per fagocitosi, bensì quelli di un organismo normale, sano e che gode di tutte le sue funzioni fisiologiche. E questo sono in grado di poter asserire recisamente, avendo avuto occasione di osservare più volte degli organismi penetrati e inclusi per fagocitismo nei trombociti, ma tutti con tali caratteri di alterazione nella loro struttura da dimostrare all'evidenza che non erano viventi e parassiti, ma che avevano anzi già subìto l'azione deleteria e distruggitrice dell'elemento che li aveva inglobati.

Infine è da notarsi pure che quei trombociti, i quali contengono qualche corpicciuolo penetratovi dentro per fagocitosi, mostrano, — specialmente quand'esso abbia dimensioni ragguardevoli rispetto al trombocito — una certa modificazione nella struttura del loro stesso protoplasma, che non riuscii a scorgere menomamente nei trombociti contenenti il coccidio ora descritto.

*NB.* — Le figure sono state disegnate alla camera lucida di Abbe, obb. apocrom. Zeiss $1,5^{mm}$, apert. 1,30, ocul. 4, tubo evaginato 165 mm.: disegno eseguito sul tavolino da lavoro. — Ingrand. 2000 diametri.

# *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2\Delta_2 u = 0$;

Nota di TULLIO LEVI-CIVITA.

La integrazione dell'equazione $\Delta_2\Delta_2 u = 0$ entro un'area piana semplicemente connessa, per dati valori al contorno di $u$ e della sua derivata normale venne effettuata in modo completo soltanto per contorni di forma molto particolare (*).

È mio proposito di mostrare anzitutto (§ 1) come la questione possa in ogni caso essere ricondotta:

1° alla rappresentazione conforme dell'area data sopra un cerchio;

2° alla risoluzione di certo sistema ($\Omega$) di infinite equazioni lineari con infinite incognite.

Con ciò il problema si potrebbe, almeno dal punto di vista teorico, ritenere esaurito, se si sapessero assegnare le incognite del sistema ($\Omega$); ma la cosa non è senz'altro fattibile, rimanendo tale sistema fuor della cerchia, trattata finora col metodo dei determinanti infiniti (**).

È dunque necessario studiare da vicino il sistema ($\Omega$).

Premesso (§ 2) un criterio generale assai semplice, per risolvere i sistemi lineari infiniti a mezzo di successive appros-

(*) Cfr. principalmente: MATHIEU, *Mémoires sur l'équation aux différences partielles.....*, " Journal de Mathématiques ", 2e série, t. XIV, 1869. — VENSKE, *Zur integration der Gleichung* $\Delta\Delta u = 0$ *für ebene Bereiche*, " Göttinger Nachrichten ", 1891. — LAURICELLA, *Integrazione dell'equazione* $\Delta^2(\Delta^2 u) = 0$ *in un campo di forma circolare*, in questi " Atti ", vol. XXXI, 1896. — ALMANSI, *Sulla integrazione dell' equazione* $\Delta^2\Delta^2 = 0$, ibidem. I risultati generali, stabiliti dal sig. Lauricella per le equazioni della elasticità, inducono, a mio credere, la persuasione che sia possibile estendere anche all'equazione $\Delta_2\Delta_2 u = 0$ il metodo di Neumann della media aritmetica, ma la teoria è ancora da edificare.

(**) Veggasi: CAZZANIGA, *Sui determinanti d'ordine infinito*, " Annali di Matematica ", 1897. Si riconoscerebbe facilmente che il nostro sistema ($\Omega$) non rientra nei tipi risoluti dall'Autore (cap. XIV, ni 1, 7, 8).

simazioni (*), passo a indagarne le condizioni di applicabilità al sistema ($\Omega$). Non mi è riuscito di stabilire in generale la validità effettiva del procedimento, ma solo (§ 3), introducendo una considerevole restrizione sulla natura del contorno. Rimane ciò non pertanto una classe ben ampia di aree piane, per cui si è messi in grado di condurre a termine la ricerca. A ciò è dedicato il § 4. Il § 5 contiene due esempi, che mi sembrano notevoli per la loro generalità.

Del resto io vorrei che il lettore risguardasse la classe di contorni, in tal modo circoscritta, piuttosto come una illustrazione del metodo che come la sua definitiva portata, sembrandomi assai verosimile che il campo di validità ne sia di gran lunga più esteso.

Mi si conceda di aggiungere che il procedimento, di cui qui è parola, porta ad una espressione della funzione incognita $u$ relativamente molto semplice: Essa si presenta come somma di due integrali, uno semplice e un doppio, che dipendono direttamente dai dati del problema e dal parametro di rappresentazione conforme dell'area, che si considera. L'integrale doppio contiene *linearmente* le costanti, provenienti dalla risoluzione del sistema ($\Omega$).

1. — Sia data nel piano $x', y'$ un'area semplicemente connessa $\sigma'$; designi $s'$ il contorno, $p'$ la normale diretta verso l'interno. Si tratta di assegnare una funzione $u$ finita e continua assieme alle sue derivate dei primi quattro ordini in ogni punto di $\sigma'$, la quale soddisfaccia entro $\sigma'$ alla equazione:

$$\Delta'_2\Delta'_2 u = 0 \tag{1}$$

$$\left(\Delta'_2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\right),$$

e sul contorno $s'$ alle:

(*) Il Prof. Volterra ha avuto la bontà di comunicarmi un metodo di risoluzione, di cui già da tempo egli era in possesso. La via delle approssimazioni successive, qui seguìta, è apparentemente diversa, ma in sostanza coincide con quella proposta dal Prof. Volterra.

$$u = \varphi, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial p'} = \psi, \tag{3}$$

in cui $\varphi$ e $\psi$ rappresentano due funzioni continue dei punti del contorno, comunque assegnate.

Consideriamo in un secondo piano $x, y$ (eventualmente sovrapposto al primo) il cerchio $\sigma$ di raggio 1 col centro nell'origine delle coordinate; poniamo poi $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $z' = f(z)$, intendendo che $f$ stabilisca la rappresentazione conforme del cerchio sopra l'area $\sigma'$.

Se si immagina di sostituire alle variabili $x', y'$ le nuove variabili $x, y$ mediante la trasformazione $z' = f(z)$, risulterà:

$$dx'^2 + dy' = H^2(dx^2 + dy^2),$$

con $H(x, y) = |f'(z)|$; quindi $dp' = H dp$ (essendo $dp'$ e $dp$ elementi lineari normali rispettivamente ad $s'$ e alla circonferenza); e, per la nota teoria dei parametri differenziali:

$$\Delta'_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = \frac{1}{H^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{H^2}\Delta_2 u.$$

Ciò posto, risguardando $u$ quale funzione dei punti $x, y$ del cerchio, avremo:

$$\Delta_2\left(\frac{1}{H^2}\Delta_2 u\right) = 0, \tag{1$^{bis}$}$$

entro il cerchio $\sigma$;

$$u = \varphi, \tag{2$^{bis}$}$$

$$\frac{\partial u}{\partial p} = H\psi, \tag{3$^{bis}$}$$

sopra la circonferenza, dove i valori di $\varphi$ e $\psi$ in un punto qualunque della circonferenza sono quelli fissati per il punto corrispondente di $s'$.

La ($1^{bis}$) ci dice che $\frac{1}{H^2}\Delta_2 u$ è una funzione armonica (re-

golare, per la natura stessa di $u$ e di H, nei punti interni a $\sigma$). Perciò, introducendo le coordinate polari $\rho$ e $\theta$, potremo porre:

$$(4)\quad w(\rho,\theta) = \frac{1}{H^2}\Delta_2 u = \alpha_0 + \sum_1^\infty {}_m \rho^m \{\alpha_m \cos m\theta + \beta_m \operatorname{sen} m\theta\},$$

le $\alpha$ e $\beta$ essendo per ora indeterminate. La ($1^{\text{bis}}$) diviene così:

$$(1^{\text{ter}})\qquad \Delta_2 u = H^2 w(\rho,\theta).$$

Se si ammette che $H^2 w(\rho,\theta)$ sia integrabile nel cerchio di raggio 1 (il dubbio può sorgere, perchè nulla si sa a priori circa il comportamento di $H^2$ e di $w(\rho,\theta)$ per $\rho = 1$), alla ($1^{\text{ter}}$) e alla ($2^{\text{bis}}$) si soddisfa, come ben si sa, definendo $u$ mediante l'equazione:

$$(5)\quad u(\rho_1,\theta_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} GH^2 w(\rho,\theta)\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_{\rho=1} \varphi d\theta,$$

in cui G rappresenta la funzione di Green, cioè:

$$G = \log\sqrt{1+\rho^2\rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos(\theta-\theta_1)} + \log\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos(\theta-\theta_1)}}.$$

Tutto si riduce oramai a determinare $w$ in modo che riesca sulla circonferenza $-\dfrac{\partial u}{\partial \rho_1} = H\psi$.

Per evitare ogni discussione, facciamo l'ipotesi che il contorno $s'$ dell'area, originariamente assegnata, abbia in ogni punto un raggio di curvatura finito e quindi che la funzione H si conservi finita e derivabile (la derivata soddisfacendo alle condizioni di Dirichlet) anche nei punti della circonferenza; supponiamo di più che la funzione $\varphi$ sia dotata di derivata prima e seconda, la $\psi$ almeno di derivata prima, soddisfacenti esse pure alle condizioni di Dirichlet lungo $s'$.

Risulta da ciò che $\varphi$ ed $H\psi$ possono essere rappresentate sopra la circonferenza mediante serie di Fourier:

$$(6)\quad \begin{cases} \varphi(\theta_1) = \frac{1}{2}p'_0 + \sum_1^\infty {}_n (p'_n \cos n\theta_1 + q'_n \operatorname{sen} n\theta_1) \\ H(1,\theta_1)\psi(\theta_1) = \frac{1}{2}p_0 + \sum_1^\infty {}_n (p''_n \cos n\theta_1 + q''_n \operatorname{sen} n\theta_1), \end{cases}$$

i cui coefficienti $p_n', q_n'; p_n'', q_n''$ riescono in valore assoluto rispettivamente minori di $\frac{M}{n^3}, \frac{M}{n^2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, M designando una opportuna costante.

In tale condizione avremo senz'altro:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_{\rho=1}\varphi d\theta = \frac{1}{2}p'_0 + \sum_1^\infty{}_n \rho_1^n \{p'_n \cos n\theta_1 + q'_n \operatorname{sen} n\theta_1\},$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial \rho_1}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_{\rho=1}\varphi d\theta\right]_{\rho_1=1} = -\sum_1^\infty{}_n n\{p'_n \cos n\theta_1 + q'_n \operatorname{sen} n\theta_1\},$$

e la (5), derivando, ci darà:

$$(5') \qquad \left(-\frac{\partial u}{\partial \rho_1}\right)_{\rho_1=1} = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\rho_1=1}\int_0^1 \rho d\rho\int_0^{2\pi}\frac{\partial G}{\partial \rho_1}H^2 w(\rho,\theta)d\theta -$$
$$-\sum_1^\infty{}_n n\{p'_n \cos n\theta_1 + q'_n \operatorname{sen} n\theta_1\}.$$

Ammettiamo, salvo a verificarlo a posteriori, che sia lecito sostituire nella (5′) a

$$\lim_{\rho_1=1}\int_0^1 \rho d\rho\int_0^{2\pi}\frac{\partial G}{\partial \rho_1}H^2 w(\rho,\theta)d\theta, \quad \int_0^1 \rho d\rho\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial G}{\partial \rho_1}\right)_{\rho_1=1}H^2 w(\rho,\theta)d\theta;$$

e a $-\left(\frac{\partial G}{\partial \rho_1}\right)_{\rho_1=1}$ il suo sviluppo $1 + 2\sum_1^\infty{}_n \rho^n \cos n(\theta - \theta_1)$, nonchè eseguire termine a termine l'integrazione rispetto a $\rho$.

Si ottiene in tal modo:

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial \rho_1}\right)_{\rho_1=1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \rho d\rho\int_0^{2\pi}H^2 w(\rho,\theta)d\theta +$$
$$+\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{\pi}\int_0^1 \rho^{n+1}d\rho\int_0^{2\pi}H^2 w(\rho,\theta)\cos n(\theta - \theta_1)d\theta -$$
$$-\sum_1^\infty{}_n n\{p'_n \cos n\theta_1 + q'_n \operatorname{sen} n\theta_1\}.$$

Di qua, ricordando che dev'essere:

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial \rho_1}\right)_{\varrho_1=1} = \mathrm{H}\psi = \frac{1}{2}p_0 + \sum_1^\infty{}_n \left(p''_n \cos n\,\theta_1 + q''_n \operatorname{sen} n\,\theta_1\right)$$

e ponendo per brevità:

$$(7) \qquad \begin{cases} p_n = p''_n + n\,p'_n \\ q_n = q''_n + nq'_n\,, \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

segue identicamente:

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \rho^{n+1} d\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{H}^2 w(\rho,\theta)\cos n\theta\, d\theta = p_n, \quad (n = 0,1,2,\ldots)\,; \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \rho^{n+1} d\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{H}^2 w(\rho,\theta)\operatorname{sen} n\theta\, d\theta = q_n, \quad (n = 1,2,\ldots). \end{cases}$$

È dunque necessario che la funzione armonica $w$ soddisfaccia a queste equazioni funzionali.

Per $\rho \leq 1 - \epsilon$ ($\epsilon$ positivo e piccolo a piacere), la serie (4) è uniformemente convergente; dunque:

$$(9) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{H}^2 w(\rho,\theta)\cos n\theta\, d\theta = \alpha_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{H}^2 \cos n\theta\, d\theta + \\ \qquad + \displaystyle\sum_1^\infty{}_m \left\{ \alpha_m \int_0^{2\pi} \mathrm{H}^2 \cos n\theta \cos m\theta\, d\theta + \beta_m \int_0^{2\pi} \mathrm{H}^2 \cos n\theta \operatorname{sen} m\theta\, d\theta \right\} \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{H}^2 w(\rho,\theta)\operatorname{sen} n\theta\, d\theta = \alpha_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{H}^2 \operatorname{sen} n\theta\, d\theta + \\ \qquad + \displaystyle\sum_1^\infty{}_m \left\{ \alpha_m \int_0^{2\pi} \mathrm{H}^2 \operatorname{sen} n\theta \cos m\theta\, d\theta + \beta_m \int_0^{2\pi} \mathrm{H}^2 \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta\, d\theta \right\}. \end{cases}$$

Ora

$$\cos m\theta \cos n\theta = \frac{1}{2}\left\{\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta\right\},$$

$$\cos n\theta \operatorname{sen} m\theta = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sen}(m+n)\theta + \operatorname{sen}(m-n)\theta\right\}, \text{ ecc.,}$$

e siccome, in virtù delle ipotesi fatte su H,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{H}^2 \cos(m \pm n)\theta\, d\theta, \quad \int_0^{2\pi} \mathrm{H}^2 \operatorname{sen}(m \pm n)\theta\, d\theta,$$

rimangono, anche per $\rho = 1$, inferiori in valore assoluto al quoziente di un numero finito per $(m-n)^2$ $(m \gtrless n)$, mentre (a patto di verificarlo a tempo debito) possiamo ritenere $\alpha_m$, $\beta_m$ inferiori ad un numero pure finito, così le serie dei secondi membri convergono uniformemente rispetto a $\rho$ in tutto l'intervallo $(0,1)$. Ne viene che le (9) sussistono anche per $\rho = 1$ e che si può valersene per trasformare le (8), integrando termine a termine.

Troviamo così:

$$\alpha_0 \frac{1}{\pi}\int_0^1 \rho^{n+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \, d\theta + \sum_1^\infty {}_m \Big\{ \alpha_m \frac{1}{\pi} \int_0^1 \rho^{n+m+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta + \beta_m \frac{1}{\pi} \int_0^1 \rho^{n+m+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta \Big\} = p_n,$$

$$\alpha_0 \frac{1}{\pi}\int_0^1 \rho^{n+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \, d\theta + \sum_1^\infty {}_m \Big\{ \alpha_m \frac{1}{\pi} \int_0^1 \rho^{n+m+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \cos m\theta \, d\theta + \beta_m \frac{1}{\pi} \int_0^1 \rho^{n+m+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta \Big\} = q_n,$$

o, più concisamente, ponendo:

$$(10) \left\{ \begin{aligned} &\frac{\int_0^1 \rho^{n+m+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta}{\int_0^1 \rho^{2n+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \cos^2 n\theta \, d\theta} = a_{2n,2m}, \quad (n,m = 0,1,2,\ldots),\\ &\frac{\int_0^1 \rho^{n+m+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta}{\int_0^1 \rho^{2n+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \cos^2 n\theta \, d\theta} = a_{2n,2m-1}, (n = 0,1,2,\ldots; m = 1,2,\ldots),\\ &\frac{\int_0^1 \rho^{n+m+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \cos m\theta \, d\theta}{\int_0^1 \rho^{2n+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen}^2 n\theta \, d\theta} = a_{2n-1,2m}, (n = 1,2,\ldots; m = 0,1,2,\ldots),\\ &\frac{\int_0^1 \rho^{n+m+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta}{\int_0^1 \rho^{2n+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen}^2 n\theta \, d\theta} = a_{2n-1,2m-1}, \quad (n,m = 1,2,\ldots); \end{aligned} \right.$$

$$(11) \left\{ \begin{aligned} &\frac{p_n}{\frac{1}{\pi}\int_0^1 \rho^{2n+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \cos^2 n\theta \, d\theta} = v_{2n}, \quad (n = 0,1,2,\ldots),\\ &\frac{q_n}{\frac{1}{\pi}\int_0^1 \rho^{2n+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen}^2 n\theta \, d\theta} = v_{2n-1}, \quad (n = 1,2,\ldots): \end{aligned} \right.$$

$$(12)\qquad \begin{cases} \alpha_m = x_{2m}, & (m = 0,1,2,\ldots), \\ \beta_m = x_{2m-1}, & (m = 1,2,\ldots). \end{cases}$$

$$(13)\qquad \sum_0^\infty {}_j\, a_{i,j} x_j = v_i, \quad (i = 0,1,2,\ldots).$$

Le $a$ e le $v$, come si rileva dalle (6), (7), (10), (11), sono costanti conosciute (e finite, perchè i divisori, che intervengono nelle (10), (11), sono essenzialmente diversi da zero).

Se si può risolvere il sistema lineare infinito (13) e i valori, che si trovano per le $x_i$, cioè, in causa delle (12), per le $\alpha$ e $\beta$, *ammettono un limite superiore finito e definiscono una* $w(\rho, \theta)$ *integrabile nel cerchio di raggio* 1 *e tale che:*

$$\lim_{\rho_1=1} \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial \rho_1} H^2 w(\rho,\theta) d\theta = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} H^2 w(\rho,\theta) d\theta +$$

$$+ 2 \sum_1^\infty {}_n \int_0^1 \rho^{n+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 w(\rho,\theta) \cos n(\theta - \theta_1) d\theta,$$

siam fatti certi, eseguendo a ritroso le operazioni indicate, che la funzione $u$, definita dalla (5), soddisfa alle ($1^{bis}$), ($2^{bis}$), ($3^{bis}$); basta allora esprimere $u$ a mezzo di $x'$, $y'$, per avere la funzione inizialmente richiesta.

L'unica difficoltà consiste pertanto nella determinazione delle costanti $x_j$ dal sistema (13), il quale, osservando che $a_{i,i} = 1$, può anche essere scritto:

$$(\Omega)\qquad x_i = v_i - \sum_0^{i-1} {}_j\, a_{i,j} x_j - \sum_{i+1}^\infty {}_j\, a_{i,j} x_j, \quad (i = 0,1,2,\ldots).$$

Ad esso si riattaccano le seguenti considerazioni generali.

2. — Definiamo delle approssimazioni successive delle incognite $x_i$, prendendo:

$$(14)\qquad x_i^{(0)} = v_i, \quad (i = 0,1,2,\ldots),$$

$$x_i^{(1)} = v_i - \sum_0^{i-1} {}_j\, a_{i,j} x_j^{(1)} - \sum_{i+1}^\infty {}_j\, a_{i,j} x_j^{(0)}, \quad (i = 0,1,2,\ldots).$$

e in generale:

$$(15) \quad x_i^{(n)} = v_i - \sum_0^{i-1}{}_j a_{i,j} x_j^{(n)} - \sum_{i+1}^{\infty}{}_j a_{i,j} x_j^{(n-1)}, \quad (i=0,1,2,...;\ n=1,2,...),$$

con che, ammessa la convergenza delle serie dei secondi membri, riescono individuate le approssimazioni di dato ordine $x_i^{(n)}$ per mezzo di quelle d'ordine anteriore, purchè si abbia cura di fare *successivamente* $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Se le $x_i^{(n)}$ tendono per $n = \infty$ a limiti finiti e determinati $x_i$, atti a rendere convergenti le serie $\sum_{i+1}^{\infty}{}_j a_{i,j} x_j$, le (15) mostrano senz'altro che detti limiti sono le soluzioni del sistema proposto.

Un caso, notevole per l'applicazione, che abbiamo in vista, è quello, in cui le $a$ e le $v$ soddisfanno a disuguaglianze del tipo:

$$(16) \qquad |a_{i,j}| < \mathrm{A}\lambda^{|i-j|}, \qquad (i,j=0,1,2,...;\ i \gtreqless j),$$

$$(17) \qquad |v_i| < \frac{\mathrm{B}}{(i+g)^s}, \qquad (i=0,1,2,...),$$

$$(18) \qquad 2\mathrm{A}\frac{\lambda}{1-\lambda} < 1,$$

con $\mathrm{A}, \mathrm{B}, g, s$ numeri positivi finiti e $\lambda < 1$.

Si osserverà che, aumentando convenientemente B, è sempre possibile immaginare $g$ abbastanza grande perchè sia soddisfatta, assieme alla (18), la:

$$(18') \qquad 2\mathrm{A}\frac{\lambda\left(1+\frac{1}{g}\right)^s}{1-\lambda\left(1+\frac{1}{g}\right)^s} < 1.$$

Dico che in questo caso il metodo delle approssimazioni successive riesce completamente.

Cominciamo coll'osservare che le (15), avuto riguardo alle (14), dànno:

$$x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)} = -\sum_0^{i-1}{}_j a_{i,j}(x_j^{(n)} - x_j^{(n-1)}) - \sum_{i+1}^{\infty}{}_j a_{i,j}(x_j^{(n-1)} - x_j^{(n-2)}),$$

ovvero anche, ponendo per brevità:

$$(19) \qquad y_i^{(0)} = v_i, \quad y_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}, \quad (i=0,1,2,\ldots;\ n=1,2,\ldots),$$

$$(15') \qquad y_i^{(n)} = -\sum_0^{i-1}{}_j\, a_{i,j} y_j^{(n)} - \sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} y_j^{(n-1)}, \quad (i=0,1,2,\ldots;\ n=1,2,\ldots).$$

A giustificazione del nostro asserto conviene provare:

*a*) che le serie $\sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} v_j$ convergono (e ciò risulta immediatamente dalle (16) e (17));

*b*) che le $y$, definite per ricorrenza dalle (15'), rendono convergenti le serie $\sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} y_j^{(n-1)}$;

*c*) che le $x_i^{(n-1)}$, cioè, per le (19), $y_i^{(0)} + y_i^{(1)} + \ldots + y_i^{(n-1)}$, rendono convergenti le serie $\sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} x_j^{(n-1)}$;

*d*) che le $x_i^{(n)}$ tendono, per $n = \infty$, a limiti finiti e determinati, ossia che sono convergenti le serie $\sum_0^{\infty}{}_n\, y_i^{(n)}$;

*e*) che le somme $x_i$ di tali serie rendono a lor volta convergenti le serie $\sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} x_j$.

Le proposizioni *b*), *c*), *d*), *e*) sono vere, come tosto si riconosce, quando si abbia per es.:

$$|\, y_i^{(n)} \,| < \frac{B}{(i+g)^s} \eta^n,$$

con

$$\eta = \left(\frac{g}{g+1}\right)^s < 1.$$

Potremo così limitarci a stabilire questa formula, che, a tenore delle (17) e (19), sta intanto per $n = 0$.

Si immagini di averla provata per $y_i^{(n-1)}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ e per $y_j^{(n)} (j < i)$; sarà necessario e sufficiente far vedere che essa sussiste anche per $y_i^{(n)}$.

Le (15′) porgono:

$$| y_i^{(n)} | < AB\eta^n \sum_0^{i-1} {}_j \frac{\lambda^{i-j}}{(j+g)^s} + AB\eta^{n-1} \sum_{i+1}^{\infty} {}_j \frac{\lambda^{j-i}}{(j+g)^s},$$

mentre si ha ovviamente:

$$\sum_{i+1}^{\infty} {}_j \frac{\lambda^{j-i}}{(j+g)^s} < \frac{1}{(i+g)^s} \frac{\lambda}{1-\lambda} < \frac{1}{(i+g)^s} \frac{\eta \frac{\lambda}{\eta}}{1-\frac{\lambda}{\eta}}$$

$$\sum_0^{i-1} {}_j \frac{\lambda^{i-j}}{(j+g)^s} = \frac{1}{(i+g)^s} \sum_0^{i-1} {}_j \frac{\lambda^{i-j}}{\frac{(j+g)^s}{(j+g+1)^s} \frac{(j+g+1)^s}{(j+g+2)^s} \cdots \frac{(i-1+g)^s}{(i+g)^s}},$$

donde anche, per essere $\eta = \left(\frac{g}{g+1}\right)^s$ e quindi più piccola di $\left(\frac{g+1}{g+2}\right)^s$, $\left(\frac{g+2}{g+3}\right)^s$, ecc.:

$$\sum_0^{i-1} {}_j \frac{\lambda^{i-j}}{(j+g)^s} < \frac{1}{(i+g)^s} \sum_0^{i-1} {}_j \left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^{i-j} < \frac{1}{(i+g)^s} \frac{\frac{\lambda}{\eta}}{1-\frac{\lambda}{\eta}}.$$

Dopo ciò la disuguaglianza precedente diviene:

$$| y_i^{(n)} | < \frac{B\eta^n}{(i+g)^s} \frac{2A\frac{\lambda}{\eta}}{1-\frac{\lambda}{\eta}} = \frac{B\eta^n}{(i+g)^s} 2A \frac{\lambda\left(1+\frac{1}{g}\right)^s}{1-\lambda\left(1+\frac{1}{g}\right)^s},$$

e, in virtù della (18′), assume l'aspetto voluto:

$$| y_i^{(n)} | < \frac{B\eta^n}{(i+g)^s}.$$

Di qua si deducono per le incognite $x_i = \sum_0^{\infty} {}_n y_i^{(n)}$ le condizioni:

$$| x_i | < \frac{B}{(i+g)^s} \sum_0^{\infty} {}_n \eta^n = \frac{B}{(i+g)^s} \frac{1}{1-\eta}, \tag{20}$$

che sono della medesima natura di quelle ammesse per i secondi membri $v_i$.

3. — Ritornando al particolare sistema $(\Omega)$, donde abbiam preso le mosse, vogliamo ora occuparci di caratterizzare una classe di aree $\sigma'$, per cui si trovano soddisfatte le condizioni (16) e (18).

Suppongasi in primo luogo che il contorno sia costituito da una sola linea analitica. Per un teorema di Schwarz (*), la funzione $z' = f(z)$ (di cui a § 1) è allora prolungabile analiticamente al di là di ogni punto della circonferenza di raggio 1; esistono quindi circonferenze di raggio $\frac{1}{\lambda^3} > 1$, entro e sopra le quali la funzione si mantiene regolare. Vedremo ben presto quale partito si può trarre da questa circostanza.

Poniamo intanto:

$$f'(z) = \sum_{0}^{\infty}{}_n\, c_n z^n,$$

ovvero, mettendo in evidenza la parte reale e la parte immaginaria:

$$f'(z) = \sum_{0}^{\infty}{}_n (\gamma_n + i\delta_n)\rho^n e^{in\theta}.$$

Se si cambia $i$ in $-i$ e si moltiplica membro a membro, risulta:

$$H^2(\rho,\theta) = |f'(z)|^2 = \sum_{0}^{\infty}{}_{n\nu} \{(\gamma_n\gamma_\nu + \delta_n\delta_\nu) - i(\gamma_n\delta_\nu - \delta_n\gamma_\nu)\}\rho^{n+\nu}e^{i(n-\nu)\theta},$$

che, ordinata per i seni e coseni d'archi multipli di $\theta$, ove si faccia per brevità:

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} h_\mu(\rho) &= \rho^\mu \sum_{0}^{\infty}{}_\nu (\gamma_{\mu+\nu}\gamma_\nu + \delta_{\mu+\nu}\delta_\nu)\rho^{2\nu} \\ k_\mu(\rho) &= \rho^\mu \sum_{0}^{\infty}{}_\nu (\gamma_{\mu+\nu}\delta_\nu - \delta_{\mu+\nu}\gamma_\nu)\rho^{2\nu}, \end{aligned}\right. \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

(*) Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, chap. X.

assume l'aspetto:

$$(22)\qquad H^2(\rho,\theta)=h_0(\rho)+2\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\{h_\mu(\rho)\cos\mu\theta+k_\mu(\rho)\operatorname{sen}\mu\theta\}.$$

Si designa ora con L il massimo dei valori assoluti, assunti da $f'(z)$ sopra la circonferenza di raggio $\frac{1}{\lambda^3}$; sarà, come è ben noto:

$$|c_n|\leq L\lambda^{3n},$$

quindi anche:

$$|\gamma_\nu-i\delta_\nu|\leq L\lambda^{3\nu},$$

$$|\gamma_{\mu+\nu}+i\delta_{\mu+\nu}|\leq L\lambda^{3\mu+3\nu},$$

$$|(\gamma_{\mu+\nu}\gamma_\nu+\delta_{\mu+\nu}\delta_\nu)+i(\gamma_{\mu+\nu}\delta_\nu-\delta_{\mu+\nu}\gamma_\nu)|\leq L^2\lambda^{3\mu+6\nu},$$

e per conseguenza:

$$|\gamma_{\mu+\nu}\gamma_\nu+\delta_{\mu+\nu}\delta_\nu|\leq L^2\lambda^{3\mu+6\nu},$$

$$|\gamma_{\mu+\nu}\delta_\nu-\delta_{\mu+\nu}\gamma_\nu|\leq L^2\lambda^{3\mu+6\nu}.$$

Dopo ciò, le (21) porgono:

$$|h_\mu(\rho)|\leq L^2\lambda^{3\mu}\rho^\mu\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\lambda^{6\nu}\rho^{2\nu}\leq\frac{L^2\lambda^{3\mu}\rho^\mu}{1-\lambda^6\rho^2},$$

$$|k_\mu(\rho)|\leq L^2\lambda^{3\mu}\rho^\mu\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\lambda^{6\nu}\rho^{2\nu}\leq\frac{L^2\lambda^{3\mu}\rho^\mu}{1-\lambda^6\rho^2},$$

o, intendendovi $\rho<1$, addirittura:

$$(23)\qquad \begin{cases}|h_\mu(\rho)|<\dfrac{L^2\lambda^{3\mu}\rho^\mu}{1-\lambda^6}\\[2ex] |k_\mu(\rho)|<\dfrac{L^2\lambda^{3\mu}\rho^\mu}{1-\lambda^6}.\end{cases}\qquad(\mu=0,1,2,\ldots).$$

Riprendiamo le posizioni (10) e trasformiamole a mezzo delle (22). Otterremo:

$$
(10')\left\{\begin{aligned}
a_{2n,2m} &= \frac{\pi\int_0^1 \rho^{n+m+1}\{h_{n+m}(\rho)+h_{|n-m|}(\rho)\}d\rho}{\int_0^1\rho^{2n+1}d\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{H}^2\cos^2 n\theta\,d\theta}, \quad (n,m=0,1,2,\ldots),\\
a_{2n,2m-1} &= \frac{\pi\int_0^1 \rho^{n+m+1}\{k_{n+m}(\rho)\pm k_{|n-m|}(\rho)\}d\rho}{\int_0^1\rho^{2n+1}d\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{H}^2\cos^2 n\theta\,d\theta}, \quad (n=0,1,2,\ldots;m=1,2,\ldots),\\
a_{2n-1,2m} &= \frac{\pi\int_0^1 \rho^{n+m+1}\{k_{n+m}(\rho)\mp h_{|n-m|}(\rho)\}d\rho}{\int_0^1\rho^{2n+1}d\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{H}^2\mathrm{sen}^2 n\theta\,d\theta}, \quad (n=1,2,\ldots;m=0,1,2,\ldots),\\
a_{2n-1,2m-1} &= \frac{\pi\int_0^1 \rho^{n+m+1}\{h_{|n-m|}(\rho)-h_{n+m}(\rho)\}d\rho}{\int_0^1\rho^{2n+1}d\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{H}^2\mathrm{sen}^2 n\theta\,d\theta}, \quad (n,m=1,2,\ldots),
\end{aligned}\right.
$$

dove van presi i segni superiori o gli inferiori secondochè $m \lesseqgtr n$.

Di qua si deducono agevolmente dei limiti superiori per le $a$.

Consideriamo, per fissar le idee, il primo gruppo delle (10′). Sia $l_1$ il limite inferiore dei valori assoluti, assunti da $f'(z)$ entro il cerchio di raggio 1 (limite inferiore, che è, per la univocità della corrispondenza fra $z'$ e $z$, essenzialmente diverso da zero). Si avrà:

$$\mathrm{H}^2(\rho,\theta) \geq l_1^2,$$

e:

$$\int_0^1\rho^{2n+1}d\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{H}^2\cos^2 n\theta d\theta > l_1^2\int_0^1\rho^{2n+1}d\rho\int_0^{2\pi}\cos^2 n\theta\,d\theta = \frac{\pi l_1^2}{2n+2};$$

d'altra parte, avendo riguardo alle (23), per $n > m$:

$$\pi\left|\int_0^1\rho^{n+m+1}\{h_{n+m}(\rho)+h_{|n-m|}(\rho)\}d\rho\right| <$$

$$< \frac{\pi\mathrm{L}^2}{1-\lambda^6}\lambda^{3(n-m)}\left\{\lambda^{6m}\int_0^1\rho^{2n+2m+1}d\rho+\int_0^1\rho^{2n+1}d\rho\right\} < \frac{\pi}{2n+2}\,\frac{2\mathrm{L}^2}{1-\lambda^6}\lambda^{3(n-m)},$$

e per $n < m$:

$$\pi\left|\int_0^1\rho^{n+m+1}\{h_{n+m}(\rho)+h_{|n-m|}(\rho)\}d\rho\right| <$$

$$< \frac{\pi\mathrm{L}^2}{1-\lambda^6}\lambda^{3(m-n)}\left\{\lambda^{6n}\int_0^1\rho^{2n+2m+1}d\rho+\int_0^1\rho^{2m+1}d\rho\right\} < \frac{\pi}{2m+2}\,\frac{2\mathrm{L}^2}{1-\lambda^6}\lambda^{3(m-n)},$$

quindi in entrambi i casi:

$$\pi\left|\int_0^1\rho^{n+m+1}\{h_{n+m}(\rho)+h_{|n-m|}(\rho)\}d\rho\right| < \frac{\pi}{2n+2}\,\frac{2\mathrm{L}^2}{1-\lambda^6}\lambda^{|3n-3m|}.$$

Se ne inferisce:

$$(24) \qquad |a_{2n,2m}| < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda^{|3n-3m|}, \qquad (n \gtrless m);$$

in modo analogo, badando che $k_0(\rho) = 0$, si trova:

$$(25) \qquad \left.\begin{array}{l} |a_{2n,2m-1}| \\ |a_{2n-1,2m}| \end{array}\right\} < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda^{|3n-3m|}, \text{ per } n \gtrless m,$$

e:

$$\left.\begin{array}{l} |a_{2n,2n-1}| \\ |a_{2n-1,2n}| \end{array}\right\} < \frac{L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda^{6n} < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda, \text{ per } m = n > 0,$$

$$a_{2,1} = a_{1,2} = 0 \qquad , \text{ per } m = n = 0;$$

cioè in ogni caso:

$$(26) \qquad \left.\begin{array}{l} |a_{2n,2n-1}| \\ |a_{2n-1,2n}| \end{array}\right. < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda, \text{ per } m = n;$$

infine:

$$(27) \qquad |a_{2n-1,2m-1}| < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda^{|3n-3m|}.$$

Dalle (24), (25), (26), (27) si raccoglie con tutta facilità (basta passare in rassegna i diversi casi possibili e notare che, per $m \lessgtr n$, $\lambda^{3n-3m}$ è certamente minore di $\lambda^{|2n-2m|}$ e di $\lambda^{|2n-2m\pm1|}$):

$$(28) \qquad |a_{i,j}| < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda^{|i-j|}, \qquad (i,j = 0,1,2,\ldots; i \gtrless j).$$

Questa disuguaglianza corrisponde alla (16) del caso generale; per stabilirla, ci è stata sufficiente l'ipotesi che il contorno dell'area $\sigma'$ consti di una sola curva analitica. Altra cosa è per la (18), che assume ora l'aspetto:

$$(29) \qquad 4 \frac{L^2}{l_1^2} \frac{\lambda}{(1-\lambda^6)(1-\lambda)} < 1$$

e dà luogo, come ben si vede, ad una condizione parecchio restrittiva circa la forma del contorno. Dacchè infatti il fattore $\frac{L^2}{l_1^3}$ è maggiore di $(1-\lambda^3)^2$ (*), bisogna per lo meno che sia $\lambda < \frac{1}{4}\frac{(1-\lambda^6)(1-\lambda)}{(1-\lambda^3)^2} > \frac{1}{4}\frac{1-\lambda^6}{1-\lambda^3} < \frac{1+\lambda^3}{4} < \frac{1+\lambda}{4}$, quindi $\lambda < \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{\lambda^3} > 27$, cioè la funzione $f(z)$ deve mantenersi regolare fin oltre la circonferenza di raggio 27.

Una disuguaglianza un po' meno restrittiva si ha quando l'area data possiede un asse di simmetria. In questo caso è sempre possibile (**) stabilire la rappresentazione conforme in modo che l'asse di simmetria della figura corrisponda all'asse delle $x$, o, se si vuole, in modo che la funzione $f(z)$ abbia i suoi coefficienti reali. Le (21) e (10′) portano allora a concludere che $a_{2n,2m-1}$, $a_{2n-1,2m}$ si annullano identicamente. Il sistema lineare da risolvere, rimettendo per $x_{2m}$, $x_{2m-1}$; $\alpha_m$, $\beta_m$, si scinde in:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{2n,2m}\alpha_m = v_{2n}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

e:

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{2n-1,2m-1}\beta_m = v_{2n-1}, \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

ai quali sistemi, ponendo:

$$\begin{aligned} a_{2n,2m} &= a'_{n,m}, && (n, m = 0, 1, 2, \ldots),\\ a_{2n-1,2m-1} &= a''_{n,m}, && (n, m = 1, 2, \ldots);\\ v_{2n} &= v'_n, && (n = 0, 1, 2, \ldots),\\ v_{2n-1} &= v''_n, && (n = 1, 2, \ldots.), \end{aligned}$$

---

(*) Questo si ricava facilmente, osservando che, se L è il massimo dei valori assoluti di $f'(z)$ per $|z| = \frac{1}{\lambda^3}$, il modulo di $f'(z)$, per $z$ compreso entro il cerchio di raggio 1, non può superare $\frac{L}{1-\lambda^3}$, quindi $l_1 < \frac{L}{1-\lambda^3}$ e per conseguenza $\frac{L^2}{l_1^2} > \frac{1}{(1-\lambda^3)^2}$.

(**) Cfr. SCHWARZ, *Ueber einige Abbildungsaufgaben*, " Crelle's Journal ", B. LXX, 1869.

può essere attribuita la forma:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_j a'_{i,j}\alpha_j = v'_i, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_{1}^{\infty}{}_j a''_{i,j}\beta_j = v''_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Consideriamone uno qualunque; il primo, per es., e notiamo che, dalle posizioni testè fatte e dalle (24), segue senz'altro:

$$|\, a'_{n,m} \,| = |\, a_{2n,2m} \,| < \frac{2L^2}{l^2_1(1-\lambda^6)} \lambda^{|3n-3m|}, \qquad (n \gtreqless m),$$

o, ciò che è lo stesso:

$$(28') \qquad |\, a'_{ij} \,| < \frac{2L^2}{l^2_1(1-\lambda^6)} \lambda^{3|i-j|}, \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots; i \gtreqless j),$$

la quale, confrontata colla (16), ci mostra che il $\lambda$ è qui sostituito da $\lambda^3$, per cui la condizione, che tien luogo della (18'), si cangia in:

$$(29') \qquad 4 \frac{L^2}{l^2_1} \frac{\lambda^3}{(1-\lambda^6)(1-\lambda^3)} < 1.$$

Partendo dal secondo sistema $\sum_{1}^{\infty}{}_j a''_{i,j}\beta_j = v''_i$, si perviene evidentemente alla medesima disuguaglianza.

Per essa, $\lambda^3 < \frac{1}{3}$ $\left(\text{non occorre, come prima, } \lambda < \frac{1}{3}\right)$, quindi non è più a priori indispensabile che $f(z)$ si mantenga regolare fin oltre la circonferenza di raggio 27, ma solo che questo abbia luogo fin oltre la circonferenza di raggio 3.

4. — In questo § si considereranno esclusivamente aree $\sigma'$, per cui sia possibile, prendendo $\lambda$ in modo opportuno, soddisfare alla disuguaglianza (29) (o rispettivamente alla (29') nel caso della simmetria).

Si tratta di fissare in modo definitivo, per codeste aree, la validità del nostro procedimento di integrazione.

Ferme stando per le funzioni $\varphi$ e $\psi$, date al contorno, le condizioni, di cui a § 1, si ha, come abbiam visto:

$$|p'_n| < \frac{M}{n^3}, \qquad |q'_n| < \frac{M}{n^3}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$
$$|p''_n| < \frac{M}{n^2}, \qquad |q''_n| < \frac{M}{n^2},$$

quindi:

$$|p_n| = |p''_n + np'_n| < \frac{2M}{n^2}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$
$$|q_n| = |q''_n + nq'_n| < \frac{2M}{n^2},$$

ed è ben chiaro che, designando con $g$ una costante positiva arbitraria, basta prendere M' maggiore di $p_0^2(g+2)^2$ e di $2M(g+4)^2$, per poter scrivere:

$$|p_n| < \frac{M'}{(2n+2+g)^2}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$|q_n| < \frac{M'}{(2n+2+g)^2}, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Le (11) dànno per i secondi membri $v_i$ del sistema ($\Omega$):

$$v_{2n} = \frac{p_n}{\frac{1}{\pi}\int_0^1 \rho^{2n+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \cos^2 n\theta \, d\theta}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$v_{2n-1} = \frac{q_n}{\frac{1}{\pi}\int_0^1 \rho^{2n+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen}^2 n\theta \, d\theta}, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

I denominatori, per quanto si è osservato nel precedente §, si mantengono superiori a $\frac{l_1^2}{2n+2}$; se ne trae $\left(\text{prendendo } B = \frac{M'}{l_1^2}\right)$:

$$|v_{2n}| < \frac{M'}{l_1^2} \frac{2n+2}{(2n+2+g)^2} < \frac{B}{2n+g}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$|v_{2n-1}| < \frac{M'}{l_1^2} \frac{2n+2}{(2n+2+g)^2} < \frac{B}{2n-1+g}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

le quali fanno riscontro alle (17) del caso generale, dove si sia posto $s = 1$. Possiamo quindi asserire (cfr. l'osservazione fatta

alla fine del § 2) che le incognite del sistema lineare, cioè i coefficienti $\alpha$ e $\beta$ della funzione $w$ soddisfanno a disuguaglianze dello stesso tipo.

Le assumeremo addirittura sotto la forma:

$$|\alpha_m| < \frac{N}{m}, \qquad |\beta_m| < \frac{N}{m}, \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

con N numero fisso positivo.

Delle condizioni, enumerate alla fine del § 1, ci rimangono così da verificare:

1° *la integrabilità di* $w(\rho, \theta)$ *entro il cerchio di raggio* 1;

2° *la eguaglianza fra:*

$$P = \lim_{\varrho_1 = 1} \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial \rho_1} H^2 w(\rho, \theta) d\theta$$

*e*

$$Q = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} H^2 w(\rho, \theta) d\theta + 2 \sum_1^\infty {}_n \int_0^1 \rho^{n+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 w(\rho, \theta) \cos n(\theta - \theta_1) d\theta.$$

Essendo, per definizione:

$$w(\rho, \theta) = \alpha_0 + \sum_1^\infty {}_m \{ \alpha_m \cos m\theta + \beta_m \operatorname{sen} m\theta \},$$

risulta:

$$|w(\rho, \theta)| < |\alpha_0| + 2N \sum_1^\infty {}_m \frac{\rho^m}{m} < |\alpha_0| - 2N \log(1 - \rho),$$

quindi:

$$\lim_{\varrho = 1} \left| \frac{w(\rho, \theta)}{\log(1 - \rho)} \right| \leq 2N,$$

la quale ci assicura che $w(\rho, \theta)$ è integrabile entro il cerchio di raggio 1 (circonferenza inclusa). Saranno per conseguenza integrabili $H^2 w(\rho, \theta)$, $GH^2 w(\rho, \theta)$, $\frac{\partial G}{\partial \rho_1} H^2 w(\rho, \theta)$ $(\rho_1 < 1)$, ecc., e, come tosto si riconosce, anche $\left(\frac{\partial G}{\partial \rho_1}\right)_{\varrho_1 = 1} H^2 w(\rho, \theta)$.

Ciò posto, è lecito chiaramente di attribuire a P la forma:

$$\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial G}{\partial \rho_1}\right)_{\rho_1=1} H^2 w(\rho,\theta)\, d\theta,$$

o, se si vuole:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_0^{1-\varepsilon} \rho d\rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial G}{\partial \rho_1}\right)_{\rho_1=1} H^2 w(\rho,\theta)\, d\theta.$$

D'altra parte, per $\epsilon$ positivo e arbitrariamente piccolo, si ha, tutto essendo regolare:

$$\int_0^{1-\varepsilon} \rho d\rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial G}{\partial \rho_1}\right)_{\rho_1=1} H^2 w(\rho,\theta) d\theta = \int_0^{1-\varepsilon} \rho d\rho \int_0^{2\pi} H^2 w(\rho,\theta) d\theta +$$

$$+ 2 \sum_1^\infty {}_n \int_0^{1-\varepsilon} \rho d\rho \int_0^{2\pi} H^2 w(\rho,\theta) \cos n(\theta - \theta_1) d\theta,$$

quindi basterà mostrare che il limite del secondo membro, per $\epsilon = 0$, è Q, o, ciò che è lo stesso, che la differenza converge a zero con $\epsilon$. Prescindendo dal primo termine, che ha manifestamente per limite 0, si tratta di constatare che:

$$\lim_{\varepsilon=0} \sum_1^\infty {}_n \int_{1-\varepsilon}^1 \rho^{n+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 w(\rho,\theta) \cos n(\theta - \theta_1) d\theta = 0.$$

A tale scopo si osservi che, per $\rho < 1$:

$$(30) \quad \int_0^{2\pi} H^2 w(\rho,\theta) \cos n(\theta - \theta_1)\, d\theta = \alpha_0 \int_0^{2\pi} H^2 \cos n(\theta - \theta_1)\, d\theta +$$

$$+ \sum_1^\infty {}_m \rho^m \left\{ \alpha_m \int_0^{2\pi} H^2 \cos n(\theta - \theta_1) \cos m\theta d\theta + \beta_m \int_0^{2\pi} H^2 \cos n(\theta - \theta_1) \operatorname{sen} m\theta d\theta \right\}$$

e, nella ipotesi, cui ci riferiamo, esistono (come tosto si ricava dal § antecedente) due numeri positivi $A_1$, e $\lambda_1 < 1$, tali che:

$$\left| \int_0^{2\pi} H^2 \cos n(\theta - \theta_1) \cos m\theta\, d\theta \right| < A_1 \lambda_1^{|n-m|},$$

$$\left| \int_0^{2\pi} H^2 \cos n(\theta - \theta_1) \operatorname{sen} m\theta\, d\theta \right| < A_1 \lambda_1^{|n-m|},$$

per qualunque valore di $\rho \leq 1$.

La serie del secondo membro ha dunque i suoi termini

ordinatamente inferiori a quelli della serie convergente a termini costanti:

$$A_1 N \left\{ \lambda_1^n + 2\sum_1^\infty {}_m \frac{\lambda^{|n-m|}}{m} \right\} =$$

$$= A_1 N \left\{ \lambda_1^n + 2\lambda_1^{n-1} + 2\sum_2^{n-1} {}_m \frac{\lambda_1^{n-m}}{m} + 2\sum_n^\infty {}_m \frac{\lambda_1^{m-n}}{m} \right\}$$

e perciò la (30) sussiste anche quando vi si fa $\rho = 1$.

Supponendo $n$ già abbastanza grande (maggiore di $n'$, diciamo) sarà $\lambda_1^{\frac{n}{2}} < \frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n} \log \frac{n}{2} < 1$; e, siccome:

$$\sum_2^{n-1} {}_m \frac{\lambda_1^{n-m}}{m} < \int_1^n \frac{\lambda_1^{n-m}}{m} dm,$$

mentre:

$$\int_1^n \frac{\lambda_1^{n-m}}{m} dm = \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{\lambda_1^{n-m}}{m} dm + \int_{\frac{n}{2}}^n \frac{\lambda_1^{n-m}}{m} dm <$$

$$> \frac{1}{n^2} \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dm}{m} + \frac{2}{n} \int_{\frac{n}{2}}^n \lambda_1^{n-m} dm > \frac{1}{n^2} \log \frac{n}{2} - \frac{2}{n} \frac{1}{\log \lambda_1} \left(1 - \lambda_1^{\frac{n}{2}}\right) < \frac{1 + \frac{2}{\log \frac{1}{\lambda_1}}}{n}$$

così riescirà, per $n > n'$:

$$2\sum_0^{n-1} {}_m \frac{\lambda_1^{n-m}}{m} < \frac{2 + \frac{4}{\log \frac{1}{\lambda_1}}}{n};$$

ancora:

$$2\sum_n^\infty {}_m \frac{\lambda_1^{m-n}}{m} < \frac{2}{n} \frac{1}{1-\lambda_1},$$

$$\lambda_1^n < \frac{1}{n},$$

$$2\lambda_1^{n-1} < \frac{2}{n}.$$

Ne viene:

$$A_1 N \left\{ \lambda_1^n + 2\sum_1^\infty {}_m \frac{\lambda_1^{|n-m|}}{m} \right\} < A_1 N \frac{5 + \frac{4}{\log \frac{1}{\lambda_1}} + \frac{2}{1-\lambda_1}}{n};$$

o finalmente, col porre:

$$A_1 N \left\{ 5 + \frac{4}{\log \frac{1}{\lambda_1}} + \frac{2}{1-\lambda_1} \right\} = K,$$

$$\left| \int_0^{2\pi} H^2 w(\rho,\theta) \cos n(\theta - \theta_1) d\theta \right| < A_1 N \left\{ \lambda_1^n + 2 \sum_1^{\infty}{}_m \frac{\lambda_1^{|n-m|}}{m} \right\} < \frac{K}{n} \cdot (n > n').$$

In tal condizione la serie:

$$\sum_1^{\infty}{}_n \int_{1-\varepsilon}^{1} \rho^{n+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 w(\rho,\theta) \cos n(\theta - \theta_1) d\theta$$

converge assolutamente, poichè, a partire dal valore $n'$ di $n$, i suoi termini sono ordinatamente minori di:

$$\frac{K}{n} \int_{1-\varepsilon}^{1} \rho^{n+1} d\rho = K \frac{1-(1-\epsilon)^{n+2}}{n(n+2)} < \frac{K}{n(n+2)};$$

per la medesima ragione, essa converge uniformemente rispetto ad $\epsilon$. Si conclude:

$$\lim_{\varepsilon=0} \sum_1^{\infty}{}_n \int_{1-\varepsilon}^{1} \rho^{n+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 w(\rho,\theta) \cos n(\theta - \theta_1) d\theta =$$

$$= \sum_1^{\infty}{}_n \lim_{\varepsilon=0} \int_{1-\varepsilon}^{1} \rho^{n+1} d\rho \int_0^{2\pi} H^2 w(\rho,\theta) \cos n(\theta - \theta_1) d\theta = 0,$$

come dovevasi dimostrare.

5. — Un esempio semplice di contorni, per cui la condizione (29) trovasi effettivamente soddisfatta, si ha immaginando che il parametro di rappresentazione conforme $f(z)$ sia un polinomio, la cui derivata si annulla in punti abbastanza discosti dall'origine. Ecco in qual modo lo si riconosce:

Posto:

$$f'(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

avremo, designando con $\zeta_i$ il modulo della radice $z_i$ (che è, per natura sua, $> 1$):

$$l_1^2 = |a_0|^2 \prod_1^n{}_i (\zeta_i - 1)^2,$$

mentre, sulla circonferenza di raggio $\frac{1}{\lambda^3}$, il massimo L dei valori assoluti spettanti a $f'(z)$ non potrà superare:

$$| a_0 | \prod_1^n{}_i \left( \zeta_i + \frac{1}{\lambda^3} \right).$$

Se si chiama $\zeta$ la più piccola delle $\zeta_i$ e si nota che, per $\zeta < \zeta_i$:

$$\frac{\zeta_i + \frac{1}{\lambda^3}}{\zeta_i - 1} < \frac{\zeta + \frac{1}{\lambda^3}}{\zeta - 1}.$$

la disuguaglianza, cui conviene soddisfare per qualche valore di $\lambda$, può a fortiori essere sostituita da:

$$4 \left\{ \frac{\zeta + \frac{1}{\lambda^3}}{\zeta - 1} \right\}^{2n} \frac{\lambda}{(1-\lambda^6)(1-\lambda)} < 1, \tag{31}$$

e $\lambda$ è ora in nostro arbitrio, poichè $f(z)$ si mantiene regolare in tutti i punti del piano, situati a distanza finita.

Ricordando la osservazione che $\lambda$ dev'essere certamente minore di $\frac{1}{3}$, si ha:

$$\frac{1}{(1-\lambda^6)(1-\lambda)} < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{729}\right)\frac{2}{3}} < 2,$$

e quindi la (31) sussisterà a più forte ragione, purchè sia:

$$8\lambda \left\{ \frac{\zeta + \frac{1}{\lambda^3}}{\zeta - 1} \right\}^{2n} < 1,$$

ovvero:

$$\frac{1}{\zeta} < \frac{\sqrt[2n]{\frac{1}{8\lambda}} - 1}{\frac{1}{\lambda^3} + \frac{1}{\sqrt[2n]{8\lambda}}} < \lambda^3 \left( \frac{1}{\sqrt[2n]{8\lambda}} - 1 \right) = \left\{ \frac{1}{\sqrt[2n]{8}} \lambda^{\frac{6n-1}{2n}} - \lambda^3 \right\}.$$

Ora il massimo valore del secondo membro corrisponde al valore (non nullo) di $\lambda$, che annulla $\frac{6n-1}{2n\sqrt[2n]{8}}\lambda^{\frac{4n-1}{2n}} - 3\lambda^2$, cioè:

$$\lambda = \left(\frac{6n-1}{6n\sqrt[2n]{8}}\right)^{2n} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{6n}\right)^{2n}.$$

A noi basta che la disuguaglianza sia verificata per un qualche valore di $\lambda$; giova dunque pigliare addirittura

$$\lambda = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{6n}\right)^{2n},$$

con che si ottiene:

$$\frac{1}{\zeta} < \frac{1}{512}\left(1 - \frac{1}{6n}\right)^{6n}\frac{1}{6n-1},$$

ossia:

$$\zeta > \frac{512(6n-1)}{\left(1-\frac{1}{6n}\right)^{6n}}.$$

Rimane così assicurata la validità del procedimento di integrazione per il corrispondente contorno, ogniqualvolta le radici di $f'(z)$ distano dall'origine più di $\frac{512(6n-1)}{\left(1-\frac{1}{6n}\right)^{6n}}$.

Analogamente si proverebbe che, quando i coefficienti del polinomio $f(z)$ sono reali, la (29') conduce a:

$$\zeta > \frac{8(2n-1)}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}}.$$

Un tipo affatto diverso di contorni, che rientrano nella nostra categoria, si ha, ponendo $f'(z) = e^{F(z)}$, con $F(z)$ trascendente intera d'ordine apparente (*) minore di $\frac{1}{6}$.

---

(*) Secondo la nomenclatura, introdotta dal sig. Borel nelle sue belle ricerche sulle funzioni intere (“ Acta Mathematica „, t. 20, 1897 e “ Comptes Rendus „, 24 gennaio 1898), si dice che una funzione intera $F(z)$ è d'*ordine apparente* $\rho$, quando il massimo $M(r)$ del modulo della funzione, per $|z| = r$, cresce, da un certo valore di $r$ in avanti, come $e^{r^\rho}$.

Si ha infatti in questo caso, designando con $\epsilon$ un numero positivo abbastanza piccolo, perchè $\frac{1-\epsilon}{6}$ sia ancora superiore al detto ordine apparente:

$$e^{L} < e^{\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{6}}},$$

ossia:

$$L^2\lambda < \lambda^{\varepsilon},$$

per valori di $\frac{1}{\lambda^3}$ sufficientemente grandi.

Siccome anche ora è lecito scegliere a piacere il valore di $\lambda$ da portare nella (29), così basterà immaginarlo già tale che $L^2\lambda < \lambda^{\varepsilon}$ perchè la (29) possa essere sostituita da:

$$\frac{4}{l^2_1} \frac{\lambda_\varepsilon}{(1-\lambda^6)(1-\lambda)} < 1,$$

e questa condizione riesce senz'altro soddisfatta, quando si abbia cura di prendere $\lambda$ abbastanza piccolo.

---

## *Sulla teoria della trasformazione delle equazioni a derivate parziali con due variabili indipendenti;*

Nota di ONORATO NICCOLETTI.

Le equazioni lineari omogenee del secondo ordine:

$$ar + 2bs + ct + 2dp + 2eq + fz = 0$$

ammettono una classe nettamente definita di trasformazioni, che io ho chiamato *integro-differenziali* e delle quali ho dato in più lavori le proprietà più notevoli ([1]).

---

([1]) Cf. Niccoletti, *Sulla trasformazione delle equazioni lineari omogenee del secondo ordine con due variabili indipendenti* (Pisa, " Annali della Regia Scuola normale superiore ", 1897; " Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino ", 23 maggio e 13 giugno 1897). Nel seguito, quando occorra, indicheremo questi lavori coi simboli T, $N_1$, $N_2$.

Rimanendo sempre nel campo delle funzioni di due variabili indipendenti, si presenta naturale il problema: “ Esistono anche per le equazioni di ordine superiore delle trasformazioni analoghe e quale ne è la loro natura? „.

Le considerazioni che seguono rispondono alla questione proposta.

1. — Sia:

$$\Lambda(z) = \Sigma a_{ik} z_{ik} = 0 \qquad \left(0 \leq i + k \leq n,\ z_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}\right) \tag{1}$$

un'equazione lineare omogenea dell' ordine $n$ in due variabili indipendenti: ne sia $z$ l'integral generale; e, se sarà possibile, sia:

$$\omega = \sum_0^m \alpha_{ik} z_{ik} + \sum_1^p {}_l \omega_l A_l \tag{2}$$

(dove:

$$A_l = \int P_l dx + Q_l dy \tag{3}$$

e $P_l$ e $Q_l$ sono funzioni lineari omogenee di $z$ e delle sue derivate, il cui ordine si può supporre non superi $n - 1$ [1]) una trasformata integro-differenziale della $z$, una trasformata $[m,p]$ [2], tale cioè che per ogni forma della $z$ integrale della (1) soddisfi anche essa ad un'equazione lineare omogenea dell'ordine $n$.

Poichè allora la $z$ e la $\omega$ soddisfano (rispett.) ad una equazione di ordine $n$, per ciascuna di esse funzioni soltanto $n$ tra le derivate di uno stesso ordine, a partire da $n - 1$, sono indipendenti: le altre si esprimono linearmente (ed omogeneamente) per esse e per quelle di ordine inferiore. Sostituendo inoltre nell'equazione in $\omega$ le espressioni della $\omega$ e delle sue derivate,

---

[1] Con ciò la forma degli integrali $A_i$ è determinata solo a meno di una parte additiva, lineare omogenea in $z$ e nelle sue derivate fino all'ordine $n - 2$: noi supporremo senz'altro fissata una qualunque di queste forme.

Di qui segue anche che, quando sia $p \neq 0$, si può sempre supporre che nella (2) il numero $m$ non sia mai inferiore ad $n - 2$. Ove infatti lo fosse, basterebbe cambiare in modo opportuno la forma degli integrali $A_i$ in guisa da avere una parte esplicita nella $z$ e nelle sue derivate fino all'ordine $n - 2$.

[2] Cf. $N_1$, pag. 6.

dedotte dalla (2), si avrà, tenendo conto della (1) e delle sue derivate, un'identità. Quindi, ove nella (2) si consideri la funzione $\omega$ come nota, la $z$ come incognita da determinare, se sarà possibile costruire un sistema di equazioni ai differenziali totali nella $z$, in alcune sue derivate e negli integrali $A_i$, il sistema stesso sarà integrabile, tenendo conto delle relazioni tra la $z$, la $\omega$ e le loro derivate [1].

2. — Deriviamo allora successivamente la (1) e (2) e distribuiamo le relazioni ottenute in tanti gruppi, ponendo in un primo gruppo quelle relazioni, se vi saranno, che contengono le derivate della $z$ fino ad un ordine non superiore ad $n-2$, e poi in ciascuno dei gruppi successivi tutte quelle relazioni che contengono le derivate della $z$ di un determinato ordine massimo. Finchè le derivate della $\omega$ che compariscono in queste relazioni non raggiungono l'ordine $n$, è facile vedere che tutte le relazioni ottenute, considerate come tante equazioni lineari nelle $z_{ik}$ e negli integrali $A_i$, sono algebricamente distinte. Questo è chiaro per le relazioni che si hanno derivando l' equazione data, e deve anche accadere per le altre dedotte dal derivare la $\omega$: altrimenti se ne dedurrebbe per la $\omega$ un'equazione almeno di ordine inferiore ad $n$, il che è assurdo, dovendo *in generale* la $\omega$ e la $z$ avere lo stesso grado di arbitrarietà. Quando poi l'ordine delle derivate della $\omega$ sia maggiore od uguale ad $n$, allora un ragionamento perfettamente analogo dimostra che delle relazioni ottenute dalle derivate della $\omega$ di uno stesso ordine soltanto $n$ sono indipendenti (ed effettivamente lo sono): le altre si riducono ad esse, tenendo conto dell'equazione in $\omega$ e di quelle che si hanno per derivazione.

Distinguiamo poi le trasformazioni in due classi, *generali* e *singolari*. Una trasformazione si dirà *generale*, quando per essa sia possibile dedurre dalle relazioni di uno stesso gruppo tutte le derivate della $z$ dell'ordine massimo che figura nel gruppo stesso, che è dunque risolubile rispetto a queste derivate. Questo allora dovrà accadere appena nei successivi gruppi che si considerano il numero delle relazioni del gruppo uguagli quello

[1] Cf. T, pag. 17; $N_1$, pag. 7, ed anche: Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen* (Erster Abs., Kap. X).

delle rispettive derivate della $z$ dell'ordine massimo: ove infatti così non fosse, si potrebbe da questo gruppo dedurre una relazione almeno, priva delle derivate della $z$ dell'ordine massimo considerato; e da questa, successivamente derivando, se ne avrebbero delle altre prive delle derivate degli ordini successivi, in guisa che non si perverrebbe *mai* ad un gruppo risolubile nelle sue derivate dell'ordine massimo.

Ogni trasformazione non generale si dirà *singolare* (¹).

3. — Cominciando dalle trasformazioni generali, deriviamo la $\omega$ fino all'ordine $n-1$, la $\Lambda(z)=0$ fino all'ordine $m-1$. Le derivate prime della $\omega$ conterranno le derivate della $z$ fino all'ordine $m+1$ (²), le seconde fino all' ordine $m+2$, ... le $(n-1)^{me}$ fino all'ordine $m+n-1$, precisamente come le derivate della $\Lambda(z)=0$ dell'ordine $m-1$. L'ultimo gruppo contiene quindi $m+n$ relazioni, le quali, poichè la trasformazione è generale, saranno risolubili rispetto alle derivate della $z$ dell'ordine $m+n-1$. Potremo allora costruire nella $z$, nelle sue derivate fino all' ordine $m+n-2$ e negli integrali $A_i$ (cioè in $p+\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}$ funzioni) un sistema di equazioni ai differenziali totali, per il quale le condizioni d'integrabilità saranno soddisfatte in forza delle $\frac{n(n-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}$ relazioni ottenute derivando la $\omega$ fino all'ordine $n-2$ e la $\Lambda(z)=0$ fino all'ordine $m-2$. L'integral generale del sistema conterrà quindi (linearmente):

$$l=p+\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}=p+mn$$

costanti arbitrarie, donde, con un ragionamento noto (³), deduciamo doversi la $\omega$ annullare per $l$ soluzioni $z', \dots z^l$, linearmente indipendenti, dell'equazione in $z$.

---

(¹) Cf. $N_1$, pag. 12.

(²) Si rammenti la convenzione fatta in fine della nota (¹) della pag. 4.

(³) Cf. T, pag. 25; $N_1$, pag. 8.

Ora la $\omega$ contiene in modo effettivo $p + \frac{n(n-1)}{2} + n(m-n+2)$ coefficienti (in quanto delle derivate della $z$ di un ordine superiore ad $n-2$ soltanto $n$ sono indipendenti) i quali saranno legati dalle equazioni lineari omogenee che si hanno sostituendo nella $\omega$ alla $z$ una qualunque delle soluzioni $z^i$ precedenti ed annullando i risultati. Supposto quindi, per maggiore generalità, che queste equazioni si riducano ad $l-k$ indipendenti (con $k \geq 0$), dovrà, se $\omega$ non è identicamente nulla, il numero delle equazioni distinte essere almeno di un'unità inferiore a quello dei suoi coefficienti: dovrà aversi cioè:

$$(4) \qquad p + \frac{n(n-1)}{2} + n(m-n+2) \geq p + mn - k + 1,$$

ossia, riducendo:

$$(4^*) \qquad \frac{(n-1)(n-2)}{2} \leq k \text{ [1]}.$$

Ora, *se l'equazione in z non soddisfa a particolari condizioni*, è cioè affatto generale, deve essere necessariamente $k = 0$: il supporre infatti $k > 0$ porta che siano nulli certi determinanti formati con alcune delle soluzioni $z^i$, delle loro derivate e cogli integrali $A_l(z^i)$, il che manifestamente non è possibile, quando tra i coefficienti della (1) non vi sia alcuna relazione. In questa ipotesi si ha dunque:

$$(n-1)(n-2) \leq 0:$$

dovrà quindi valere il segno di uguaglianza ed essere $n = 1$, oppure $n = 2$. Donde il teorema:

---

[1] Quando sia $p = 0$ ed $m < n-2$, la $\omega$ contiene $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ coefficienti; dovrà quindi aversi;

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} \geq mn - k + 1,$$

ossia

$$m(2n - m - 3) \leq 2k$$

ed a fortiori

$$mn \leq 2k,$$

e quindi per $k = 0$, $m = 0$; la $\omega$ e la $z$ sono cioè proporzionali.

*Un'equazione lineare omogenea in due variabili indipendenti, di ordine superiore al secondo, i cui coefficienti non soddisfino a particolari relazioni, non ammette trasformazioni* $[m, p]$ *generali.*

4. — Meno semplice è lo studio delle trasformazioni singolari. Una tale trasformazione è caratterizzata dal fatto che il gruppo che contiene le derivate della $\omega$ dell'ordine $n-1$, quelle della $\Lambda(z)=0$ dell'ordine $m-1$ (che chiameremo gruppo (A)) non è risolubile rispetto alle derivate della $z$ dell'ordine $m+n-1$. Dalle relazioni del gruppo potrà allora dedursene un certo numero $h \geq 1$, le quali, pure essendo algebricamente distinte da quelle dei gruppi precedenti (cf. n° 2), conterranno le derivate della $z$ degli ordini inferiori ad $m+n-1$ (ed in generale conterranno quelle dell'ordine $m+n-2$). Di più ognuna di queste $h$ relazioni conterrà qualche derivata della $\omega$ di ordine $n-1$, poichè le relazioni ottenute derivando la $\Lambda(z)=0$ fino ad un ordine qualunque sono tutte indipendenti anche rispetto alle derivate dell'ordine massimo che esse contengono. Ne segue che $h<n$; (quando sia $h=n$, è facile vedere che la $\omega$ contiene le derivate della $z$ dell'ordine $m$ solo *apparentemente*, il che escludiamo) e le $h^2$ condizioni necessarie e sufficienti, affinchè dalle relazioni del gruppo (A) possano dedursene $h$ prive delle derivate della $z$ dell'ordine $m+n-1$ (le quali condizioni sono espresse dall' annullarsi di certi $h^2$ determinanti formati coi coefficienti delle derivate della $z$ dell' ordine $m+n-1$ nelle relazioni del gruppo (A)), costituiscono $h^2$ equazioni omogenee dell'ordine $n-h+1$ nei coefficienti $\alpha_{ik}$ ed $\omega_i$ della $\omega$; e, se l'equazione data è affatto generale, debbono ritenersi come tante equazioni distinte in questi coefficienti [1].

Consideriamo allora il gruppo successivo, che diremo (B). Esso contiene, tenendo conto dell'equazione in $\omega$, $m+n+1$ relazioni distinte colle derivate della $z$ fino all'ordine $m+n$. Di queste relazioni $m+1$ si ottengono derivando $m$ volte la

[1] Cf. Cesaro, *Analisi algebrica*, cap. IX e X. — Si ricordi anche il teorema di Kronecker: *Condizione necessaria e sufficiente perchè una matrice di $r$ linee ed $s$ colonne sia di caratteristica $p$ è che sian nulli tutti i determinanti di ordine $p+1$ della matrice, ottenuti orlando un determinante non nullo di ordine $p$,* il che porta $(r-p)(s-p)$ condizioni.

$\Lambda(z) = 0$, sono quindi indipendenti rispetto alle derivate della $z$ dell'ordine $m + n$; le altre $n$ si hanno, tenendo conto dell'equazione in $\omega$, dalle derivate della $\omega$ dell'ordine $n$. *Da queste relazioni potranno dedursene $h$ e non più, prive delle derivate della $z$ dell'ordine $m + n$*; infatti almeno $h$ se ne otterranno, anche tenendo conto dell'equazione in $\omega$, derivando direttamente le $h$ relazioni del gruppo (A), prive di derivate della $z$ dell'ordine $m + n - 1$; ma non potranno neppure aversene più di $h$, poichè le altre $n - h$ relazioni del gruppo (A) date dalle derivate della $\omega$ dell'ordine $n - 1$, le quali contengono effettivamente le derivate della $z$ dell'ordine $m + n - 1$, ne danno per derivazione. anche tenendo conto dell'equazione in $\omega$, almeno altrettante con derivate della $z$ dell'ordine $m + n$ ed ancora indipendenti rispetto a queste derivate.

Si aggiungano allora queste $h$ relazioni del gruppo (B) alle $m + n - h$ del gruppo (A) che contengono le derivate della $z$ dell'ordine $m + n - 1$. Due ipotesi sono allora possibili: o queste $m + n$ relazioni (algebricamente distinte (cf. n° 2)) sono risolubili rispetto alle derivate della $z$ dell'ordine $m + n - 1$; oppure questo non è, e allora si dedurrà da esse un certo numero $h_1 \leq h$ di relazioni prive di derivate della $z$ dell'ordine $m + n - 1$, il che porterà nei coefficienti della $\omega$ $h_1^2$ condizioni. E queste condizioni, se l'equazione in $z$ è generale, saranno distinte tra loro e dalle precedenti, anche poichè contengono degli altri coefficienti di $\omega$.

Si consideri allora il gruppo successivo (C), dato dalle derivate della $\omega$ dell'ordine $n + 1$, da quelle della $\Lambda(z) = 0$ dell'ordine $m + 1$. Ripetendo il ragionamento superiore si vedrà che da esse possono dedursi $h_1$ relazioni con derivate della $z$ di ordine inferiore ad $m + n$. Si aggiungano queste $h_1$ relazioni alle $m + n - h$ del gruppo (A) ed alle $h - h_1$, del gruppo (B) che contengono le derivate della $z$ dell'ordine $m + n - 1$ e insieme colle $m + n - h$ del gruppo (A) sono indipendenti rispetto a queste derivate: e se dalle relazioni così ottenute non si potranno ancora avere le derivate della $z$ dell'ordine $m + n - 1$, si consideri il gruppo successivo ecc. *Se l'equazione in $z$ è affatto generale, non può questo processo continuare indefinitamente:* infatti ogni volta che si è condotti alla considerazione di un nuovo gruppo di relazioni, si ha anche almeno *una nuova* con-

dizione nei coefficienti della $\omega$: ed essendo questi in numero finito, dovrà pure, se $\omega$ non è identicamente nullo, il processo aver termine.

Perverremo dunque di certo ad ottenere le derivate della $z$ dell'ordine $m+n-1$ in funzione di quelle degli ordini inferiori, degli integrali $A_i$ e delle derivate della $\omega$: e varrà allora il ragionamento fatto per le trasformazioni generali, colla sola differenza che le relazioni che legano le derivate della $z$ di ordine inferiore ad $m+n-1$ sono ora in numero di $\frac{n(n-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}+h+h_1+\ldots$; ma si ha anche un certo numero $i \geq h+h_1+\ldots$ di equazioni di condizione (omogenee) tra i coefficienti della $\omega$. Varrà dunque sempre, e a più forte ragione, la (4) e la (4*): donde di nuovo, se l'equazione in $z$ è generale e quindi $k=0$, dovrà essere $n=1$, o $n=2$. E quindi:

*Un'equazione lineare omogenea in due variabili indipendenti di ordine superiore al secondo, i cui coefficienti non soddisfino a particolari relazioni, non ammette trasformazioni* $[m\,p]$ *singolari.*

Ricordando quindi il risultato del n° 3, possiamo enunciare il

Teorema. — *Se un'equazione lineare omogenea di ordine superiore al secondo in due variabili indipendenti non soddisfa a particolari relazioni, essa non ammette trasformazioni integro-differenziali.*

5. — Abbiamo supposto che l'equazione data fosse lineare omogenea: ma è facile vedere, modificando leggermente la dimostrazione, come il teorema valga anche per equazioni di forma qualunque. Si ha cioè:

*Se un'equazione alle derivate parziali in due variabili indipendenti di ordine superiore al secondo:*

$$f(xyzpqrst\ldots z_{ik}\ldots)=0 \tag{5}$$

*non soddisfa a particolari condizioni, non è possibile determinare per essa alcuna funzione:*

$$\omega=\omega(xyzpq\ldots z_{ik},\ldots A_1, A_2\ldots A_l) \tag{6}$$

(dove $A_i = \int P_i dx + Q_i dx$, essendo $P_i$ e $Q_i$ funzioni determinate di $z$ e delle sue derivate) *la quale per ogni valore di $z$ integrale della* (5) *soddisfi ad un'equazione analoga.*

Questo teorema si può del resto dedurre da quello del n° precedente mediante la considerazione *dell'equazione ausiliaria di Darboux* [1].

Si supponga infatti per un momento che l' equazione (5) ammetta la trasformazione (6): sia $z_1$ un integrale particolare della (5), $\omega_1$ la forma corrispondente di $\omega$. Si sostituisca a $z_1$ un integrale della (5) ad esso infinitamente vicino, $z_1 + \epsilon z'$ (dove $\epsilon$ è una costante infinitesima) e si sviluppino la (5), la (6) e l'equazione in $\omega$, dopo questa sostituzione, per le potenze di $\epsilon$. I coefficienti della prima potenza di $\epsilon$ danno allora quelle che il Darboux chiama *le equazioni ausiliarie* di quelle in $z$ ed in $\omega$, e (noi diremo anche) *la trasformazione ausiliaria* della (6): ed è chiaro senz'altro che le due equazioni ausiliarie della $z$ e della $\omega$ sono legate dalla trasformazione ausiliaria della (6). Ma e le equazioni e la trasformazione ausiliarie sono lineari omogenee: se l'equazione (6) non soddisfa a particolari relazioni, tanto meno può soddisfarsi la sua equazione ausiliaria; dovrà dunque di nuovo essere $n = 1$, oppure $n = 2$, il che dimostra il teorema.

La questione proposta in principio ha dunque una soluzione negativa, almeno finchè l'equazione data non soddisfa a condizioni particolari.

6. — Torniamo per semplicità alle equazioni lineari.

Il teorema del n° 4 non esclude che, quando i coefficienti della equazione in $z$ soddisfino a particolari relazioni, possano per l'equazione stessa esistere delle *particolari* trasformazioni e magari anche delle classi di tali trasformazioni. Anzi è facile vedere che tali trasformazioni esistono effettivamente, quando l'equazione in $z$ sia tale che manchino alcune delle condizioni necessarie alla dimostrazione dei n[i] 3 e 4, in particolare quando nella disuguaglianza fondamentale (4*) il numero $k$ sia diverso da zero e la disuguaglianza stessa sia possibile; quando cioè le $m\,n + p - h - h_1 \ldots$ equazioni che devono determinare i

[1] Cf. Darboux, *Théorie des surfaces.* Vol. IV, nota XI.

coefficienti della $\omega$, diano per questi coefficienti valori non tutti nulli. L'equazione data deve allora ammettere delle soluzioni particolari $z^1, z^2 \dots z^l$, le quali, pure essendo linearmente indipendenti, devono annullare identicamente la matrice formata colle soluzioni stesse, con quelle loro derivate e cogli integrali $A_i$, che figurano nell'espressione di $\omega$. L'equazione stessa dovrà quindi soddisfare a delle condizioni particolari (la cui forma è naturalmente invariantiva), relative all' integrabilità di determinati sistemi di equazioni a derivate parziali simultanee.

Sia allora dapprima la trasformazione, che consideriamo, generale. Si considerino tutte le relazioni che si hanno derivando la $\omega$ fino all'ordine $n$, la $\Lambda(z) = 0$ fino all'ordine $m$: e, moltiplicate ordinatamente le prime relazioni per $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ indeterminate $\lambda_{rs}$, le seconde per altre $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ $\mu_{tu}$, si sommino tutte. Avremo un'equazione della forma:

$$(7) \qquad \sum_0^n \lambda_{rs}\omega_{rs} + \sum_0^m \mu_{tu}\Lambda_{tu} = \sum_0^{m+n} \pi_{ik} z_{ik} + \sum_1^p {}_l\, \rho_l A_l;$$

dove per brevità si è posto:

$$\Lambda_{tu} = \frac{\partial^{t+u}\Lambda(z)}{\partial x^t \partial y^u},$$

e dove le $\frac{(m+n+1)(m+n+2)}{2} + p$ quantità $\pi_{ik}$, $\rho_l$ sono funzioni lineari omogenee perfettamente determinate delle $\lambda_{rs}$, $\mu_{tu}$. Esse sono legate inoltre dalle $mn+p$ equazioni, *in generale distinte:*

$$(8) \qquad \sum_0^{m+n} \pi_{ik} z_{ik}^{(\sigma)} + \sum_1^p {}_l\, \rho_l A_l^{\sigma} = 0; \qquad \sigma = 1, 2 \dots mn + p$$

si riducono quindi ad $\frac{(m+1)(m+2)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ indipendenti. È quindi possibile, ed in generale in un sol modo, determinare i rapporti delle $\lambda_{rs}$ e $\mu_{tu}$ in guisa da annullarle *tutte*: e questo appunto dimostra che la $\omega$ soddisfa, per ogni valore di $z$ integrale della (1), ad un'equazione lineare omogenea dell'ordine $n$.

Quando poi la trasformazione sia singolare, ci limitiamo per semplicità al primo caso, quando cioè basta arrestarsi nel

processo descritto al n° 4 al gruppo che contiene le derivate della $z$ fino all'ordine $m + n$: un ragionamento identico nel fondo, ma più complicato nella forma vale in qualunque altro caso. Conservando tutte le notazioni del n° 4, è facile vedere che dalle derivate della $\omega$ dell'ordine $n$, da quelle della $\Lambda(z) = 0$ dell'ordine $m$ possono dedursi $h + 1$ relazioni (non più $h$, poichè non sappiamo ora se $\omega$ soddisfa ad un'equazione di ordine $n$), che non contengono le derivate della $z$ dell'ordine $m + n$. Ne segue che le $\pi_{ik}$ della equazione (7), per le quali la somma degli indici è uguale ad $m + n$, sono legate da $h$ relazioni lineari omogenee indipendenti. D'altronde in questo caso le (8) sono in numero di $m\,n + p - h$: colle precedenti abbiamo dunque di nuovo $n\,m + p$ relazioni nelle $\pi_{ik}$, $\rho_l$. Ripetendo allora il ragionamento superiore, ne deduciamo che $\omega$ soddisfa anche in questo caso ad un'equazione dell'ordine $n$.

Si ottengono di qui come casi particolari tutte le trasformazioni, finora note, di equazioni lineari di ordine superiore.

Si sa, ad esempio, che, data un'equazione lineare omogenea a coefficienti *costanti* $\sum_0^n a_{ik}\, z_{ik} = 0$, una combinazione lineare qualunque, pure a coefficienti *costanti*, dell'integrale $z$ e delle sue derivate $\omega = \sum_0^n \alpha_{ik}\, z_{ik}$ soddisfa ancora all' equazione stessa e dà quindi una particolare trasformazione della equazione (in sè stessa): ora è chiaro immediatamente che la $\omega$ si annulla per le $m\,n$ soluzioni particolari dell'equazione in $z$, date dalla formula $z^i = e^{\xi_i x + \eta_i y}$, $(i = 1, 2 \ldots m\,n)$, dove $(\xi_i, \eta_i)$ sono le coordinate di uno qualunque degli $m\,n$ punti comuni alle due curve degli ordini $m$ ed $n$: $\sum_0^n a_{ik} \xi^i \eta^k = 0$, $\sum_0^m \alpha_{ik} \xi^i \eta^k = 0$, supposti per semplicità questi $m\,n$ punti tutti distinti (e la trasformazione sarà allora generale; sarà invece singolare, quando alcuni di questi punti vengano a coincidere).

Così anche, generalizzando un esempio del Goursat [1], si osservi che un'equazione lineare della forma:

$$\sum_0^n {}_r X_r \frac{\partial^r z}{\partial x^r} + \sum_0^{n-t} {}_{ik}\, a_{ik}\, z_{i,k+t} = 0$$

[1] Cf. Goursat, *Équations du second ordre.* Vol. 2°, pag. 244 nota.

(dove le X sono funzioni della sola $x$), ammette le trasformazioni $\omega_r = \frac{\partial^r z}{\partial y^r}$ $(r = 1, 2 \ldots t)$: ed una qualunque di esse, ad es.: la $\omega_r = \frac{\partial^r z}{\partial y^r}$ si annulla per le $n\,r$ soluzioni particolari dell'equazione superiore che si ottengono moltiplicando per $1$, $y, \ldots y^{r-1}$ gli $n$ integrali dell'equazione differenziale ordinaria lineare omogenea: $\sum_0^n X_r \frac{d^r z}{dx^r} = 0$; così anche infine, per citare un esempio di una trasformazione singolare, si osservi che una equazione del 3° ordine della forma:

$$a_1 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + a_2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + a_3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + b_0 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + b_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \\ + c_0 \frac{\partial z}{\partial x} + c_1 \frac{\partial z}{\partial y} + dz = 0$$

la quale abbia due soluzioni particolari $z_1$ e $z_2$, il cui rapporto sia una funzione della sola $x$, ammette la trasformazione $\omega = \alpha z + \beta q$, il cui secondo membro si annulla identicamente per le due soluzioni precedenti $z_1$ e $z_2$ ecc.

Queste considerazioni suggeriscono anzi il problema interessante, ma forse non molto facile, della determinazione, per ogni singolo valore di $n$, di quelle classi di equazioni che ammettono delle trasformazioni integro-differenziali, delle condizioni (invariantive) che caratterizzano queste classi, dello studio infine delle trasformazioni relative.

---

Si osservi anche il teorema, più generale di quello di Goursat:

“ Un'equazione dell'ordine $n$ in $k$ variabili indipendenti $x_1 \ldots x_k$, della “ forma:

$$\Lambda'(z) + \omega(p^r{}_1) = 0, \quad p^r{}_1 = \frac{\partial^r z}{\partial x^r{}_1}$$

“ dove $\Lambda'$ è un'espressione lineare omogenea di ordine $n$ nelle variabili “ $x_2 \ldots x_k$ con coefficienti funzioni di queste *sole* variabili, $\omega$ un'operazione “ *qualunque* di ordine $n - r$ nella derivata $p^r{}_1$, ammette le $r$ trasformazioni “ $\omega_i = \frac{\partial^i z}{\partial x^i{}_1}$ $(i = 1, 2 \ldots r)$ ”.

Questo teorema ci dà un esempio notevole di trasformazioni di equazioni con più di due variabili indipendenti.

7. Il teorema del n° 4 e le considerazioni del n° precedente dimostrano come le equazioni lineari omogenee del primo ordine in due variabili indipendenti:

$$ap + bq + cz = 0 \tag{9}$$

ammettano delle trasformazioni $[m, p]$, ciascuna delle quali è determinata dall'annullarsi identicamente per $m + p$ soluzioni particolari, linearmente indipendenti, della equazione stessa: non esistono infatti per le equazioni del 1° ordine (cfr. n° 4) delle trasformazioni singolari; e ad esse trasformazioni si estendono immediatamente i concetti ed i teoremi relativi alle trasformazioni delle equazioni del secondo ordine.

Queste trasformazioni sono però di gran lunga meno interessanti di quello che a prima vista possa sembrare: una qualunque di queste trasformazioni conserva infatti le linee caratteristiche della equazione (9) (o meglio, le loro proiezioni sul piano $xy$); cioè l'equazione trasformata ha la forma:

$$a\frac{\partial\omega}{\partial x} + b\frac{\partial\omega}{\partial y} + c'\omega = 0\,,$$

ed è quindi riducibile alla (9) con un cambiamento proporzionale di funzione incognita. Una trasformazione $[m, p]$ di un'equazione del 1° ordine riporta dunque in fondo sempre alla equazione di partenza, e può sempre pensarsi ottenuta dalla composizione (nel senso della teoria delle operazioni) di una trasformazione infinitesima dell'equazione stessa coll'inversa di una tale trasformazione [1].

---

[1] Cf. $N_2$, pag. 3-6.

# *Sulla propagazione del calore;*

Nota del Prof. GIUSEPPE LAURICELLA.

In una recente Nota lo STEKLOFF (*) dimostra che una funzione, la quale è finita e continua con le sue derivate dei primi tre ordini all'interno di un campo a tre dimensioni e nei punti del contorno di questo campo soddisfa all'equazione ai limiti del calore, è sviluppabile in serie delle soluzioni eccezionali della propagazione del calore.

Ora importa notare che ci si riduce sempre a questo caso speciale, qualunque sia la funzione arbitrariamente data, che rappresenta la temperatura iniziale del corpo. Infatti una funzione qualsiasi, la quale nei punti interni del corpo è finita e continua insieme alle derivate dei primi tre ordini e nei punti del contorno di questo corpo è finita e continua insieme alle derivate normali, si può sempre decomporre in due funzioni, di cui l'una equivale ad una temperatura stazionaria (che perciò non ha alcuna influenza sulla propagazione), l'altra non stazionaria soddisfa all'equazione ai limiti del calore. Siccome la dimostrazione che dà lo STEKLOFF dello sviluppo di questa seconda funzione in serie (finita od infinita) delle corrispondenti soluzioni eccezionali può dar luogo a qualche dubbio, così ho pensato di esporne qui un'altra, suggeritami dai calcoli stessi dello STEKLOFF, che oltre ad essere assai più semplice, spero, non mancherà di rigore.

Stabilito questo punto, rimane tuttavia di vedere se la serie delle soluzioni elementari delle equazioni della propagazione del calore, corrispondente alla serie di soluzioni eccezionali, serve a rappresentare la temperatura variabile del corpo, che inizialmente aveva per temperatura la parte non stazionaria della

(*) *Sur un problème de la théorie analytique de la chaleur*, "Comptes rendus „, 4 aprile 1898.

temperatura arbitrariamente data. In questa Nota appunto, dopo di avere stabilito i risultati sopra menzionati, dimostro che la serie delle soluzioni elementari soddisfa sempre alle equazioni della propagazione del calore. Di guisa che si può enunciare il seguente teorema generale: *La temperatura variabile di un corpo, che inizialmente si trovava ad una temperatura qualsiasi, si può sempre considerare come la sovrapposizione di una temperatura stazionaria e di un numero finito od infinito di temperature elementari.*

Veramente io qui mi sono limitato al caso di un corpo immerso in un ambiente di temperatura *zero* e che nel suo interno non ha alcuna sorgente di calore (equaz. (17)); ma è noto come si possa ridurre a questo il caso più generale nel quale il corpo è immerso in un ambiente di temperatura costante solo rispetto al tempo ed ha nel suo interno una sorgente di calore pure costante rispetto al solo tempo.

1. Sia $f(x, y, z)$ una funzione qualsiasi, la quale nei punti di uno spazio S è finita e continua insieme alle derivate dei primi tre ordini e nei punti del contorno $\sigma$ di questo spazio è finita e continua insieme alle sue derivate normali. Si ponga

$$\Delta^2 f = \varphi \, , \quad \frac{\partial f}{\partial n} - h \, . f = \psi$$

con $h$ quantità costante positiva proporzionale al potere emissivo, e si determinino due funzioni $f'$, $f''$ in modo che si abbia per la prima

$$\Delta^2 f' = 0 \qquad \text{(nei punti di S)},$$

$$\frac{\partial f'}{\partial n} = hf' + \psi \qquad (\quad \text{"} \quad \sigma),$$

per la seconda

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta^2 f'' = \varphi & \text{(nei punti di S)}, \\ \dfrac{\partial f''}{\partial n} = hf'' & (\quad \text{"} \quad \sigma). \end{cases}$$

È noto che questa determinazione può sempre farsi (*) e che la funzione $f'$ corrisponde ad una temperatura stazionaria; di modo che, se si osserva che $f$ equivale alla somma delle due funzioni $f'$, $f''$, risulta che *una temperatura qualsiasi può sempre decomporsi in una temperatura stazionaria ed in un'altra non stazionaria, che soddisfa all'equazione ai limiti del calore* (la seconda delle (1)).

2. Ciò premesso, ricordiamo che si può dimostrare che *per ogni funzione $f''(x, y, z)$ finita e integrabile insieme alle sue derivate prime in uno spazio finito* S, *esiste sempre una funzione $v$ dei punti di* S *e di $\sigma$ e della variabile complessa $k$, la quale, considerata in tutta l'estensione del piano $k$, gode delle seguenti proprietà:*

1° *Ha per singolarità una serie indefinita di poli semplici soltanto corrispondenti ad una serie di valori reali, positivi e crescenti* (valori eccezionali)

$$(2) \qquad k_1, k_2, k_3, \ldots$$

*della variabile $k$ avente per valore limite il valore $k = \infty$;*

2° *Ha per residui in questi poli una serie di funzioni regolari* (soluzioni eccezionali)

$$(3) \qquad p_1, p_2, p_3, \ldots$$

*integrali delle equazioni*

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta^2 p_r + k_r p_r = 0 & \text{(nei punti di S)}, \\ \dfrac{\partial p_r}{\partial n} = h p_r & (\quad \text{"} \quad \sigma); \end{cases}$$

3° *Per qualunque valore di $k$ che non fa parte di un certo gruppo infinito di valori reali e positivi, aventi il solo valore li-*

(*) Vedi Poincaré, *Sur les équations de la...* (" Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo ", anno 1894); e la mia Nota: *Sulle temperature stazionarie* (ibid., anno 1897).

*mite $k=\infty$ e che contiene il gruppo* (2) *o coincide con esso, è il solo integrale regolare delle equazioni*

$$(5)\quad \begin{cases} \Delta^2 v + kv = f'' & \text{(nei punti di S)}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} = hv & (\quad \text{"} \quad \sigma). \end{cases}$$

Basterà infatti servirsi del risultato della mia citata Nota e prendere per guida i calcoli che il Poincaré fa nella sua citata Memoria e quelli da me fatti in altre quistioni analoghe (*).

Può darsi per altro che la serie dei valori (2) si riduca ad un numero finito di valori

$$k_1,\ k_2,\ k_3, \ldots, k_i\,.$$

Questo accadrà quando la funzione $f''(x, y, z)$ è di tal natura che si abbia identicamente in tutto S

$$f'' - \sum_1^i {}_s p_s = 0\,;$$

ma allora sarà

$$(6)\qquad f''(x, y, z) = \sum_1^i {}_s p_s\,.$$

3. Supposto ora che la serie (2) sia indefinita, richiamiamo brevemente il processo che si può tenere per la determinazione del valore $k_{i+1}$, dopo che si sono determinati i primi $i$ valori

$$k_1,\ k_2, \ldots, k_i\,.$$

Bisogna, come è noto, integrare dapprima le equazioni

$$(7)\quad \begin{cases} \Delta^2 v_0 = f'' - \sum_1^i {}_s p_s \\ \Delta^2 v_1 + v_0 = 0 & \text{(nei punti di S)} \\ \Delta^2 v_2 + v_1 = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

(*) "Annali di Mat. pura ed applicata", anno 1897. "Nuovo Cimento", anno 1896.

$$(7') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_0}{\partial n} = hv_0 \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial n} = hv_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases} \qquad \text{(nei punti di } \sigma)$$

costruire poi le espressioni

$$W_{m,n} = \int_S v_m \, . \, v_n dS \, ,$$

per le quali si ha

$$W_{m,n} = W_{m-r,\, n+r} = W_{m+n} \, ,$$

$$\lim_{m=\infty} \frac{W_m}{W_{m-1}} = \frac{1}{k_{i+1}} \, ,$$

$$(8) \qquad \frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \ldots < \frac{1}{k_{i+1}} \, ,$$

e considerare poi la serie

$$v = v_0 + v_1 k + v_2 k^2 + \ldots ,$$

la quale converge certamente per $|k| < k_{i+1}$ e per questi stessi valori di $k$ soddisfa alle equazioni

$$(9) \quad \begin{cases} \Delta^2 v + kv = f'' - \sum_1^i {}_s p_s & \text{(nei punti di S)} \, , \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} = hv & (\quad \text{"} \quad \sigma) \, . \end{cases}$$

4. Ciò premesso, si ponga

$$\varphi' = f'' - \sum_1^i {}_s p_s \ , \quad \varphi'' = \varphi + \sum_1^i {}_s k_s p_s \, ,$$

$$\Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 , \quad \Delta(F, G) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z} \, ,$$

e si considerino le espressioni

$$V' = \int_S \Delta\varphi'' dS + h \int_\sigma \varphi''^2 d\sigma , \qquad W' = \int_S \varphi''^2 dS ,$$

$$V'' = -\int_S \Delta(\varphi', \varphi'') dS - h \int_\sigma \varphi' \varphi'' d\sigma , \quad W'' = -\int_S \varphi' \varphi'' dS ,$$

$$V''' = \int_S \Delta\varphi' dS + h \int_\sigma \varphi'^2 d\sigma , \qquad W''' = \int_S \varphi'^2 dS ,$$

$$V'''' = -\int_S \Delta(\varphi', v_0) dS - h \int_\sigma \varphi' v_0 d\sigma , \quad W'''' = -\int_S \varphi' v_0 dS .$$

Risulta anzitutto dalle (1), (4):

$$(7'') \quad \begin{cases} \Delta^2\varphi' = \varphi'' & \text{(nei punti di S)} , \\ \dfrac{\partial\varphi'}{\partial n} = h\varphi' & (\quad \text{"} \quad \sigma) ; \end{cases}$$

e quindi, se si ha riguardo alle (7), (7'), (7''),

$$(10) \begin{cases} W' = \int_S \varphi'' \Delta^2 \varphi' dS = -\int_S \Delta(\varphi', \varphi'') dS - h \int_\sigma \varphi' \varphi'' d\sigma = V'' , \\ W'' = -\int_S \varphi' \Delta^2 \varphi' dS = \int_S \Delta\varphi' dS + h \int_\sigma \varphi'^2 d\sigma = V''' , \\ W''' = \int_S \varphi' \Delta^2 v_0 dS = -\int_S \Delta(\varphi', v_0) dS - h \int_\sigma \varphi' v_0 d\sigma = V'''' , \\ W'''' = -\int_S v_0 \Delta^2 v_0 dS = \int_S \Delta v_0 dS + h \int_\sigma v_0^2 d\sigma , \\ W_0 = \int_S v_0^2 dS = -\int_S v_0 \Delta^2 v_1 dS = \int_S \Delta(v_0, v_1) dS + h \int_\sigma v_0 v_1 d\sigma , \\ W_1 = \int_S v_0 v_1 dS = -\int_S v_1 \Delta^2 v_1 dS = \int_S \Delta v_1 dS + h \int_\sigma v_1^2 d\sigma . \end{cases}$$

**5.** Indicate con $\alpha$ e $\beta$ due costanti qualsiasi, si ha

$$\int_S \left\{ \left( \alpha \frac{\partial\varphi''}{\partial x} - \beta \frac{\partial\varphi'}{\partial x} \right)^2 + \left( \alpha \frac{\partial\varphi''}{\partial y} - \beta \frac{\partial\varphi'}{\partial y} \right)^2 + \left( \alpha \frac{\partial\varphi''}{\partial z} - \beta \frac{\partial\varphi'}{\partial z} \right)^2 \right\} dS +$$

$$+ h \int_\sigma (\alpha\varphi'' - \beta\varphi')^2 d\sigma \geq 0 .$$

Nel caso del segno inferiore, poichè $\varphi'$ e $\varphi''$ sono continue insieme alle derivate prime, si dovrebbe avere

$$(11)\quad \frac{\partial\varphi''}{\partial x}=\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial\varphi'}{\partial x},\quad \frac{\partial\varphi''}{\partial y}=\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial\varphi'}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi''}{\partial z}=\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\quad \text{(nei punti di S)},$$

$$(12)\qquad \varphi''=\frac{\beta}{\alpha}\varphi' \qquad (\quad\text{"}\quad \sigma).$$

Ora le (11) ci dànno

$$d\varphi''=\frac{\beta}{\alpha}d\varphi'=d\left(\frac{\beta}{\alpha}\varphi'\right);$$

per cui, avuto riguardo alla (12), si ottiene

$$\varphi''=\frac{\beta}{\alpha}\varphi' \quad \text{(in tutto S e } \sigma).$$

Questa insieme alle (7″) ci dà

$$\Delta^2\varphi'=\frac{\beta}{\alpha}\varphi' \quad \text{(nei punti di S)},$$

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial n}=h\varphi' \qquad (\quad\text{"}\quad \sigma);$$

e quindi la $\varphi'$ sarebbe o identicamente nulla od uguale ad una soluzione eccezionale. In ogni caso però risulterebbe $f''$ uguale ad una serie finita ($i$ o $i+1$) di soluzioni eccezionali, contrariamente all'ipotesi (*). Dunque potremo scrivere senz'altro il segno superiore, e così, facendo uso delle (10), risulterà:

$$\alpha^2 V'+2\alpha\beta W'+\beta^2 W''>0,$$

donde

$$W'^2-V'W''<0,$$

ossia

$$\frac{V'}{W'}>\frac{W'}{W''}.$$

(*) Considerazioni simili a queste vanno fatte in quistioni analoghe trattate in altri miei lavori precedenti a questo.

Similmente si ha

$$\frac{W'}{W''} > \frac{W''}{W'''}, \quad \frac{W''}{W'''} > \frac{W'''}{W''''}, \quad \frac{W'''}{W''''} > \frac{W''''}{W_0}, \quad \frac{W''''}{W_0} > \frac{W_0}{W_1};$$

sicchè possiamo scrivere

$$\frac{V'}{W'} > \frac{W'}{W''} > \frac{W''}{W'''} > \frac{W'''}{W''''} > \frac{W''''}{W_0} > \frac{W_0}{W_1};$$

e poichè si ha dalla (8)

$$\frac{W_0}{W_1} > k_{i+1},$$

risulterà finalmente

$$\frac{V'}{W'} > k_{i+1},$$

ossia

$$W' < \frac{V}{k_{i+1}}, \tag{13}$$

comunque sia grande il valore dell'indice $i$.

6. Integrando per parti e facendo uso delle equazioni (4). si ha

$$(14)\begin{cases} V' = \int_S \Delta\varphi'' dS + h\int_\sigma \varphi''^2 d\sigma = \int_S \Delta\varphi\, dS + h\int_\sigma \varphi^2 d\sigma + \\ + \sum_1^i {}_s \Big\{ k_s^2 \int_S \Delta p_s dS + hk_s^2 \int_\sigma p_s^2 d\sigma + 2k_s \int_S \Delta(\varphi, p_s)\, dS + 2hk_s \int_\sigma \varphi p_s d\sigma \Big\} + \\ + 2\sum_{r,t} k_r k_t \Big\{ \int_S \Delta(p_r, p_t) dS + h\int_\sigma p_r p_t d\sigma \Big\} = \\ = \int_S \Delta\varphi dS + h\int_\sigma \varphi^2 d\sigma + \sum_1^i {}_s \Big\{ k_s^3 \int_S p_s^2 dS + 2k_s^2 \int_S \varphi p_s dS \Big\} + 2\sum_{r,t} k_r k_t^2 \int_S p_r p_t dS. \end{cases}$$

$$(r \neq t\ ; \quad r, t = 1, 2, \ldots i).$$

Ora la funzione $v$ del § 2 soddisfa alle equazioni (9) per $|k| < k_{i+1}$; di modo che l'altra funzione

$$w = -\varphi' + kv$$

soddisferà, per questi stessi valori di $k$ ed in particolare per $k = k_r$ $(r \leq i)$, alle equazioni:

$$\Delta^2 w + kw = -\varphi'' \quad \text{(nei punti di S)},$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = hw \qquad ( \quad \text{"} \quad \sigma).$$

Allora possiamo scrivere, per $k = k_r$,

$$\int_S (p_r \Delta^2 w - w\Delta^2 p_r) dS = \int_\sigma \left( w \frac{\partial p_r}{\partial n} - p_r \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\sigma = 0,$$

ossia

$$0 = \int_S p_r \varphi'' dS = \int_S p_r \varphi\, dS + \int_S p_r \sum_1^i {}_s k_s p_s dS;$$

e poichè si ha, com'è noto,

$$\int_S p_r p_s dS = 0, \quad (r \neq s)$$

risulterà

$$\int_S p_r \varphi\, dS = -k_r \int_S p_r^2 dS.$$

La (14) quindi si può scrivere:

$$V' = \int_S \Delta\varphi\, dS + h \int_\sigma \varphi^2 d\sigma - \sum_1^i {}_s k_s^3 \int_S p_s^2 dS;$$

e così ci addimostra che l'espressione sempre positiva $V'$ decresce col crescere dell'indice $i$, mantenendosi inferiore alla quantità costante

$$\int_S \Delta\varphi\, dS + h \int_\sigma \varphi^2 d\sigma.$$

Ora al crescere di $i$ il parametro $k_{i+1}$ si può rendere superiore a qualsiasi grandezza assegnabile; quindi sarà per la (13):

$$(15) \qquad \lim_{i=\infty} W' = 0.$$

7. Sia $g$ l'integrale regolare delle equazioni

$$\Delta^2 g = 0 \qquad \text{(nei punti di S)},$$

$$\frac{\partial g}{\partial n} - hg = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r} \qquad ( \;\; \text{»} \;\; \text{»} \;\; \sigma),$$

nelle quali $r$ indica la distanza di un punto di S ad un altro punto qualsiasi. Poichè l'integrale $\varphi'$ delle equazioni (7'') si può esprimerlo mediante la formola

$$\varphi' = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\varphi''}{r} dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \varphi' \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) d\sigma,$$

si avrà ovviamente

$$\varphi' = -\frac{1}{4\pi}\int_S \left(\frac{1}{r} - g\right) \varphi'' dS.$$

Ora la funzione

$$G = \frac{1}{4\pi}\left(g - \frac{1}{r}\right)$$

ha nel campo S per singolarità un solo polo del primo ordine: sicchè l'espressione

$$\int_S G^2 dS$$

oltre ad avere un significato si mantiene sempre inferiore ad una certa quantità finita R. Risulterà allora per qualunque valore comunque grande dell'indice $i$:

$$\varphi'^2 < RW';$$

e quindi si avrà dalla (15) uniformemente per tutti i punti di S (quelli di $\sigma$ compresi):

$$\lim_{i=\infty} \varphi' = 0,$$

ossia

$$(16) \qquad f'' = \sum_1^\infty {}_s p_s,$$

con $\sum_1^\infty {}_s p_s$ serie convergente in ugual grado in tutto S (i punti di $\sigma$ compresi).

8. Corrispondentemente alla serie di funzioni (3) abbiamo la serie di soluzioni elementari

$$p_1 e^{-kk_1 t}, \quad p_2 e^{-kk_2 t}, \ldots$$

delle equazioni della propagazione del calore:

$$(17) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\Delta^2 u & \text{(nei punti di S)}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = hu & (\quad \text{''} \quad \sigma), \end{cases}$$

nelle quali $k$ è una costante positiva proporzionale al coefficiente di conducibilità della materia di cui il corpo S è costituito, $t$ il tempo variabile.

Nel caso in cui la serie (3) è finita, la funzione

$$u = \sum_1^i {}_s p_s e^{-kk_s t}$$

risolve completamente il problema della propagazione del calore nel corpo S, che inizialmente si trovava alla temperatura $f''(x,y,z)$. Infatti la $u$ soddisfa evidentemente alle equazioni (17) ed inoltre si ha

$$(u)_{t=0} = \sum_1^i {}_s p_s = f''(x, y, z).$$

9. Nel caso in cui la serie (3) è indefinita, è la serie

$$(18) \qquad u = \sum_1^\infty {}_s p_s e^{-kk_s t}$$

che risolve completamente il problema della propagazione del calore nel corpo S, il quale inizialmente si trovava alla temperatura $f''(x,y,z)$.

Infatti la (16) ci dà anzitutto:

$$(u)_{t=0} = \sum_1^\infty {}_s p_s = f''(x, y, z).$$

Se si osserva poi che le espressioni

$$e^{-kk_1t}, \quad e^{-kk_2t}, \ldots$$

sono quantità sempre positive e non superiori all'unità, e che le altre

$$k_1 e^{-kk_1t}, \quad k_2 e^{-kk_2t}, \ldots$$

per $t \neq 0$ sono anch'esse positive e da un certo punto in poi decrescono indefinitamente, risulterà che la serie (18) e l'altra

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k\sum_1^\infty {}_s k_s e^{-kk_st} p_s$$

convergono (*) in ugual grado in tutto S e $\sigma$ come la (16).

10. La formola di Green applicata alle equazioni (4) ci dà:

$$p_s = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{k_s p_s}{r} dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left( p_s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial p_s}{\partial n}\right) d\sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{k_s p_s}{r} dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma p_s \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) d\sigma .$$

Di qui, derivando sotto integrale, risulta per i punti interni ad S:

$$(19) \qquad \frac{\partial p_s}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\int_S k_s p_s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma p_s \frac{\partial}{\partial x}\left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) d\sigma ;$$

e poichè, come risulta dal paragrafo precedente, le serie

$$\sum_1^\infty {}_s k_s p_s e^{-kk_st} , \quad \sum_1^\infty {}_s p_s e^{-kk_st}$$

sono convergenti in ugual grado in tutto S e $\sigma$, avremo, integrando per serie:

(*) Vedi ad es. Dini, *Fondamenti per la teorica...*, pag. 101.

$$\frac{1}{4\pi}\int_S\left(\sum_1^\infty {}_s k_s p_s e^{-kk_st}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}dS+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\sum_1^\infty {}_s p_s e^{-kk_st}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{h}{r}\right)d\sigma=$$

$$=\sum_1^\infty {}_s e^{-kk_st}\left\{\frac{1}{4\pi}\int_S k_s p_s\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}dS+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma p_s\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{h}{r}\right)d\sigma\right\}=$$

$$=\sum_1^\infty {}_s\frac{\partial p_s}{\partial x}e^{-kk_st}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

con $\sum_1^\infty {}_s\frac{\partial p_s}{\partial x}e^{-kk_st}$ serie convergente in egual grado in tutti i punti interni ad S.

**11.** Se si osserva poi che le espressioni

$$k_1^2e^{-kk_1t},\quad k_2^2e^{-kk_2t},\ldots$$

per $t \neq 0$ sono sempre positive e a partire da un certo punto in poi decrescono, risulta che la serie $\sum_1^\infty {}_s k_s^2 p_s e^{-kk_st}$ è convergente in ugual grado in tutto S; e quindi si avrà, integrando per serie:

$$\frac{1}{4\pi}\int_S\left(\sum_1^\infty {}_s k_s^2 p_s e^{-kk_st}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}dS+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\sum_1^\infty {}_s k_s p_s e^{-kk_st}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{h}{r}\right)d\sigma=$$

$$=\sum_1^\infty {}_s k_s e^{-kk_st}\left\{\frac{1}{4\pi}\int_S k_s p_s\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}dS+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma p_s\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{h}{r}\right)d\sigma\right\}=$$

$$=\sum_1^\infty {}_s k_s\frac{\partial p_s}{\partial x}e^{-kk_st},$$

dove l'ultima serie sarà convergente in ugual grado in tutti i punti interni ad S.

Ora dalla (19) si ha, integrando per parti ed indicando con $(x', y', z')$ un punto generico di S:

$$\frac{\partial p_s}{\partial x}=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{k_s}{r}\frac{\partial p_s}{\partial x'}dS+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma p_s\left\{\frac{k_s}{r}\cos(nx)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{h}{r}\right)\right\}d\sigma.$$

e da questa, derivando sotto integrale,

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi}\int_S k_s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial p_s}{\partial x} dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma p_s \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_\sigma k_s p_s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(nx) d\sigma ;$$

di guisa che avremo, integrando per serie,

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \left(\sum_1^\infty{}_s k_s \frac{\partial p_s}{\partial x} e^{-hk_st}\right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\sum_1^\infty{}_s p_s e^{-hk_st}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\sum_1^\infty{}_s e^{-hk_st} k_s p_s\right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(nx) d\sigma =$$

$$= \sum_1^\infty{}_s e^{-hk_st} \left\{ \frac{1}{4\pi}\int_S k_s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial p_s}{\partial x} dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma p_s \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{h}{r}\right) d\sigma +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma k_s p_s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(nx) d\sigma \right\} =$$

$$= \sum_1^\infty{}_s \frac{\partial^2 p_s}{\partial x^2} e^{-hk_st} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ,$$

e l'ultima serie convergerà in ugual grado in tutti i punti dell'interno di S.

Nello stesso modo si dimostrano le formole

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_1^\infty{}_s \frac{\partial^2 p_s}{\partial y^2} e^{-hk_st} , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sum_1^\infty{}_s \frac{\partial^2 p_s}{\partial z^2} e^{-hk_st} ,$$

e la convergenza delle serie ai secondi membri.

Segue dunque che la funzione $u(x, y, z, t)$ determinata dalla (18) è regolare in tutto S insieme alle derivate prime e doppie per $t \neq 0$ e soddisfa alla prima delle equazioni (17).

**12.** Finalmente, poichè la serie (18) è convergente in ugual grado in tutto S e $\sigma$, e per $t \neq 0$ le altre (v. § 10)

$$\sum_1^\infty{}_s \frac{\partial p_s}{\partial x} e^{-hk_st} , \quad \sum_1^\infty{}_s \frac{\partial p_s}{\partial y} e^{-hk_st} , \quad \sum_1^\infty{}_s \frac{\partial p_s}{\partial z} e^{-hk_st}.$$

sono convergenti in ugual grado nei punti dell'interno di S, risulta, come nella mia cit. Nota " *Sulle temperature stazionarie* ", che anche la serie

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_1^\infty {}_s \frac{\partial p_s}{\partial n} e^{-hk_s t}$$

è convergente in ugual grado in tutto $\sigma$ per $t \neq 0$; di guisa che la $u(x, y, z, t)$ soddisfa ancora alla seconda delle equazioni (17), come si voleva dimostrare.

I risultati di questi ultimi quattro paragrafi, uniti a quello del § 1, ci portano senz'altro al teorema generale enunciato nell'introduzione.

Catania, Maggio 1898.

---

## *Sulle funzioni olomorfe e meromorfe nel campo razionale e nel campo ellittico;*

Nota del Dott. TITO CAZZANIGA.

In un recente lavoro [1] M. Borel tratta con molta acutezza di una serie di teoremi, i quali integrando precedenti ricerche di M. Hadamard [2], conducono a dimostrare e generalizzare per via diretta, il famoso teorema del Picard, sui valori d'*eccezione* delle funzioni intere [3].

Il midollo della ricerca consiste nello stabilire una condizione d'esistenza per una certa identità fondamentale, tra funzioni olomorfe. Da questa deriva quale immediata conseguenza il teorema del Picard, sotto una forma che forse non ammette altra più generale. L'A. però non ha dimostrato il teorema parallelo, dovuto pure al Picard, sui valori d'eccezione delle fun-

---

(1) " Act. Math. ", vol. 20, *Sur les zéros, etc.*; " Compt. R. ", genn. 1898.
(2) " Journal de Math. ", 1893, *Sur les fonctions entières.*
(3) " Ann. École Norm. ", 1880.

zioni meromorfe. Tuttavia ancor esso si deduce agevolmente dalla proposizione fondamentale, benchè, a mio avviso, non sia possibile conferirgli tutta quella estensione, che il Borel attribuiva al primo teorema.

Ora, occupandomi di questi giorni di una ricerca sulle funzioni dopp. periodiche, mi trovai ricondotto a proposizioni inerenti le funzioni intere, le quali si presentano conseguenza facile e complemento di quelle sopra accennate. Tra queste appunto vi ha l'estensione del secondo teorema del Picard. Tali considerazioni espongo qui in breve, ad onta della semplicità loro, per la notevole applicazione ch'io ne faccio in questa memoria, alla determinazione di un limite superiore per il numero di valori d'eccezione che può presentare una *funzione olomorfa e meromorfa nel campo ellittico* [1].

## I.

**1.** — Il teorema fondamentale di M. Borel è il seguente: Pongasi $|x| = r$, e si indichi con $\mu(r)$ una funzione crescente scelta in modo opportuno. Siano poi:

$$G_1(x),\quad G_2(x),\ \ldots\ldots\ G_n(x),$$
$$H_1(x),\quad H_2(x),\ \ldots\ldots\ H_n(x),$$

due successioni di funzioni intere, tali che il modulo massimo delle $G_i(x)$, per $|x| = r$, cresca meno rapido di $e^{\mu(r)}$, ed il modulo massimo di $H_i(x) - H_j(x)$, per $|x| = r$, cresca più rapido che $[\mu(r)]^{1+\alpha}$, per $\alpha$ piccolo a piacere ma positivo [2].

*Allora l'identità:*

$$\sum_{r=1}^{n} G_r(x)\, e^{H_r(x)} = 0, \tag{1}$$

*porta seco l'annullarsi di tutte le* $G_r(x)$.

---

[1] Per la nomenclatura ivi usata vedi la memoria citata di M. Borel.

[2] Basta che tale condizione sia soddisfatta sopra infiniti cerchi, col centro nell'origine e di raggi indefinitamente crescenti, per modo che i cerchi sui quali la condizione non è verificata riempiano *al più* una regione finita del piano.

Un importante caso particolare, di cui avremo bisogno, è quello in cui le $G_r(x)$ sono polinomi, e le $H_i(x) - H_j(x)$ sono funzioni olomorfe qualunque, che non possono ridursi a semplici costanti.

2. — Segue il teorema del Picard generalizzato. M. Borel lo enuncia sotto la forma: Sia $G(x)$ una funzione intera e si consideri le equazioni del tipo:

$$\varphi(x)\, G(x) = \psi(x), \tag{2}$$

dove il logaritmo dei più grandi valori del modulo di $\varphi(x)$, e $\psi(x)$, cresce meno rapido di una potenza $(1-\alpha)^{ma}$ del log. dei più grandi valori che assume il modulo di $G(x)$, per lo stesso $|x| = r$.

Ciò posto si può dimostrare che tutte queste equazioni, *una al più esclusa*, hanno tante radici per quante ne comporta il teorema del Hadamard [1].

*Od anche, ponendo:*

$$\varphi(x)\, G(x) - \psi(x) = e^{H(x)}\Pi(x), \tag{3}$$

*dove* $\Pi(x)$ *è un prodotto canonico di fattori primari, la* (3) *non può sussistere in due modi diversi, per modo che i logaritmi dei moduli massimi delle due corrispondenti funzioni* $\Pi(x)$, *crescano meno rapidi che una potenza* $(1-\alpha)^{ma}$ *del logaritmo del massimo modulo di* $G(x)$.

Di qui per $\varphi(x) = 1$, $\psi(x) = u$ e specializzando il risultato, si ottiene:

*Se* $f(x)$ *è una funzione trascendente intera, esiste al più un valore del parametro* $u$, *tale che l'equazione:*

$$f(x) = u$$

*abbia un numero finito di zeri. Se ne esistono due o più, la* $f(x)$ *si riduce ad un polinomio finito o ad una costante.* (1° teor. del Picard).

---

[1] Vedi cit. memoria di Borel.

L'ultimo teorema ammette una generalizzazione, per altro verso, da quella data da M. Borel; di essa ora ci occuperemo.

3. — Indichiamo con $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)\ldots$, $\varphi_n(x)$, un numero finito di funzioni intere, scelte così che la $\varphi_r(x)$ abbia *ordine apparente di grandezza* $\rho(r)$ superiore a tutte le altre che la precedono, $\varphi_{r-1}\,\varphi_{r-2}\ldots\varphi_1$ [1]. Sia ancora:

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2\ \ldots\ldots\ \lambda_n$$

un sistema di $n+1$ parametri arbitrari, e si costruisca con essi la funzione:

$$f(x)=\lambda_0\varphi_n(x)+\lambda_1\varphi_{n-1}(x)+\ldots+\lambda_{n-1}\varphi_1(x)+\lambda_n.$$

Possiamo allora dimostrare che: *al massimo esistono $n$ sistemi di valori $\lambda$, linearmente indipendenti, tali che le corrispondenti funzioni $f(x)$ ammettano solo un numero finito di zeri.*

Infatti se:

$$\lambda_{i0},\ \lambda_{i1},\ \ldots\ldots\ \lambda_{in}\qquad (i=0,1,\ldots n)$$

sono $n+1$ sistemi linearmente indipendenti, che godono delle accennate proprietà, si hanno le $n+1$ relazioni:

$$\lambda_{i0}\varphi_n+\lambda_{i1}\varphi_{n-1}+\ldots+\lambda_{in-1}\varphi_1+(\lambda_{in}-f_i)=0\qquad (i=0,1,\ldots n)\tag{4}$$

dove:

$$f_i(x)=g_i(x)\,e^{h_i(x)}\qquad (i=0,1,\ldots n)$$

essendo $g_i(x)$ un polinomio od una costante. Eliminando allora tra le (4) le funzioni $\varphi_s(x)$ si ha:

$$\begin{vmatrix}\lambda_{00} & \lambda_{01} & \ldots\ldots & \lambda_{0n-1} & \lambda_{0n}-f_0\\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & \ldots\ldots & \lambda_{1n-1} & \lambda_{1n}-f_1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \lambda_{n0} & \lambda_{n1} & \ldots\ldots & \lambda_{nn-1} & \lambda_{nn}-f_n\end{vmatrix}=0$$

[1] In sostanza questa condizione serve solo ad eliminare il caso che tra le $\varphi$ possa sussistere una relazione lineare a coeff. costanti od a coeff. polinomi. Il teorema dovrebbe essere enunciato come il caso particolare del N. 4.

od anche:

$$D_{0n} g_0 e^{h_0} + D_{1n} g_1 e^{h_1} + \dots + D_{nn} g_n e^{h_n} - D = 0 \tag{5}$$

in cui D è il det. delle $\lambda_{rs}$, e $D_{rs}$ è il complemento algebrico di $\lambda_{rs}$ in D. Notiamo allora:

*a)* Nessun polinomio $g_i(x)$ può ridursi a zero, e nessuna funzione $h_i(x)$ [1] ad una costante, poichè in ambo i casi una certa $\varphi_r$ potrebbe essere espressa in modo intero e lineare per altre funzioni di *ordine* inferiore, ed in numero finito.

*b)* Il det. D è sempre diverso da zero e quindi i complementari $D_{rs}$ degli elementi dell'ultima colonna non possono tutti annullarsi.

Allora per l'accennato caso particolare del teorema del Borel, la (5), e con essa l'ipotesi, sono assurde.

Per $\lambda_{ij} = u_i^j$ si ha un caso particolarmente interessante; si ottiene cioè: *Se u è un parametro arbitrario, e si costruisce la funzione:*

$$f(x \mid u) = \varphi_n + u\varphi_{n-1} + \dots + u^{n-1}\varphi_1 - u^n, \tag{4'}$$

*esistono al massimo n valori distinti del parametro u, tali che la $f(x \mid u)$ corrispondente, abbia un numero finito di zeri.*

Ponendo $n = 1$ si ritorna al teorema del Picard. Posto invece $n = 2$ si ha un teorema che giova notare, per la sua applicazione alle funzioni dopp. periodiche.

4. — Per questo caso ($n = 2$) è utile integrare la ricerca, non facendo alcuna supposizione sull'*ordine* delle funzioni $\varphi$. Sia $u$ un parametro arbitrario, e formiamo la funzione:

$$\varphi_2(x) + u\varphi_1(x) + u^2 = g(x)e^{h(x)}. \tag{4''}$$

Dimostriamo ora anzitutto:

*a) Se $\varphi_1(x)$, e $\varphi_2(x)$ non sono legati da una relàzione lineare a coefficienti costanti, si possono trovare al massimo 2 valori di u, tali che $g(x)$ sia un polinomio finito.* Infatti supponiamo

[1] Così pure le differenze $h_i(x) - h_j(x)$.

esistano 3 di tali valori: $u_1$, $u_2$, $u_3$, e, dalle relazioni che fra essi si ottengono, eliminiamo, come dianzi, le $\varphi(x)$. Risulta:

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & u_1 & g_1 e^{h_1} \\ 1 & u_2 & g_2 e^{h_2} \\ 1 & u_3 & g_3 e^{h_3} \end{vmatrix} = 0$$

e questa è la condizione di coesistenza dei 3 valori $u_1$, $u_2$, $u_3$. Ma per la supposta indipendenza lineare di $\varphi_1$ e $\varphi_2$, nessuna delle $g(x)$ può essere nulla, e dovranno quindi essere costanti una o più $h(x)$, perchè la (6) sia verificata. D'altra parte poi, se tutte le $h(x)$, o due di esse, si riducessero a costanti, dalle relative equazioni si potrebbe dedurre le $\varphi_1$, $\varphi_2$ come funzioni intere di due polinomi, e quindi polimoni ancor esse, contro l'ipotesi. Resta adunque il caso in cui $h_1$ è costante ed $h_2$, $h_3$ sono funzioni di $x$. Ora se $h_2 - h_3$ è ancora funzione di $x$ la (6) non può verificarsi, e si dovrà dunque porre [1]:

$$h_2 = h_3 = h; \qquad h_1 = 0.$$

Ma in tal caso si ha:

$$\varphi_2(x) = \frac{u_3 g_2 - u_2 g_3}{u_3 - u_2} \cdot e^h + u_2 u_3$$

$$\varphi_1(x) = \frac{g_3 - g_2}{u_3 - u_2} \cdot e^h - (u_2 + u_3)$$

e sostituendo nell'equazione che si ottiene per $u = u_1$:

$$\frac{g_3}{g_2} = \frac{u_3 - u_1}{u_2 - u_1}: \qquad g_1 = u_1^2 - (u_2 + u_3)u_1 + u_2 u_3.$$

Quindi $h_1 = 0$ $g_1 = \text{cost.} \neq 0$ e si avrebbe quindi:

$$\varphi_2 + u_1\varphi_1 + \text{cost.} = 0,$$

contro l'ipotesi. La proposizione è dunque stabilita.

---

[1] Ponendo $h_2 - h_3 = \text{cost}$, $h_1 = \text{cost}$ si ottiene chiaramente lo stesso risultato.

*b) Se $\varphi_1$ e $\varphi_2$ sono legati da una relazione lineare, allora esistono al massimo 3 valori di $u$, tali che la $g(x)$, nella $(4'')$ si riduca ad un polinomio finito.*

Sia infatti:

$$\varphi_1(x) = m\varphi_2(x) + n$$

e sostituendo nella $(4')$ si ottiene ancora:

$$(1 + mu)\varphi_2(x) + (n + u)u = g(x)e^{h(x)}.$$

Quindi indicando con A, se esiste, l'unico valore di eccezione della $\varphi_2(x)$, la totalità dei valori di $u$ che rendono $g(x)$ un polinomio è data dalle soluzioni delle equazioni:

$$\begin{cases} 1 + mu = 0 \\ (1 + mu)\mathrm{A} = nu + u^2. \end{cases}$$

È facile vedere che se tale proprietà appartiene a un certo numero U questo deve coincidere con uno dei tre valori ottenuti. Concludendo:

*Al massimo esistono 3 valori di $u$, per cui la $g(x)$ in $(4')$ si riduce ad un polinomio finito.*

Questi risultati ammettono generalizzazioni in vari sensi: poichè tuttavia per noi, esse non hanno grande importanza, ci limitiamo a dare un esempio che già accenna ad una fra quelle.

Si ponga:

$$\varphi_n(x) = g(x)e^{\mathrm{H}(x)}$$

dove $g(x)$ è un polinomio; ossia si ammetta che $\varphi_n(x)$ abbia nell'origine il suo valore di eccezione; sia inoltre:

$$\varphi_{n-1} = \theta_{n-1}\varphi_n + h_{n-1}$$

$$\varphi_{n-2} = \theta_{n-2}\varphi_n + h_{n-2}$$

. . . . . . . .

dove le $\theta$ sono polinomi in $x$ e le $h$ costanti. Sostituendo allora in (4'), dopo aver fatte le posizioni:

$$\Theta(x,u) = 1 + \theta_{n-1}u + \theta_{n-2}u^2 + \ldots + \theta_1 u^{n-1}$$

$$H(u) = u^n + h_1 u^{n-1} + h_2 u^{n-2} + \ldots + h_{n-1}u,$$

si ha:

$$\Theta(x,u)\varphi_n(x) + H(u) = f(x).$$

Onde, per gli $n$ valori di $u$ radici dell'equazione:

$$H(u) = 0,$$

la $f(x)$ si riduce ad un polinomio, moltiplicato per un'esponenziale. Se poi in particolare le $\theta$ si riducono a costanti, *ossia le* $\varphi_r$ *sono tutte funzioni lineari a coefficienti costanti di* $\varphi_n$, allora $\Theta(x,u)$ diventa $\Theta(u)$, ossia un polinomio di grado $n-1$ in $u$, e la totalità dei valori di *eccezione* delle $f(x)$, si ottengono sostituendo per $u$ le $2n-1$ radici delle due equazioni:

$$\Theta(u) = 0, \qquad H(u) = 0.$$

Per $n = 2$ si ritorna precisamente al caso semplice onde siamo partiti.

5. — Veniamo ai teoremi paralleli sulle funzioni meromorfe. Sia $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ una qualunque funzione olomorfa irriducibile, e $M(x)$, $N(x)$ due polinomi arbitrari. Si consideri poi la funzione:

$$M(x)\frac{f(x)}{\varphi(x)} + N(x) = R(x) \tag{7}$$

*Si può dimostrare che al massimo esistono due sistemi distinti di polinomi* $M(x)$, $N(x)$, *per modo che* $R(x)$ *abbia un numero finito di zeri.*

A questo scopo si noti:

*a)* La funzione $R(x)$ è uguale ad una funzione meromorfa $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, dove $\psi(x)$ e $\varphi(x)$ sono irriducibili.

*b)* La funzione $\psi(x)$ è della forma $\psi(x) = g(x)\, e^{h(x)}$ dove $g(x)$ è un polinomio.

Si ammetta allora che esistano 3 sistemi distinti di polinomi $M(x)$, $N(x)$ soddisfacenti le accennate condizioni: in corrispondenza avremo le tre equazioni:

$$(8) \qquad M_r(x) f(x) + N_r(x)\, \varphi(x) - g_r(x)\, e^{h_r(x)} = 0 \qquad (r = 1, 2, 3)$$

Eliminando tra queste la $f(x)$ e la $\varphi(x)$ si ottiene:

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} M_1 & N_1 & g_1 e^{h_1} \\ M_2 & N_2 & g_2 e^{h_2} \\ M_3 & N_3 & g_3 e^{h_3} \end{vmatrix} = 0.$$

D'altra parte le $h_i(x) - h_j(x)$ non possono ridursi a zero (o a costanti) perchè in tal caso risulterebbe:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = - \frac{N_j g_i - N_i g_j}{M_j g_i - M_i g_j},$$

e la funzione olomorfa considerata si ridurrebbe ad una funzione razionale contro l'ipotesi, dovendosi naturalmente escludere che il secondo membro della precedente relazione assuma la forma $\frac{0}{0}$, poichè in tal caso le tre equazioni (8) rientrano fra loro.

Allora per l'enunciato caso particolare del teorema del Borel è necessario che i coefficienti delle $e^h$ nella (9) si annullino, ciò che non è: quindi l'ipotesi è assurda.

Per $M(x) = 1$, $N(x) = u$ si ha:

*Data la funzione meromorfa irriducibile* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *esistono al massimo due valori di $u$ tali che per essi l'equazione:*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = u$$

*abbia un numero finito di zeri. Se esistono tre di tali valori la funzione meromorfa si riduce a razionale* (2° teor. del Picard).

Generalizziamo quest'ultimo risultato.

6. — Si abbia un numero qualunque $n$ di funzioni meromorfe:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}, \quad \frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}, \ldots \ldots \frac{f_n(x)}{\varphi_n(x)}$$

e sia $F_0$ un multiplo comune ai loro denominatori.

Imponiamo indi alle $\frac{f_r}{\varphi_r}$ la condizione che ridotte a denominatore comune, sotto la forma:

$$\frac{F_1}{F_0}, \quad \frac{F_2}{F_0}, \ldots \ldots, \frac{F_n}{F_0}$$

la $F_r$ sia di *ordine apparente* $\rho(r)$ *superiore a tutte le altre* funzioni che la precedono, $F_{r-1}$, $F_{r-2} \ldots F_1$ (¹). Allora, se $\lambda_0\, \lambda_1 \ldots \lambda_n$, rappresenta un sistema di parametri arbitrari, si costruisca la funzione meromorfa:

$$\lambda_0 \frac{f_n}{\varphi_n} + \lambda_1 \frac{f_{n-1}}{\varphi_{n-1}} + \ldots + \lambda_{n-1} \frac{f_1}{\varphi_1} + \lambda_n = \frac{R(x)}{F_0(x)} \tag{10}$$

dove:

$$R(x) = G(x)\, e^{H(x)}.$$

Sotto le date ipotesi dimostriamo che:

*Esistono al massimo* $n+1$ *sistemi linearmente indipendenti di parametri* $\lambda$, *tali che* $G(x)$ *si riduca per essi ad un polinomio finito.*

Si supponga infatti che esistano $n+2$ di tali sistemi:

$$\lambda_{i0}, \ \lambda_{i1}, \ \ldots\ldots \ \lambda_{in}, \qquad (i = 0, 1, \ldots n+1)$$

e scriviamo le corrispondenti relazioni che si ottengono dalla (10) sotto la forma:

$$\lambda_{i0} F_n + \lambda_{i1} F_{n-1} + \ldots + \lambda_{in-1} F_1 + \lambda_{in} F_0 = G_i e^{H_i} \tag{11}$$

$$(i = 0, 1, \ldots n+1).$$

(¹) V. nota pag. 986.

Eliminando tra queste le $F_r$, e indicando con $(-1)^r D_r$ il det. che si deduce dalla matrice delle $\lambda$ sopprimendo la $r^{ma}$ linea, si ha la relazione:

$$(12) \qquad D_0 G_0 e^{H_0} + D_1 G_1 e^{H_1} + \ldots + D_{n+1} G_{n+1} e^{H_{n+1}} = 0.$$

Dimostriamo che la (12) è assurda. Infatti si noti che per ipotesi le $D_r$ sono tutte diverse da zero, e dei polinomi $G_r(x)$ uno al massimo può annullarsi. Se due si annullassero, eliminando tra le equazioni corrispondenti la $F_0$, si otterrebbe una certa $F_r$ espressa linearmente per funzioni di ordine inferiore, il che è impossibile. Segue che le differenze $H_i - H_j$ debbono in parte annullarsi (o ridursi a costanti). D'altra parte più di 2 funzioni $H_r$ non possono coincidere con una medesima funzione H, perchè eliminando fra tre delle corrisp. equazioni, la $F_0$ e l'esponenziale comune $e^H$, si otterrebbe di nuovo una $F_r$ espressa in modo razionale per funzioni di ordine inferiore.

Esaminiamo adunque l'ultimo caso in cui le $H_r$ coincidono parzialmente due a due. In tal caso, ammesso dapprima $n = 2\nu + 1$ e quindi che la (12) abbia un numero *dispari* di termini, e raccogliendo gli esponenziali comuni, si ottiene una relazione del tipo:

$$(12') \qquad \theta_{\alpha_1} e^{H_{\alpha_1}} + \theta_{\alpha_2} e^{H_{\alpha_2}} + \ldots + \theta_{\alpha_p} e^{H_{\alpha_p}} = 0,$$

dove *almeno uno* dei polinomi $\theta$ coincide con uno dei coeff. $D_r G_r$. Per il teorema del Borel risulta poi:

$$(12'') \qquad \theta_{\alpha_1}(x) = 0 \qquad \theta_{\alpha_2}(x) = 0 \;\ldots\; \theta_{\alpha_p}(x) = 0,$$

e quindi almeno un polinomio $G_r(x)$ deve annullarsi. Ma ciò è assurdo poichè scelte allora due equazioni (11) di identico esponenziale H, ed eliminando tra esse e la equazione corrispondente a $G_r(x) = 0$, tanto $F_0$ che $e^H$, si ritorna al caso in cui una $F_r$, contro l'ipotesi, sarebbe esprimibile in modo razionale per altre funzioni di ordine inferiore.

D'altra parte se $n$ fosse *pari* ($\geq 4$) si giungerebbe ugual-

mente alla (12′) e quindi alle relazioni (12″) che sarebbero della forma:

$$D_i G_i + D_j G_j = 0$$

per cui in (11) i due polinomi finiti $G_i$, $G_j$ differirebbero per un fattore costante.

Ma poichè $n \geq 4$, consideriamo due di tali relazioni:

$$D_{j_1} G_{i_1} + D_{j_1} G_{j_1} = 0 \,; \qquad D_{i_2} G_{i_2} + D_{j_2} G_{j_2} = 0$$

e fra le 4 equazioni $i_1^{ma}$, $j_1^{ma}$: $i_2^{m}$, $j_2^{m}$ corrispondente nel sistema (11) eliminiamo $H_{i_1} = H_{j_1}$, $H_{i_2} = H_{j_2}$, $F_0$. Otteniamo così una relazione lineare a coefficienti costanti, e *non mai identica,* tra $F_1 \ldots F_n$, il che è assurdo come nei casi addietro considerati.

Si conclude quindi che la (12′) e con essa la (12), e per conseguenza l'ipotesi fondamentale, sono assurde.

Posto $\lambda_{ij} = u_i^j$ si ottiene: Se $u$ è un parametro arbitrario, e si costruisce la funzione:

$$\frac{f_n}{\varphi_n} + u \frac{f_{n-1}}{\varphi_{n-1}} + \ldots + u^{n-1} \frac{f_1}{\varphi_1} + u^n = \frac{R(x)}{F_0(x)}$$

tenute ferme le precedenti ipotesi sul numero, e sulla natura delle $\frac{f_r}{\varphi_r}$, *esistono al massimo* $n+1$ *valori di* $u$ tali che la corrisp. $R(x)$ abbia un numero finito di radici.

Per $n = 1$ ritorniamo al 2° teorema del Picard.

Per $n = 2$ si ha un teorema che trova la sua applicazione nelle funzioni dopp. periodiche.

7. — Veniamo all'ultimo caso accennato, escludendo qualunque ipotesi sull'*ordine* delle funzioni $\frac{f_r}{\varphi_r}$.

Sia $u$ un parametro arbitrario, e si formi la funzione:

$$\frac{f_2}{\varphi_2} + u \frac{f_1}{\varphi_1} + u^2 = P(x) \tag{13}$$

che porremo come dianzi sotto la forma:

$$\frac{F_2}{F_0} + u \frac{F_1}{F_0} + u^2 = \frac{R(x)}{F_0}$$

dove:

$$R(x) = G(x) e^{H(x)}.$$

Dimostriamo ora:

*a) Se* $\frac{f_2}{\varphi_2}, \frac{f_1}{\varphi_1}$ *non sono legati da una relazione lineare a coefficienti costanti, si possono trovare al massimo tre valori di* $u$ *tali che per essi la* $G(x)$ *si riduca ad un polinomio.*

Ammettiamo che ne esistano 4 diversi: $u_1, u_2, u_3, u_4$, e scriviamo le quattro corrispondenti relazioni:

$$F_2(x) + u_i F_1 + u_i^2 F_0 = G_i e^{H_i} \qquad (i=1,2,3,4). \tag{14}$$

Eliminando tra questi le $F_2$, $F_1$, $F_0$ si ottiene la relazione:

$$D_1 G_1 e^{H_1} + D_2 G_2 e^{H_2} + D_3 G_3 e^{H_3} + D_4 G_4 e^{H_4} = 0, \tag{15}$$

in cui le D sono det. di Vandermonde, diversi da zero, e nessuna delle $G_r(x)$ può annullarsi.

Il teorema di M. Borel esclude allora che le H sieno tutte fra loro distinte. D'altra parte, più di due non possono coincidere fra loro, perchè se tre coincidessero, dalle corrispondenti equazioni si dedurrebbero $F_2$, $F_1$, $F_0$ sotto forma di polinomi. Supponiamo allora che:

$$H_1 = H_2 = H:$$

in tal caso si ha pure:

$$D_1 G_1 + D_2 G_2 = 0,$$

quindi eliminando $e^H$ tra le due prime equazioni delle (14), si arriva ad una relazione lineare fra $F_2$, $F_1$, $F_0$; e questo è contro l'ipotesi. La proposizione è dunque in ogni caso stabilita.

*b) Se* $\frac{f_2}{\varphi_2}, \frac{f_1}{\varphi_1}$, *sono legati da una relazione lineare, si danno al massimo 5 valori di* $u$, *tali che la corrispondente* $G(x)$ *sia un polinomio.*

Sia infatti:

$$\frac{f_2}{\varphi_2} = m\frac{f_1}{\varphi_1} + n$$

e sostituiscasi in (13). Risulta:

$$(m+u)\frac{f_1}{\varphi_1} + u(n+u) = P(x).$$

Indichiamo poi con A, B, se esistono, i due valori d'eccezione della $\frac{f_1}{\varphi_1}$: allora *la totalità dei valori* di $u$ per i quali la $P(x)$ ammette un numero finito di zeri. è data dalle soluzioni delle 3 equazioni seguenti:

$$\begin{cases} m + u = 0 \\ u^2 + nu = (m+u)A \\ u^2 + nu = (m+u)B \end{cases}$$

Qualunque altro valore U rientra in questi, come è facilmente dimostrabile. Concludendo:

*Esistono al massimo cinque valori di u per cui la funzione:* $\frac{f_2}{\varphi_2} + u\frac{f_1}{\varphi_1} + u^2$ *assume un numero finito di zeri.* È chiaro che in qualche caso si possono effettivamente stabilire tali valori.

Omettiamo ogni generalizzazione analoga al n. 4, facendo notare da ultimo come quasi tutti i teoremi enunciati sieno suscettibili di notevoli estensioni. Così non v'ha dubbio che analoghi risultati si otterrebbero se al posto dei parametri $\lambda_{rs}$ si ponessero polinomi in $x$ di grado finito.

## II.

1. — Diremo che una funzione $F(u)$ è *olomorfa nel campo ellittico*, quando essendo periodica, di periodi $2\omega$, $2\omega'$, è finita in tutto il parallelogrammo eccetto nell'origine, dove presenta un punto singolare essenziale [1]. Così si dirà che una funzione doppiamente periodica $\frac{F_1(u)}{F_2(u)}$ è *meromorfa nel campo ellittico* quando nel 1° parall. presenta finiti od infiniti poli, ed un sol punto singolare essenziale nell'origine. In altra breve memoria [2] ebbi già ad accennare a molte analogie che corrono tra le funzioni in discorso, e quelle olomorfe o meromorfe nel piano. Ora intendo estendere a quelle i teoremi del Picard. Il risultato generale cui giungeremo è il seguente:

---

[1] Tale espressione è dovuta al prof. E. Pascal, " Res. Acc. Lincei ,, 1896.
[2] " Reale Acc. d. Sc. in Torino ,, maggio 1898.

*Se $F(u)$ è olomorfa nel campo ellittico, non possono darsi più di tre valori di $v$ tali che l'equaz.:*

$$F(u) = c.$$

*abbia un numero finito di radici nel 1° parall. dei periodi.*

*Se invece $F(u) = \frac{F_1(u)}{F_2(u)}$ è meromorfa nel campo ellittico, non esistono più che cinque di tali valori.*

2. — Riportiamo un risultato ottenuto altrove (¹).

Sia $F(u)$ una funzione dopp. periodica la quale internamente al 1° parall. presenta i punti singolari polari od essenziali:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$$

in numero finito. Giovandosi di un metodo dovuto all'Hermite, si può stabilire allora che l'espressione più generale di $F(u)$ è data da:

$$F(u) = \left\{ g(p) + \Sigma\, G\left( \frac{1}{p(u) - p(u_r)} \right) \right\} +$$

$$+ p'(u) \left\{ g_1(p) + \Sigma\, G_1\left( \frac{1}{p(u) - p(u_r)} \right) \right\}.$$

dove i sommatori, complessivamente, vengono estesi a tutti i punti $u_r$, e le $g$, $g_1$, $G$, $G_1$, rappresentano funzioni olomorfe intere del loro argomento, le quali possono ridursi anche a polinomi, a costanti, od a zero.

In generale adunque se $f(p(u))$, $\varphi(p(u))$, sono due funzioni intere del loro argomento, l'espressione generica di una funzione olomorfa nel campo ellittico è:

$$F(u) = f(p) + p' \varphi(p). \tag{15}$$

E se $\frac{f_1(p(u))}{f(p(u))}$, $\frac{f_2(p(u))}{f(p(u))}$ sono funzioni meromorfe dell'argomento, l'espressione generica di una qualunque funzione meromorfa nel campo ellittico, è la seguente:

$$\frac{F_1(u)}{F_2(u)} = \frac{f_1(p)}{f(u)} + p' \frac{f_2(p)}{f(u)}. \tag{16}$$

---

(¹) " Rend. Ist. Lomb. ", 1898. *Sul teorema di Weierstrass, ecc.*

In particolare se il punto origine è semplicemente un polo, otteniamo rispett. un polinomio od una funzione razionale in $p$ e $p'$.

Operando poi la trasformazione:

$$(\alpha) \qquad x = p(u) \quad \therefore \quad u = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

le $f$ e $\varphi$ diventano funzioni olomorfe nel piano delle $x$, e tra questo piano e quello delle $u$, come è noto, resta fissata una corrispondenza, per cui ad ogni valore $x$ corrispondono due valori di $u$ uguali, contrari, compresi nel parall. dei periodi, e ad ogni valore $u$ interno a tale parall., corrisponde un unico e determinato valore di $x$.

3. — I precedenti risultati ci permettono in molti casi di ricondurre un problema sulle funzioni dopp. periodiche, ad un altro analogo, inerente le funzioni ordinarie.

Si è già mostrato [1], per esempio, che per questo verso è possibile, in casi determinati, ricondurre lo spezzamento delle funzioni olomorfe nel campo ellittico, all'ordinario teorema di Weierstrass. Così ora ci è facile, per es., dimostrare il teorema:

*Se una funzione* $F(u)$ *dopp. periodica, pari o dispari, si conserva olomorfa in tutto il parall. fondamentale, e per* $u$ *tendente a zero il rapporto* $\frac{F(u)}{p(u)^n [p'(u)]^\varepsilon}$, [*per* $\varepsilon$ *uguale a* 0 *o ad* 1], *si conserva finito, allora la* $F(u)$ *si riduce ad un polinomio della forma:*

$$F(u) = [p']^\varepsilon \{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n\}.$$

Supponiamo infatti sia pari la funzione considerata. Si avrà $F(u) = f(p)$. D'altra parte, posto $\varepsilon = 0$, il rapporto $\frac{f(p)}{p^n}$, per la trasformazione $(\alpha)$, si riduce all'altro $\frac{f(x)}{x^n}$, e questo è tale

[1] V. Nota ultima citata.

che per $x$ tendente all'infinito si conserva finito. Allora per un teorema dovuto all'Hermite [1]:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

e facendo la sostituzione inversa della ($a$) il teorema resta immediatamente dimostrato.

Se $\mathrm{F}(u)$ è dispari, basta porre $\epsilon = 1$ e procedere come dianzi.

*Se* $\mathrm{F}(u)$ *non è nè pari nè dispari, ma le sue parti principali* $f(p)$, $p'\varphi(p)$ (v. Form. 15) *soddisfanno alle condizioni del precedente teorema, allora la* $\mathrm{F}(u)$ *è del tipo:*

$$\mathrm{F}(u) = (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n) +$$
$$p'(b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_{n'} p^{n'}).$$

4. — Veniamo ai teoremi del Picard.

*a)* Sia $\mathrm{F}(u)$ una funzione *pari* di $u$. Allora si ha:

$$\mathrm{F}(u) = f(p).$$

Scriviamo quindi l'equazione:

$$\mathrm{F}(u) = v \tag{17}$$

in cui $v$ è un parametro arbitrario. Applicando alla $u$ la trasformazione ($a$) la (17) diventa:

$$f(x) = v \tag{17'}$$

ed $f(x)$ è una funzione olomorfa di $x$. Per la corrispondenza posta tra la $x$ e la $u$ risulta poi che la (17) e la (17'), per ogni valore di $v$, hanno insieme finiti od infiniti zeri [2]. Ma, per il teorema del Picard, esiste al massimo *un valore* di $u$ tale che la (17') abbia un numero limitato di zeri in tutto il piano, quindi altrettanto avviene per la $\mathrm{F}(u)$ nel 1° parallelogrammo.

---

[1] " Journal de Math. ", serie III, vol. 1.

[2] La (17) presenterebbe naturalmente tali zeri internamente al parall. dei periodi.

*b)* Supponiamo *dispari* la nostra funzione per modo che:

$$F(u) = p' \varphi(p).$$

Sia $v$ un parametro arbitrario e si costruisca la funzione:

$$F(u) + v = R(u) \tag{18}$$

in cui vogliamo determinare la $v$ per modo che $R(u)$ abbia un numero finito di zeri nel 1° parall.

Si scambi nella (18) $+u$ in $-u$ e si moltiplichi termine a termine con quella, si ha:

$$M(p) + v^2 = N(p) \tag{19}$$

posto:

$$M(p) = -F^2(u) = -p'^2 \varphi^2(p); \quad N(p) = R(u) R(-u).$$

Le funzioni $M(p)$, $N(p)$ sono evidentemente olomorfe, e dippiù la seconda possiede un numero finito di zeri nel parall. fond. quando ciò avvenga per la corrispondente $R(u)$. Con questo siamo ricondotti al caso precedente, quindi possiamo concludere:

Esistono al massimo *due valori* $v_1 = A$, $v_2 = -A$ del parametro $v$ per i quali la $N(p)$, e quindi anche la $R(u)$, presenta un numero finito di zeri nel parall. fond.

*c)* Nel caso generale è:

$$F(u) = f(p) + p' \varphi(p).$$

Cerchiamo i valori di $u$ per cui la funzione

$$F(u) + v = R(u) \tag{19}$$

ha un numero finito di zeri. Scambiamo nella precedente $-u$ in $+u$ e facciamo il prodotto.

Posto:

$$R(u) R(-u) = G(p) e^{H(p)}, \quad f^2(p) - p'^2 \varphi^2(p) = \psi(p)$$

risulta:

$$\psi(p) + 2 v f(p) + v^2 = G(p) e^{H(p)} \tag{20}$$

dove $\psi(p)$ e $f(p)$ sono olomorfe in $p$. Basterà ora determinare la $v$ per modo che $G(p)$ sia un polinomio; in corrispondenza a tali valori di $v$ e solo per essi la $R(u)$ non può avere nel parallelogrammo che un numero finito di zeri.

D'altra parte applicando la trasformazione $(\alpha)$ la $(20)$ diventa:

$$\psi(x) + 2vf(x) + v^2 = G(x)e^{H(x)} \tag{20'}$$

e per il teorema del numero 4, prescindendo da ogni ipotesi sugli ordini di grandezza della $\psi(x)$ ed $f(x)$, sappiamo che non possono esistere più che *tre valori* per cui la $G(x)$ si riduca a un polinomio. In generale adunque:

*Una funzione olomorfa nel campo ellittico non può ammettere più che tre valori d'eccezione. Se la funzione è dispari tali valori si riducono a due, e ad uno se essa è pari.*

5. I procedimenti per la ricerca dei valori di *eccezione* delle funzioni *meromorfe nel campo ellittico*, sono identici a quelli del numero precedente. Nel caso generale dovremo poi giovarci del teorema stabilito nel n. 7. Per questo verso possiamo dunque limitarci all'enunciazione dei risultati.

*a) Se* $\frac{F_1(u)}{F_2(u)}$ *è una funzione meromorfa, pari, nel campo ellittico, non possono esistere più che due valori del parametro $v$ tali che per essi l'equazione:*

$$\frac{F_1(u)}{F_2(u)} = v\,, \tag{21}$$

*abbia un numero finito di zeri.*

*b) Se invece* $\frac{F_1(u)}{F_2(u)}$ *è dispari non possono esistere più di quattro di tali valori.*

*c) Da ultimo se* $\frac{F_1(u)}{F_2(u)}$ *è affatto generale il numero dei valori di $v$ che essa può assumere soltanto un numero finito di volte nell'interno del parall. fond. non supera cinque.*

Resta ancora senza risposta la questione se realmente esistano funzioni olomorfe nel campo ellittico, le quali inter-

namente al parall. fond. ammettano $3$ valori eccezionali, e analogamente funzioni meromorfe che ivi ne ammettano 5. L'esistenza di tali funzioni sembra improbabile, onde i due numeri ottenuti sarebbero superiori al vero. Le mie attuali ricerche non mi autorizzano finora ad affermarlo con pieno rigore. Penso in breve tuttavia, di riprendere l'argomento per integrare i risultati nel senso accennato.

Göttingen, 14 aprile 1898.

---

## *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni reali discontinue di variabile reale;*

Nota del Dott. CARLO SEVERINI.

Nelle memorie: *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter wilkürlichen Functionen einer reellen Veränderlichen* (*), Weierstrass dimostra che, *data una funzione $f(x)$ ad un valore, reale, continua per ogni valore reale della variabile $x$, ed avente un limite superiore finito per i suoi valori assoluti, è sempre possibile, in infiniti modi, costruire un polinomio razionale intero, che in un intervallo finito, prefissato a piacere, la rappresenta a meno di una quantità positiva, piccola quanto si vuole;* e da questa proposizione, che può dirsi fondamentale, egli deduce altre interessanti proprietà.

Non tratta però affatto il caso che la funzione cessi di essere continua; e sebbene dica in un punto di volersene occupare in altra occasione, non è tuttavia noto che abbia poi pubblicato alcuna cosa intorno a ciò.

Io ho preso a studiare tale questione; ed in questa nota mi propongo ora di esporre i principali tra i risultati ai quali sono potuto arrivare.

1. — Si abbia una funzione $f(x)$ ad un valore, reale per ogni valore reale della variabile $x$, che ammetta un limite su-

(*) " Sitzungsberichte der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin ", 1885.

periore finito G per i suoi valori assoluti, e tale in fine da essere integrabile in ogni intervallo finito.

Se $\psi(x)$ è un'altra funzione anch'essa ad un valore, reale, finita per ogni valore reale della variabile $x$, e che soddisfa di più alle condizioni di essere pari, di non cambiare mai segno e di ammettere determinato e finito l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,dx = 2\int_0^{\infty} \psi(x)\,dx\,,$$

che verrà indicato con $2\omega$, dimostreremo che *esiste determinato e finito per ogni coppia di valori prefissati per $x$ e $k$ l'integrale:*

$$\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du\,,$$

*dove $u$ è una seconda variabile reale e $k$ una quantità positiva indipendente da $x$ ed $u$.*

Come è noto, la condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $\varphi(x)$ sia integrabile da $-\infty$ a $+\infty$, indicando con $a_1, a_2, b_1, b_2$ quattro quantità reali positive ($a_1 \leqq b_1$; $a_2 \leqq b_2$), è che:

$$\lim_{\substack{a_1=\infty \\ a_2=\infty}} \left| \int_{-b_1}^{-a_1} \varphi(x)\,dx + \int_{a_2}^{b_2} \varphi(x)\,dx \right| = 0\,.$$

Nel caso nostro si avrà da considerare l'espressione:

$$\left| \frac{1}{2k\omega}\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du + \frac{1}{2k\omega}\int_{a_2}^{b_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du \right|,$$

che si può anche scrivere:

$$\left| \frac{\theta(-b_1, -a_1)}{2\omega}\int_{\frac{a_1+x}{k}}^{\frac{b_1+x}{k}} \psi(u)\,du + \frac{\theta(a_2, b_2)}{2\omega}\int_{\frac{a_2-x}{k}}^{\frac{b_2-x}{k}} \psi(u)\,du \right|,$$

indicando in generale con $\theta(x_1, x_2)$ un valore compreso tra il limite superiore ed il limite inferiore della $f(x)$ nel tratto $(x_1 \ldots x_2)$.

Se ora diamo ad $x$ e $k$ valori determinati, e facciamo poi tendere $a_1$ ed $a_2$ all'infinito, l'uno indipendentemente dall'altro, otteniamo:

$$\lim_{\substack{a_1=\infty \\ a_2=\infty}} \left| \frac{\theta(-b_1,-a_1)}{2\omega} \int_{\frac{a_1+x}{k}}^{\frac{b_1+x}{k}} \psi(u)\,du + \frac{\theta(a_2,b_2)}{2\omega} \int_{\frac{a_2-x}{k}}^{\frac{b_2-x}{k}} \psi(u)\,du \right| = 0\,,$$

e però anche:

$$\lim_{\substack{a_1=\infty \\ a_2=\infty}} \left| \frac{1}{2k\omega} \int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{2k\omega} \int_{a_2}^{b_2} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \right| = 0\,,$$

che è ciò che si voleva.

2. — Dobbiamo ora studiare la funzione:

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du\,,$$

contenente oltre alla variabile $x$ un parametro arbitrario positivo $k$.

Si scelga la funzione $\psi(x)$ in modo che oltre a godere delle proprietà già note, ammetta infinite derivate finite e continue in ogni punto dell'asse reale, le quali siano integrabili da $-\infty$ a $+\infty$ anche se vengono prese in valore assoluto; donde segue che scelto un numero $\sigma$ positivo, arbitrariamente piccolo, è sempre possibile determinare una quantità $b$ reale, positiva, siffatta che:

$$\int_b^{\infty} \left| \frac{d^n}{dx^n}\psi(x) \right| dx < \sigma\,.$$

Si può allora vedere che la:

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du\,,$$

come funzione di $x$, ammette anch'essa infinite derivate finite

e continue, che si ottengono colla derivazione sotto il segno di integrale.

A tal'uopo osserviamo che essendo $a_1, a_2, b_1, b_2$ quattro quantità positive come sopra, si ha:

$$\left| \frac{1}{2k\omega} \int_{-b_1}^{-a_1} f(u) \frac{d^n}{dx^n} \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du \right| =$$

$$= \left| \frac{(-1)^n}{2k^n\omega} \int_{\frac{-b_1-x}{k}}^{\frac{-a_1-x}{k}} f(x+ku) \frac{d^n}{du^n} \psi(u) du \right| ,$$

quindi:

$$\left| \frac{1}{2k\omega} \int_{-b_1}^{-a_1} f(u) \frac{d^n}{dx^n} \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du \right| < \frac{G}{2k^n\omega} \int_{\frac{a_1+x}{k}}^{\frac{b_1+x}{k}} \left| \frac{d^n}{du^n} \psi(u) \right| du ,$$

ed analogamente:

$$\left| \frac{1}{2k\omega} \int_{a_2}^{b_2} f(u) \frac{d^n}{dx^n} \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du \right| < \frac{G}{2k^n\omega} \int_{\frac{a_2-x}{k}}^{\frac{b_2-x}{k}} \left| \frac{d^n}{du^n} \psi(u) \right| du ,$$

le quali ci dicono intanto che, fissata una coppia qualunque di valori di $k$ ed $n$, $k > 0$, esiste determinato e finito per ogni $x$ l'integrale:

$$\frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{d^n}{dx^n} \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du ,$$

sempre minore di:

$$\frac{G}{2k^n\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^n}{du^n} \psi(u) \right| du .$$

Inoltre è facile vedere che, fissati comunque $k$ ed $n$, $k > 0$, questo medesimo integrale *converge in egual grado* per tutti i valori di $x$ contenuti in un intervallo finito, preso ad arbitrio.

Si ha infatti, indicando con $b_1$ una quantità reale positiva:

$$\left|\frac{1}{2k\omega}\int_{b_1}^{\infty} f(u)\frac{d^n}{dx^n}\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du\right| < \frac{G}{2k^n\omega}\int_{\frac{b_1-x}{k}}^{\infty}\left|\frac{d^n}{du^n}\psi(u)\right|du,$$

$$\left|\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{-b_1} f(u)\frac{d^n}{dx^n}\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du\right| < \frac{G}{2k^n\omega}\int_{-\infty}^{-\frac{b_1+x}{k}}\left|\frac{d^n}{du^n}\psi(u)\right|du.$$

Per quanto abbiamo dianzi posto sulla $\psi(x)$, dato il solito $\sigma$ piccolo a piacere ed un numero $a$ positivo qualsivoglia purchè finito, potremo determinare un valore $b'_1$ di $b_1$ maggiore di $a$ per modo che risulti:

$$\frac{G}{2k^n\omega}\int_{\frac{b_1'-a}{k}}^{\infty}\left|\frac{d^n}{du^n}\psi(u)\right|du < \sigma; \quad \frac{G}{2k^n\omega}\int_{-\infty}^{-\frac{b_1'-a}{k}}\left|\frac{d^n}{du^n}\psi(u)\right|du < \sigma.$$

Per ogni $x < a$ sarà allora:

$$\frac{G}{2k^n\omega}\int_{\frac{b_1'-x}{k}}^{\infty}\left|\frac{d^n}{du^n}\psi(u)\right|du < \sigma,$$

ed analogamente per $x > -a$:

$$\frac{G}{2k^n\omega}\int_{-\infty}^{-\frac{b_1'+x}{k}}\left|\frac{d^n}{du^n}\psi(u)\right|du < \sigma.$$

Queste due ultime disuguaglianze vengono dunque verificate insieme per tutti i valori di $x$ compresi nell'intervallo $(-a \ldots \ldots +a)$; quivi lo saranno a maggior ragione le altre:

$$\left|\frac{1}{2k\omega}\int_{b'_1}^{\infty} f(u)\frac{d^n}{dx^n}\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du\right| < \sigma; \quad \left|\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{-b'_1} f(u)\frac{d^n}{dx^n}\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du\right| < \sigma.$$

La quantità $a$ essendo qualunque, resta così dimostrato quanto avevamo asserito sull'integrale:

$$\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du.$$

Ciò posto si chiami con $h$ una quantità reale diversa da zero, e si consideri la differenza:

$$\Delta_h = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du - \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{\psi\left(\frac{u-x-h}{k}\right)-\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)}{h}du,$$

che possiamo anche scrivere:

$$\Delta_h = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\left\{\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) - \frac{\psi\left(\frac{u-x-h}{k}\right)-\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)}{h}\right\}du.$$

Ora:

$$\frac{\psi\left(\frac{u-x-h}{k}\right)-\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)}{h} = -\frac{1}{k}\,\frac{\psi\left(\frac{u-x}{k}-\frac{h}{k}\right)-\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)}{-\frac{h}{k}} =$$

$$= \frac{d}{dx}\psi\left(\frac{u-x}{k}-\theta\frac{h}{k}\right),$$

dove $\theta$ è una quantità che in generale, per ogni coppia di valori dati ad $x$ e $k$, varia al variare di $u$, ma che rimane sempre compresa tra 0 ed 1. Quindi:

$$\Delta_h = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\left\{\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) - \frac{d}{dx}\psi\left(\frac{u-x}{k}-\theta\frac{h}{k}\right)\right\}du,$$

ed anche:

$$\Delta_h = \frac{1}{2k\omega}\int_{-b_1}^{+b_1} f(u)\left\{\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) - \frac{d}{dx}\psi\left(\frac{u-x}{k}-\theta\frac{h}{k}\right)\right\}du +$$

$$+ \frac{1}{2k\omega} \int_{b_1}^{\infty} f(u) \left\{ \frac{d}{dx} \psi\left(\frac{u-x}{h}\right) - \frac{d}{dx} \psi\left(\frac{u-x}{k} - \theta \frac{h}{k}\right) \right\} du +$$

$$+ \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{-b_1} f(u) \left\{ \frac{d}{dx} \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) - \frac{d}{dx} \psi\left(\frac{u-x}{k} - \theta \frac{h}{k}\right) \right\} du .$$

Pér la convergenza uniforme dell'integrale:

$$\frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{d}{dx} \psi \left(\frac{u-x}{k}\right) du ,$$

fissati due valori qualunque di $x$ e $k$, $k > 0$, potremo anzitutto trovare un tal valore di $b_1$, che si abbia per ogni $h$ il cui modulo non superi un determinato limite $h'$:

$$\left| \Delta_h - \frac{1}{2k\omega} \int_{-b_1}^{+b_1} f(u) \left\{ \frac{d}{dx} \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) - \frac{d}{dx} \psi\left(\frac{u-x}{k} - \theta \frac{h}{k}\right) \right\} du \right| < \frac{\sigma}{2} .$$

Così scelto $b_1$ si può in seguito determinare una quantità $h''$ minore di $h'$, in modo che riesca per ogni $h < h''$:

$$\left| \frac{1}{2k\omega} \int_{-b_1}^{+b_1} f(u) \left\{ \frac{d}{dx} \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) - \frac{d}{dx} \psi\left(\frac{u-x}{k} - \theta \frac{h}{k}\right) \right\} du \right| < \frac{\sigma}{2} .$$

Corrispondentemente sarà:

$$| \Delta_h | < \sigma .$$

Risulta dunque che al decrescere di $h$ l'integrale rappresentato con $\Delta_h$ finisce per diventare in valore assoluto minore di qualsivoglia numero piccolo a piacere, e però il suo limite per $h = 0$ non può essere che lo zero.

Questo fatto dimostra ad un tempo che esiste la derivata della funzione $F(x, k)$ rispetto alla variabile $x$, e che si ha:

$$\frac{d}{dx} F(x, k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{d}{dx} \psi \left(\frac{u-x}{k}\right) du .$$

Il procedimento seguito per arrivare a questo risultato è evidentemente generale, ed applicato successivamente, conduce alla formola:

$$\frac{d^n}{dx^n} F(x,k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{d^n}{dx^n} \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du ,$$

qualunque sia $n$.

Per queste proprietà a cui soddisfa la $F(x, k)$ è ad essa applicabile la formola abbreviata dal Mac-Laurin, cioè per ogni $k$ fisso, maggiore di zero e per ogni valore finito di $x$:

$$F(x,k) = F(x,k)_{\binom{x}{0}} + xF_x'(x,k)_{\binom{x}{0}} + \\ + \frac{x^2}{2!} F_x^{(2)}(x,k)_{\binom{x}{0}} + \ldots + \frac{x^n}{n!} F_x^{(n)}(x,k)_{\binom{x}{\theta_n x}} ,$$

dove $n$ può essere qualunque.

Se quindi la $\psi(x)$ è anche scelta in modo che il resto:

$$\frac{x^n}{n!} F_x^{(n)}(x,k)_{\binom{x}{\theta_n x}}$$

tenda a zero al crescere di $n$, ne viene che per ogni valore fissato di $k$ maggiore di zero è possibile lo sviluppo:

$$F(x,k) = F(x,k)_{\binom{x}{0}} + xF_x'(x,k)_{\binom{x}{0}} + \\ + \frac{x^2}{2!} F_x^{(2)}(x,k)_{\binom{x}{0}} + \ldots + \frac{x^n}{n!} F_x^{(n)}(x,k)_{\binom{x}{0}} + \ldots$$

per tutti i punti di un intervallo finito qualsivoglia:

3. — Un esempio di funzioni $\psi(x)$, per le quali la $F(x, k)$, costruita come precedentemente, gode delle dette proprietà ci viene dato dalla $e^{-x^2}$.

Come è noto, e come d'altronde è facile verificare, essa soddisfa intanto alle ipotesi poste per la $\psi(x)$ nel principio del paragrafo 1.

Venendo a considerarne le derivate si ha in generale:

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = e^{-x^2} \Sigma_\nu (-1)^{n+\nu} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-2\nu+1)}{\nu\,!} (2x)^{n-2\nu}.$$

Ne segue:

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right| \leqq e^{-x^2} \Sigma_\nu \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-2\nu+1)}{\nu\,!} \left| 2x \right|^{n-2\nu};$$

e però:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right| dx \leqq 2\Sigma_\nu \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-2\nu+1)}{\nu\,!} \int_0^\infty (2x)^{n-2\nu} e^{-x^2} dx .$$

Ma se $n$ è pari:

$$\int_0^\infty (2x)^{n-2\nu} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{(n-2\nu)\,!}{\left(\frac{n}{2}-\nu\right)!};$$

quindi sostituendo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right| dx \leqq \sqrt{\pi}\, \Sigma_\nu \frac{n\,!}{\nu\,! \left(\frac{n}{2}-\nu\right)!},$$

ed anche:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right| dx \leqq \sqrt{\pi} \frac{n\,!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Se $n$ è dispari:

$$\int_0^\infty (2x)^{n-2\nu} e^{-x^2} dx = \left(\frac{n-1}{2}-\nu\right)!\; 2^{n-2\nu-1};$$

e con un calcolo molto semplice:

$$\int_0^\infty (2x)^{n-2\nu} e^{-x^2} dx < \frac{(n-2\nu)\,!}{\left(\frac{n-1}{2}-\nu\right)!};$$

da cui in fine:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right| dx < 2\Sigma_\nu \frac{n!}{\nu! \left(\frac{n-1}{2} - \nu\right)!},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right| dx < \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} 2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Per ultimo ci rimane da verificare che il resto $R_n(x, k)$ della serie del Mac-Laurin, costruita per la:

$$\overline{F}(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du,$$

al crescere di $n$, fissato un valore qualunque di $k$ maggiore di zero, converge allo zero per ogni valore finito di $x$.

Ora abbiamo:

$$\overline{F}_x^{(n)}(x,k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{d^n}{dx^n} e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du,$$

$$\overline{F}_x^{(n)}(x,k) = \frac{(-1)^n}{k^n\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+ku) \frac{d^n}{du^n} e^{-u^2} du;$$

quindi:

$$R_n(x,k) = \frac{x^n}{n!} \overline{F}_x^{(n)}(x,k)_{\left(\frac{x}{\theta_n x}\right)} = \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n!\, k^n \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta_n x + ku) \frac{d^n}{du^n} e^{-u^2} du,$$

da cui:

$$\left| R_n(x,k) \right| < \frac{G\, |x|^n}{n!\, k^n \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^n}{du^n} e^{-u^2} \right| du.$$

Da quanto abbiamo dianzi dimostrato discende inoltre:

$$\left| R_n(x,k) \right| < \frac{G \cdot |x|^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!\, k^n} 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}$$

se $n$ è pari; ed:

$$\left|R_n(x,k)\right| < \frac{G\,.\,|x|^n}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\,k^n\,.\,\sqrt{\pi}}\,2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

se $n$ è dispari. Ma:

$$\frac{G\,.\,|x|^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!\,k^n}\,2^{\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{G\,.\,|x|^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{k^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{\frac{G\,.\,|x|^n}{\left(\frac{k^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{\left(\frac{G^{\frac{2}{n}}\,.\,|x|^2}{\frac{k^2}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\,,$$

che per ogni valore finito di $x$ e per ogni $k$ fissato maggiore di zero, tende appunto allo zero al crescere di $n$.

Similmente:

$$\frac{G\,.\,|x|^n}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\,k^n\sqrt{\pi}}\,2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}\,.\,G\,.\,|x|^n}{\sqrt{\pi}}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\,\left(\frac{k^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{\left(\frac{|x|^2\,.\,\left(\frac{\sqrt{2}\,.\,G}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{2}{n}}}{\frac{k^2}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} =$$

$$= \frac{\left(\frac{|x|^2\,.\,\left(\frac{\sqrt{2}\,.\,G}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{2}{n}}}{\frac{k^2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\,.\,\left(\frac{|x|^2\,.\,\left(\frac{\sqrt{2}\,.\,G}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{2}{n}}}{\frac{k^2}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\,.$$

Per ogni valore finito di $x$ e per ogni $k$ fissato maggiore di zero, il primo fattore.

$$\left(\frac{|x|^2\,.\,\left(\frac{\sqrt{2}\,.\,G}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{2}{n}}}{\frac{k^2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

tende, quando $n$ cresce indefinitamente al valore:

$$\left(\frac{|x|^2}{\frac{k^2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}:$$

l'altro tende a zero. È poi evidente che la convergenza di $R_n(x,k)$ verso lo zero, assegnato comunque a $k$ un valore diverso da zero, è uniforme per tutti i punti di un intervallo finito.

*Rimane dunque dimostrata l'esistenza d'infinite funzioni* $\psi(x)$ *siffatte che le* $F(x, k)$ *corrispondenti, costruite come sopra, per ogni* $k$ *fisso, non nullo, si possono rappresentare mediante serie di potenze intere e positive di* $x$*, convergenti per ogni valore finito di questo; in modo che servendoci di una denominazione usata nella teoria delle funzioni potremo dirle funzioni trascendenti intere.*

4. — Riprendiamo ora lo studio della funzione:

$$F(x,k)=\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du\,,$$

ed indichiamo con $\delta$ una quantità positiva piccola a piacere.

Potremo scrivere:

$$F(x,k)=\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{x-\delta} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du+\frac{1}{2k\omega}\int_{x+\delta}^{\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du\,+$$

$$+\int_{x-\delta}^{x} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du+\frac{1}{2k\omega}\int_{x}^{x+\delta} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du\,,$$

ed anche:

$$F(x,k)=\frac{\theta(-\infty,x-\delta)}{2\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{\infty}\psi(u)\,du+\frac{\theta(x+\delta,\infty)}{2\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{\infty}\psi(u)\,du\,+$$

$$+\frac{\theta(x-\delta,x)}{2\omega}\int_{0}^{\frac{\delta}{k}}\psi(u)\,du+\frac{\theta(x,x+\delta)}{2\omega}\int_{0}^{\frac{\delta}{k}}\psi(u)\,du\,,$$

da cui:

$$F(x,k)-f(x)=\frac{\theta(-\infty,+\infty)-f(x)}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{\infty}\psi(u)\,du\,+$$

$$+\frac{\eta}{2}\left\{\theta(x-\delta,x)+\theta(x,x+\delta)-2f(x)\right\},$$

ove $\eta$ rappresenta una quantità positiva minore di 1.

Sia ora un intervallo finito qualunque $(x_1 \ldots x_2)$; e, prefis-

sati due numeri $\sigma$ e $\lambda$ piccoli a piacere, si escludano i punti di $(x_1 \ldots x_2)$, ove la funzione oscilla per più di $\frac{\sigma}{4}$, con un numero finito d'intorni, che sommati diano tutti insieme una quantità minore di $\frac{\lambda}{2}$.

Detto $(x_i \ldots x_{i+1})$ uno degli $n$ tratti che ne risultano, nei punti dei quali l'oscillazione è minore od uguale a $\frac{\sigma}{4}$, potremo determinare una quantità $\lambda'_i$ tale, che in una porzione di esso minore od uguale a $\lambda'_i$ l'oscillazione della funzione sia minore di $\frac{\sigma}{2}$.

Ciò dipende dal seguente teorema, che è una generalizzazione di quello noto di Cantor sulla continuità:

*Se una funzione $f(x)$ si mantiene sempre finita, e fa nei punti di un tratto finito $(a \ldots . b)$ soltanto delle oscillazioni minori di un certo numero $g$, si può sempre determinare un numero positivo $\bar{h}$ differente da zero, tale che quando $h$ è in valore assoluto minore di $\bar{h}$, si abbia per tutti i punti $x, x+h$ dell'intervallo $(a \ldots b)$:*

$$|f(x+h)-f(x)| < g+g_1,$$

*$g_1$ essendo un numero positivo piccolo a piacere* (*).

(*) La dimostrazione di questo teorema non presenta alcuna difficoltà. Cfr. Dini, *Fondamenti per la teorica di funzioni di variabili reali*, §§ 41, 43 e 187. Pincherle, *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche*, " Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna ", t. III, s. IV. Nondimeno ne darò qui una tenendo, sulla scorta di quello che fa il Lüroth per funzioni assolutamente continue di due variabili reali (" Mathematische Annalen ", B. VI) un procedimento differente da quello che ordinariamente si suole seguire in simili questioni.

Come è noto per oscillazione in un punto $x$ s'intende il limite (necessariamente determinato) dell'oscillazione nell'intorno $(x-h, x+h)$, quando $h$ impiccolisce indefinitamente. Nelle ipotesi poste nel teorema si potrà dunque, assegnato un punto qualsivoglia $x_0$ di $(a \ldots b)$, trovarne uno intorno in cui la $f(x)$ oscilla per meno di $g$; anzi di tali intorni ne esistono infiniti, e perchè sono tutti compresi nell'intervallo dato, essi devono ammettere un limite superiore finito $(x_0-\epsilon_0 \ldots x_0+\epsilon'_0)$.

In generale non sarà $\epsilon_0 = \epsilon'_0$, e quando ciò non si verifica si consideri il massimo intorno $(x_0-\epsilon \ldots x_0+\epsilon)$, che ha $x_0$ come punto medio, e nel quale l'oscillazione della $f(x)$ è minore od uguale a $g$.

L'intorno così fatto possiamo riguardarlo come funzione dei punti di

Prendendo la quantità $\delta$, finora arbitraria, minore o tutt'al più uguale a $\lambda'_i$ si avrà:

$$\frac{\eta}{2}\left|\theta(x-\delta, x)+\theta(x, x+\delta)-2f(x)\right|<\frac{\sigma}{2},$$

quando i punti $x, x-\delta, x+\delta$ sono compresi tra $x_i$ ed $x_{i+1}$.

Se si ripete questo ragionamento per ognuno dei tratti $(x_i \ldots x_{i+1})$, e si sceglie come valore finale di $\delta$ un valore $\delta'$, soggetto alla condizione:

$$\delta' \leqq \lambda'_i, \ (i=1, 2, \ldots, n)$$

risulta per ogni $x, x-\delta', x+\delta'$ appartenenti ad un medesimo tratto $(x_i \ldots x_{i+1})$:

$$\frac{\eta}{2}\left|\theta(x-\delta', x)-\theta(x, x+\delta')-2f(x)\right|<\frac{\sigma}{2}.$$

In particolare quando sia $\delta' < \frac{\lambda}{4n}$ la precedente disuguaglianza vale per i punti d'un certo campo, che indicheremo con $[x_1, x_2]$, composto di $n$ tratti, e che differisce da $(x_1 \ldots\ldots x_2)$ a meno di $\lambda$.

---

$(a \ldots b)$, la quale si vede subito che è continua. Perciò dati due punti qualunque $x_1$ ed $x_2$, di cui gl' intorni anzidetti siano $(x_1-\epsilon_1 \ldots x_1+\epsilon_1)$; $(x_2-\epsilon_2 \ldots x_2+\epsilon_2)$ basterà far vedere che se uno dei due punti ad es. $x_2$ s'accosta indefinitamente all'altro, l'intorno $(x_2-\epsilon_2 \ldots x_2+\epsilon_2)$ tende a diventare uguale ad $(x_1-\epsilon_1 \ldots x_1+\epsilon_1)$. Ciò risulta dalla limitazione:

$$\epsilon_1-|x_1-x_2| \leqq \epsilon_2 \leqq \epsilon_1+|x_1-x_2|,$$

alla quale si giunge immaginando di prendere $x_2$ nell'intorno $(x_1-\epsilon_1 \ldots x_1+\epsilon_1)$.

L'intorno del punto $x$ dell'intervallo $(a \ldots b)$ determinato come sopra ammette dunque un minimo $\bar{\epsilon}$, che sarà diverso da zero, giacchè altrimenti esisterebbe un punto $\bar{x}$ di $(a \ldots b)$ in cui la funzione oscilla per più di $g$.

Per avere la quantità $\bar{h}$ tale che quando $|h|<\bar{h}$ si abbia per tutti i punti $x, x+h$ di $(a \ldots b)$:

$$|f(x+h)-f(x)|<g+g_1,$$

con $g_1$ piccolo a piacere, basta evidentemente fare $h=\bar{\epsilon}$.

Fissato in tal modo $\delta'$ si può in seguito determinare un valore $k'$ tale che per ogni $k < k'$ si abbia:

$$\frac{2G}{\omega} \int_{\frac{\delta'}{k}}^{\infty} \psi(u) du < \frac{\sigma}{2},$$

donde segue per i punti di $[x_1, x_2]$:

$$|F(x, k) - f(x)| < \sigma.$$

Da tutto quello che precede possiamo concludere il seguente teorema:

A. *Nelle ipotesi poste per la $f(x)$, essendo $\sigma$ e $\lambda$ due quantità positive, piccole a piacere, e tra loro indipendenti, si può, dato un intervallo finito $(x_1 \dots x_2)$ qualsivoglia, escludere da esso, come dianzi è detto, un numero finito di tratti, di somma minore di $\lambda$ in modo che si hanno infinite funzioni trascendenti intere $F(x, k)$, contenenti oltre alla variabile $x$ un parametro arbitrario positivo $k$, e tali che per valori di questo parametro minori d'una quantità $k'$, opportunamente scelta, in ogni punto della parte rimanente $[x_1, x_2]$:*

$$|F(x, k) - f(x)| < \sigma.$$

*Osservazione.* — Notiamo che il campo $[x_1, x_2]$ dipende dalla scelta dei numeri $\sigma$ e $\lambda$, essendo in generale diverso per diversi valori di questi. Peraltro non ne dipende in modo assoluto, giacchè c'è evidentemente dell'arbitrarietà nella sua determinazione. Per un $\sigma$ scelto comunque è sempre possibile farlo prossimo quanto si vuole ad $(x_1 \dots x_2)$.

5. — Immaginiamo ora di avere determinato un valore $\bar{k}$ del parametro $k$ in modo che risulti verificata la disuguaglianza:

$$|F(x, \bar{k}) - f(x)| < \sigma,$$

per tutti i punti di un campo $[x_1, x_2]$, che si sarà preso in antecedenza differente da $(x_1 \dots \dots x_2)$ per una quantità piccola a piacere.

Se dopo ciò mettiamo la $F(x, \bar{k})$ sotto forma di una serie di potenze, e con $G(x)$ indichiamo la somma dei primi $m$ termini di questa serie, prendendo $m$ abbastanza grande, potremo ottenere per ogni valore di $x$ compreso tra $x_1$ ed $x_2$:

$$| F(x, \bar{k}) - G(x) | < \sigma_1,$$

ove $\sigma_1$ è anch'esso piccolo quanto si vuole.

Dal confronto di queste due disuguaglianze si ricava per i punti di $[x_1, x_2]$:

$$| f(x) - G(x) | < \sigma + \sigma_1,$$

che ci dà quest'altro teorema.

B. *Per una funzione $f(x)$ soddisfacente alle condizioni dette di sopra, dato un intervallo finito qualunque $(x_1 \ldots\ldots x_2)$, si può costruire in infiniti modi un polinomio razionale intero $G(x)$, il quale rappresenti la funzione medesima a meno di una quantità positiva $g$ piccola a piacere per tutti i punti di un campo $[x_1, x_2]$ prefissato, nel modo detto dianzi, prossimo quanto si vuole ad $(x_1 \ldots x_2)$.*

6. — Per la dimostrazione di questo teorema, nel modo come l'abbiamo ora data, è di essenziale importanza il fatto che la:

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \psi \left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

quando si scelga opportunamente $\psi(x)$, risulta funzione trascendente intera di $x$.

Se però riandiamo il ragionamento fatto per arrivare a stabilire questa proprietà (paragrafo 2), troviamo che i limiti superiori, ivi determinati, dei coefficienti della serie di potenze che serve a rappresentare la $F(x, k)$, tendono all'infinito al decrescere di $k$, e più precisamente il limite superiore del coefficiente di $x^n$ è infinito come $\frac{1}{k^n}$.

Rimane quindi la possibilità che la cosa si verifichi per i coefficienti stessi, ciò che bisognerebbe non accadesse perchè, nel modo detto, si potesse ottenere sempre una rappresentazione utile della $f(x)$, per quanto grande sia l'approssimazione voluta.

In un'altra nota, che pubblicherò quanto prima, darò esempio d'infinite funzioni per le quali questo fatto realmente ha luogo, facendo però nel tempo stesso vedere come si possa, per altra via, arrivare a stabilire il medesimo teorema B, senza che per essa si presenti l'inconveniente ora detto.

Fissato un intervallo $(x_1 \ldots x_2)$, per la dimostrazione di questo teorema si potrebbe anche, analogamente a quanto fa Weierstrass, considerare, invece di $F(x,k)$, la:

$$F_1(x,k) = \frac{1}{2k\omega} \int_a^b f(u)\, \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du\,.$$

dove $a$ e $b$ sono due quantità reali soggette alla condizione:

$$a < x_1 < x_2 < b$$

giacchè, in tutti i punti di $(x_1 \ldots x_2)$, il valore assoluto della differenza:

$$F(x,k) - F_1(x,k) = \frac{1}{2\omega} \int_{\frac{x-a}{k}}^{\infty} f(x-ku)\, \psi(u) du +$$

$$+ \frac{1}{2\omega} \int_{\frac{b-x}{k}}^{\infty} f(x+ku)\, \psi(u) du\,,$$

tende uniformemente allo zero al decrescere di $k$, e di più la $F_1(x,k)$ risulta sempre funzione trascendente intera di $x$, quando tale sia la $\psi(x)$.

Ma anche qui s'incontrerebbe la medesima difficoltà di

prima, non essendo possibile riconoscere a quale limite tenda il coefficiente generale dello sviluppo del Mac-Laurin

$$\frac{(-1)^\nu}{2\nu!\,\omega k^\nu}\int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} f(ku)\frac{d^\nu\psi(u)}{du^\nu}du,$$

quando $k$ va a zero.

7. — Fra le condizioni che si sono poste per la $f(x)$ vi è quella di essere integrabile in ogni intervallo finito, e quindi rinchiudibile il gruppo dei punti di questo, nei quali essa oscilla per più di un numero $\sigma$, prefissato a piacere.

Vogliamo ora sostituire questa condizione coll'altra più restrittiva che in ogni intervallo finito sia rinchiudibile il gruppo dei punti di discontinuità.

In tale ipotesi il teorema A si modifica notevolmente, essendo ora vero per un campo, che si può prefissare indipendentemente dall'approssimazione voluta, e prossimo quanto si vuole ad $(x_1 \dots x_2)$; in modo che in quel campo:

$$\lim_{k=0} \mathrm{F}(x,k) = f(x).$$

Esclusi infatti da $(x_1 \dots x_2)$ i punti di discontinuità con un numero finito d'intorni la cui somma sia piccola a piacere, se si dice $j$ uno dei tratti che ne risultano, nei quali la funzione è continua, se ne potrà prendere una parte $j'$ i cui estremi siano discosti da quelli di $j$ per una quantità piccolissima $s$. Se $\delta < s$ sarà per tutti i punti di $j'$:

$$\mathrm{F}(x,k) - f(x) = \frac{\theta(-\infty,+\infty) - f(x)}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{\infty}\psi(u)\,du +$$

$$+\frac{\eta}{2}\{f(x-\epsilon\delta)+f(x+\epsilon\delta)-2f(x)\},$$

dove $\epsilon$ e $\eta$ rappresentano quantità comprese tra zero ed 1.

Ciò basta per poter dire che nel campo $[x_1, x_2]'$, costituito

dall'insieme di questi ultimi tratti $j'$, disponendo di $k$ e $\delta$ si può ottenere:

$$| F(x, k) - f(x) | < \sigma,$$

qualunque sia $\sigma$. Anzi risulta di più che la $F(x, k)$ nel campo $[x_1, x_2]'$, al decrescere di $k$, converge in egual grado alla $f(x)$, che ivi è dunque rappresentabile con qualsivoglia approssimazione mediante un polinomio razionale intero.

Se a fissare questa approssimazione si scelgono successivamente le quantità positive:

$$g_1, g_2, g_3, \ldots g_\nu, \ldots$$

che siano i termini di una serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ convergente, potremo determinare una successione di funzioni razionali intere:

$$G_1(x), G_2(x), \ldots G_\nu(x), \ldots$$

in modo che risulti per tutti i punti di $[x_1, x_2]'$:

$$| f(x) - G_\nu(x) | < g_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Ponendo:

$$\overline{G}_0(x) = G_1(x)$$

$$\overline{G}_1(x) = G_2(x) - G_1(x)$$

$$\overline{G}_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

si ha:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=l} \overline{G}_\nu(x) = G_{l+1}(x)$$

e perchè:

$$\lim_{l=\infty} G_{l+1}(x) = f(x),$$

viene in ultimo:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{G}_\nu(x).$$

per ogni valore determinato di $x$ ed appartenente ad $[x_1, x_2]'$.

Dalle disuguaglianze:

$$| f(x) - G_\nu(x) | < g$$

$$| f(x) - G_{\nu+1}(x) | < g_{\nu+1}$$

si ricava poi, quando $\nu \geqq 1$:

$$| \overline{G}_\nu(x) | < g_\nu + g_{\nu+1}$$

donde:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} | \overline{G}_\nu(x) | < \sum_{\nu=1}^{\infty} (g_\nu + g_{\nu+1}) .$$

Segue da ciò che la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{G}_\nu(x)$, e quindi anche l'altra $\sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{G}(x)$, converge assolutamente ed in egual grado nel campo $[x_1, x_2]'$. Abbiamo dunque il teorema

C. *Ogni funzione $f(x)$ che soddisfa alle solite ipotesi, e tale inoltre da avere in ogni intervallo finito un gruppo rinchiudibile di punti di discontinuità, si può, in un campo $[x_1, x_2]'$ che si ottiene escludendo, come di sopra è detto, i punti di discontinuità da un tratto assegnato $(x_1 \ldots x_2)$ con intorni la cui somma sia piccola a piacere, rappresentare in un numero infinito di modi, mediante una serie di polinomi razionali interi.*

*Tale serie converge assolutamente ed in egual grado entro il detto campo.*

8. — A questo sviluppo se ne riannoda un altro analogo *in serie di funzioni trascendenti intere* (*).

La prima di tali funzioni è la:

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du ,$$

---

(*) Cfr. L. MAURER, *Ueber die Mittelwerte der Functionen einer reellen Variabeln*, “ Mathematische Annalen „, B. 47.

e delle altre una qualunque $F_\nu(x, k_\nu)$ è legata alle precedenti dalla relazione:

$$F_\nu(x, k_\nu) =$$

$$= \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ f(u) - F(u, k) - F_1(u, k_1) - \ldots - F_{\nu-1}(u, k_{\nu-1}) \} \psi \left( \frac{u-x}{k} \right) du.$$

Disponendo dei parametri $k, k_1, \ldots k_\nu, \ldots$ in modo che il valore assoluto delle differenze:

$$f(x) - F(x, k) = f_1(x)$$

$$f_1(x) - F_1(x, k_1) = f_2(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{\nu-1}(x) - F_{\nu-1}(x, k_{\nu-1}) = f_\nu(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

per tutti i punti del campo $[x_1, x_2]'$ risulti minore rispettivamente delle quantità: $g_1, g_2 \ldots g_\nu \ldots$, scelte come sopra, si ottiene per la $f(x)$ lo sviluppo indicato.

Simile sviluppo si potrebbe ottenere con procedimento analogo a quello seguito per arrivare al teorema C, ove si sostituisse ai polinomi:

$$G_1(x), G_2(x), \ldots G_\nu(x), \ldots$$

le funzioni:

$$F(x, k_1), F(x, k_2), \ldots F(x, k_\nu), \ldots$$

i cui parametri siano determinati in base alla condizione:

$$| f(x) - F(x, k_\nu) | < g_\nu, (\nu = 1, 2, 3, \ldots, \infty),$$

per ogni $x$ compreso in $[x_1, x_2]'$.

9. — Se in particolare si ammette che la funzione $f(x)$, soddisfacendo a tutte le condizioni finora poste, sia generalmente continua in ogni intervallo finito, ai teoremi sopra dimo-

strati, che evidentemente continuano qui a sussistere, se ne possono aggiungere, nell'ipotesi che le discontinuità siano di prima specie, anche altri, che mi sembrano notevoli, e dei quali mi occuperò in un prossimo lavoro.

Tra questi è ad es. il seguente.

*Per ogni funzione $f(x)$ ad un valore, reale per ogni valore reale della variabile $x$, il cui modulo ammetta un limite superiore finito e generalmente continua in ogni intervallo finito con sole discontinuità di prima specie, esistono innumerevoli modi per costruire un'espressione $C^{(m)}(x)$, ordinata secondo le potenze intere e positive di $x$, aventi un massimo esponente $m$ finito, e tale che la differenza:*

$$C^{(m)}(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

*sia in valore assoluto minore di una quantità $\sigma$, piccola quanto si vuole, per tutti i punti compresi in un intervallo finito $(x_1 \ldots x_2)$, prefissato a piacere.*

*I coefficienti sono funzioni di $t$, variabile con $x$ nello stesso intervallo $(x_1 \ldots x_2)$, le quali hanno un valore costante quando $t$ varia in un tratto tra due punti consecutivi di discontinuità.*

Notiamo in ultimo che i teoremi A, B, C si estendono facilmente alle funzioni reali di due variabili reali.

---

## Relazione sulla Memoria del Dott. A. Cesaris-Demel, intitolata:

### *Sull'azione tossica e settica di alcuni microorganismi patogeni sul sistema nervoso centrale.*

L'autore, affermata l'importanza che lo studio batteriologico e sperimentale ha sulla patologia del sistema nervoso centrale, descrive un caso di corea, cui fa seguire il resoconto di numerose osservazioni istologiche e di ricerche sperimentali. Il caso era in istretto rapporto causale collo stafilococco piogene aureo,

il quale si trovò nel cervello allo stato di assoluta purezza. All'esame istologico dei centri nervosi si sono trovati molti focolai puntiformi d'infiammazione, costituenti una vera encefalomielite micotica a nidi disseminati. Col metodo di Nissel, l'A. trovò delle lesioni degenerative di alcune cellule nervose in rapporto coll'elemento tossico dell'infezione stessa. L'A. ha trovato che la porta d'ingresso dell'elemento infettivo furono le tonsille, e rileva che in altri casi descritti di infezioni stafilococciche nell'uomo, seguite da lesioni nutrizie degli elementi nervosi, non si sono riscontrati mai i piccoli focolai infiammatori, come in questo caso di corea.

Questo è il contenuto esposto sommariamente della 1ª parte del lavoro. Nella 2ª parte, l'A. riassunto lo stato delle nostre cognizioni sullo stafilococco e sulle sue tossine, dimostra che queste hanno un'importanza maggiore di quel che è generalmente ammesso.

L'A. ottenne la riproduzione quasi esatta del quadro sintomatico della corea nel coniglio, facendogli una iniezione subdurale di 1 c. c. di stafilococco. Indi ha dimostrato che l'identico risultato si può ottenere colle colture sterilizzate mediante etere o cloroformio. L'iniezione subdurale di dosi non mortali di tossine o di coltura, pure determinando una sindrome coreica gravissima, può tuttavia essere tollerata dal coniglio, il quale, superati i sintomi morbosi, offre un esempio di perfetta immunità locale del sistema nervoso di fronte a dosi mortali di colture o di tossine.

Esperimenti fatti coll' iniezione subdurale di altri microorganismi, quali il diplococco lanceolato e il bacillo itterode, dimostrano che gli animali soccombono per l' introduzione di minime dosi dei detti bacteri senza presentare sintomi coreici, sibbene morendo con sintomi paralitici.

Con altri esperimenti l'A. ha dimostrato che l'azione tossica dello stafilococco non viene neutralizzata dall' emulsione di sostanza nervosa fresca.

L'A. ha riprodotto anche nel coniglio i molteplici focolai infiammatori che ha descritto nel cervello dell'uomo, ottenendo anche più intensamente le alterazioni delle cellule nervose, e ciò coll'iniezione subdurale di colture stafilococciche. Le lesioni delle cellule nervose le ottenne identiche anche iniettando sotto

la dura madre dei fermenti solubili, onde ritiene che esse sieno il prodotto di digestioni cellulari.

L'A. conclude per l'origine infettiva di tutti i casi di corea, e per lo più, da stafilococco piogene aureo, col quale si può riprodurre negli animali il quadro fenomenico della malattia.

Attesa l'importanza degli argomenti trattati e dei risultati ottenuti dall'autore, i sottoscritti propongono la stampa della memoria.

G. Bizzozero.

Pio Foà, *relatore.*

---

## Relazione sulla Memoria del Dott. G. B. Rizzo, intitolata:

## *Sopra le recenti misure della costante solare.*

L'A. mostra anzi tutto quali divergenze esistano fra i valori trovati per la costante solare da osservatori valenti e degni di fede. Queste divergenze non dipendono dalla difficoltà delle misure, ma dalla diversità e dalla insufficienza dei metodi seguiti nel calcolo delle osservazioni.

L'A. distingue le formole, dalle quali si deduce la costante solare, in formule di inclinazione e formole di altitudine.

Le prime dànno l'intensità della radiazione solare osservata in un medesimo luogo in ore diverse, esprimono quindi quella intensità in funzione della distanza zenitale. Le seconde dànno le intensità della radiazione solare osservate simultaneamente in luoghi posti a diversa altezza sul livello del mare.

L'A. considera successivamente le varie formule dette di inclinazione, e mostra che nessuna di queste può servire a calcolare la costante solare.

Egli passa poi in rivista le osservazioni del Forbes, del Soret, del Violle e del Langley, e i metodi seguiti per calcolarle. L'A. stesso fece una serie di determinazioni simultanee

a diverse altezze sul Rocciamelone. Egli propone una formola della forma

$$Q = A + B (760 - P)^{\frac{1}{2}}$$

dove Q è l'intensità della radiazione solare, e P è la pressione atmosferica espressa in millimetri.

Applicando la formula alle osservazioni del Violle si ha il valore 2,82 per la costante solare. In modo simile dalle osservazioni del Langley si ottiene 2,42; le osservazioni fatte dall'A. stesso lo conducono a concludere che quella costante è eguale a 2,5. In generale il valore più probabile, quale risulta dall'esame delle migliori determinazioni, sarebbe compreso tra 2,5 e 2,6.

Le osservazioni del Langley sono particolarmente importanti perchè a due altezze diverse il Langley determinò col bolometro l'intensità delle varie radiazioni dello spettro. Con i risultati di queste esperienze il Rizzo calcolò per ciascuna stazione e per valori diversi di $\lambda$ (0,35 $\mu$, 0,375 $\mu$, 0,400 $\mu$, 0,450 $\mu$, 0,500 $\mu$, 0,600 $\mu$, 0,700 $\mu$, 0,800 $\mu$, 1,000 $\mu$, 1,200 $\mu$) una formola della forma

$$Q = \frac{A}{(1 + \epsilon)^b}.$$

Da queste formule dedusse il Rizzo l'intensità della radiazione allo zenit in ciascuna stazione e di qui poi con una formula del tipo

$$Q_1 = A + B (760 - P)^{\frac{1}{2}}$$

calcolò per i varii valori di $\lambda$ l'intensità della radiazione al limite dell'atmosfera. Egli ottenne così la forma probabile della curva che dà la distribuzione dell'energia solare al limite dell'atmosfera. Questa curva si allontana notevolmente da quella segnata dal Langley.

Il Rizzo discute poi le osservazioni sulla distribuzione dell'energia nello spettro solare fatte dal Langley ad Allegheny ed esamina quali parti dello spettro solare vengano trattenute dai gas dell'atmosfera e in particolare dal vapor acqueo e dall'anidride carbonica.

Dalle considerazioni che l'A. fa intorno alla curva del Lan-

gley e agli spettri d'assorbimento dell'ossigeno, del vapor d'acqua e dell'anidride carbonica, risulterebbe che questi gas non possono aver grande influenza nell'attenuazione dell'intensità dei raggi solari che attraversano l'atmosfera. Invece il pulviscolo atmosferico e il vapor d'acqua, se condensato in globuli, potrebbero avervi gran parte.

Come risulta da questi cenni, il Dr Rizzo raccoglie e compendia in questa memoria i lavori più importanti sopra la costante solare, li discute e applicandovi criteri suoi proprii, ne trae il valore che egli stima più probabile della costante medesima. La sua memoria costituisce un'utile contribuzione allo studio di questo importante argomento e noi per ciò proponiamo che la memoria venga letta alla Classe.

A. Naccari, *Relatore.*
Vito Volterra.

---

*L'Accademico Segretario*
Andrea Naccari.

# CLASSI UNITE

## Adunanza del 26 Giugno 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

Della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Cossa, Vice Presidente dell'Accademia, Bizzozero, Direttore della Classe, D'Ovidio, Naccari, Mosso, Camerano, Segre, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti;

Della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Claretta, Direttore della Classe, Peyron, Bollati di Saint-Pierre, Ferrero, Cognetti de Martiis, Graf, Cipolla, Brusa, Perrero e Nani, Segretario. Scusa la sua assenza il Socio Pezzi.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della precedente seduta, 24 aprile 1898.

Quindi il Presidente dà comunicazione della lettera Ministeriale, in data 12 corrente giugno, colla quale furono inviati gli estratti del R. Decreto di approvazione delle conferme del Socio Prof. Cossa a Vice-Presidente e del Socio D'Ovidio a Tesoriere dell'Accademia.

Il Socio Segretario Nani legge la relazione della Commissione pel conferimento dei due premi della Fondazione Gautieri riservati in quest'anno alle scienze storiche per i lavori pubblicati durante gli anni 1891-1897. Conforme alle proposte della Commissione i due premi vengono conferiti, l'uno al Conte Pier Desiderio Pasolini, Senatore del Regno, per la sua opera: *Caterina Sforza* (Roma, 1893-97, 4 vol. in 8°) e l'altro al Profes-

sore Ettore Pais della R. Università di Pisa per la sua opera: *Storia della Sicilia e della Magna Grecia* (Torino, 1894, 8°).

Scadendo per compiuto triennio il Socio G. Bizzozero dall'ufficio di rappresentante l'Accademia nella Commissione Amministrativa del Consorzio Universitario, si procede ad una nuova elezione, e viene riconfermato per un nuovo triennio il Socio Bizzozero.

---

## *Relazione della Commissione per il conferimento dei premii della fondazione Gautieri.*

Onorevoli Colleghi,

Per una seconda volta la Commissione eletta pel conferimento dei premi Gautieri, e di cui fanno parte, oltre al Presidente dell'Accademia ed al relatore, i socii B. Peyron, G. Claretta, E. Ferrero, A. Graf ed E. Brusa, per mezzo mio brevemente vi riferisce i risultamenti delle sue indagini, i suoi giudizii e le sue proposte.

Debbono in quest'anno, come è noto, due premii essere assegnati alle migliori opere di storia politica e civile pubblicate nell' intervallo fra gli anni 1891 e 1897, di autori italiani e scritti in italiano: esclusi però i membri nazionali residenti e non residenti di quest'Accademia.

Molti autori mandarono spontaneamente un esemplare dei loro lavori; dei colleghi richiesti del loro parere più d'uno rispose all'appello e fu largo di suggerimenti e di consigli onde la Commissione è loro particolarmente grata; fu fatto uno spoglio accurato degli indici bibliografici e delle più reputate riviste storiche italiane ed estere. Si potè per tal guisa raccogliere un numero ragguardevole di indicazioni relative ad opere pubblicate dentro il periodo sopra accennato. Necessario quindi fu di eliminarne parecchie, per restringere l'esame ed il confronto a quelle che, oltre a distinguersi per maggior valore ed importanza scientifica, paressero anche meglio rispondere agli scopi pei quali il premio venne instituito. Con molta circospezione, ma non senza una tal esitanza, in più casi, e quasi a malincuore, compiè la Commissione questo lavoro di selezione, poichè tra le opere che si dovettero posporre erano

storie municipali e biografie sotto un certo rispetto pregevolissime; lavori, di cui pur essendo l'intento principalmente scolastico, hanno tuttavia, per l'eccellenza del loro contenuto, una importanza scientifica che va al di là di quel confine alquanto angusto; scritti di autori insigni, i quali però non costituiscono che una parte assai piccola d'opere di gran mole; pubblicazioni, assai lodevoli, di documenti, che per la natura loro non potevano, sì come parve alla Commissione, aspirare al premio; ed opere, infine, per un motivo o per un altro commendevolissime.

Conseguentemente furono prese in considerazione soltanto le opere di questi quindici autori:

1. **Bersezio Vittorio.**
2. **Del Vecchio Alberto** e **Casanova Eugenio.**
3. **Faldella Giovanni.**
4. **Gabotto Ferdinando.**
5. **Gioda Carlo.**
6. **Manfroni Camillo.**
7. **Merkel Carlo.**
8. **Nitti Francesco.**
9. **Pais Ettore.**
10. **Pasolini Pier Desiderio.**
11. **Professione Alfonso.**
12. **Raulich Italo.**
13. **Santini Pietro.**
14. **Schipa Michelangelo.**
15. **Tivaroni Carlo.**

1. Dell'opera poderosa di V. Bersezio " *Il Regno di Vittorio Emanuele. Trent'anni di vita italiana.* Torino, 1889-95 ", non fu possibile alla Commissione tener conto che dei tre ultimi volumi sopra gli otto di cui consta, perchè i cinque precedenti furono pubblicati in epoca anteriore a quella in cui cominciò a decorrere il termine utile pel conferimento del premio. Per tal modo fu sottratta al suo esame la maggiore e forse anche la miglior parte del lavoro.

La narrazione negli ultimi tre volumi va dal 1852 al principio del 1878, mentre non comprendeva negli altri cinque prima pubblicati che un periodo di quattro anni.

Unanime fu il giudizio della Commissione nel riconoscere l'importanza di questa storia, frutto di lunghe ed assidue fatiche; l'alta rettitudine d'intendimenti che vi si rivela ad ogni pagina, e l'arte squisita con cui vi sono tratteggiati e dipinti e uomini e tempi. Onde, per questo rispetto, l'opera degna è veramente del suo Autore che è, per comune consenso, uno dei più illustri e benemeriti che vanti la nostra odierna letteratura.

Ed altri e maggiori pregi, tenuto conto principalmente dell'indole e della vastità del lavoro, vi riscontravano alcuni dei Commissarii, giudicandolo insigne anche tra i migliori. Al qual parere per verità non potè intieramente associarsi la maggioranza della Commissione, avendo essa dovuto avvertire una evidente sproporzione nelle parti onde l'opera si compone, ed una tal fretta qua e là nella compilazione, di cui talora è rimasta la traccia e nella esposizione dei fatti e nei giudizii; oltre a qualche difetto di metodo, condonabile forse da chi pensi che il rigore delle indagini più difficilmente può pretendersi nella storia contemporanea, che non in quella delle età più remote.

2. Notevole per ogni riguardo il volume che col titolo " *Le rappresaglie nei Comuni italiani e specialmente in Firenze* ", pubblicavano nel 1894 il prof. A. Del Vecchio ed il dott. E. Casanova. Degna di lode infatti, così per l'ampiezza della esposizione, come per la novità dei risultati quella parte dell'opera in cui con somma accuratezza si espongono la storia delle rappresaglie ed i modi con cui queste si svolgevano; ed interessante la raccolta di documenti, benchè non tutti inediti, che giova mirabilmente ad illustrare lo svolgimento dell'istituto in Firenze. Se anche meno perfetta voglia ravvisarsi la distribuzione delle materie, e qualche lacuna o qualche menda possa essere notata nella trattazione del tema, non però ne rimane di molto scemato il pregio del lavoro, che nel suo complesso giustifica appieno il plauso con cui venne accolto.

3. Del Senatore G. Faldella la Commissione tolse in esame l'opera " *I fratelli Ruffini. Storia della Giovane Italia nel 1833*. Torino, 1897 ", un'opera scritta con sentimento d'artista e con cuore di patriota. Abbondanti, ed inedite talora, le notizie che essa contiene, raccolte da varie fonti con paziente cura e con

intelletto d'amore; vivo l'interesse che desta nell'animo del lettore la descrizione, mirabile d'efficacia, di quei casi gravi e luttuosi; manifesto il proposito dell'Autore di ricercare e dir sempre francamente il vero. Nuoce forse alquanto al valore dell'opera la forma colorita di soverchio ed esuberante, certo più che alla severità di una narrazione storica non si convenga, e, più ancora, la deficiente coesione fra le parti del lavoro, che, pubblicate separatamente prima di essere riunite insieme in un volume, troppo ancora serbano l'aspetto di monografie e di conferenze, togliendo al tutto quell'unità e collegamento armonico delle singole divisioni, necessarii in ogni opera storica.

4. Della meravigliosa fecondità letteraria del Prof. F. Gabotto fa fede una grandissima quantità di scritti in breve giro d'anni da lui pubblicati. Di questi alcuni di maggior mole, altri parecchi disseminati nelle riviste italiane e straniere; senza dire degli articoli di minor conto con larghissima mano profusi in periodici ed effemeridi letterarie. Di fronte a così gran mole di pubblicazioni vien fatto naturalmente di domandarsi se la celerità con cui esse si succedono e quasi si incalzano non debba, per la stessa necessità delle cose, tornare a discapito della severità della ricerca, della matura disamina dei risultati, della ponderatezza dei giudizii e delle conclusioni.

Questa considerazione si affacciò spontanea alla Commissione allorchè, trascegliendo fra gli scritti del Gabotto, ebbe a fermare la sua attenzione su quattro di essi che anche nell'opinione dell'Autore debbono eccellere sopra gli altri, cioè " *Storia del Piemonte nella prima metà del secolo XIV.* Torino, 1894. „ — " *L'età del Conte Verde in Piemonte.* Torino, 1895. „ — " *Documenti inediti sulla storia del Piemonte al tempo degli ultimi Principi d'Acaia.* Torino, 1896. „ — " *Gli ultimi Principi d'Acaia e la politica subalpina dal 1383 al 1407.* Pinerolo, 1897. „ — Ed appunto dal diligente esame che la Commissione ha fatto di questi lavori, tutti, qual più qual meno, pregevoli, essa fu condotta a concludere che se degna di encomio è l'attività scientifica del Gabotto, e l'ardore con cui investiga e fruga negli Archivii per trarne alla luce i documenti più riposti, e la brama di percorrere e segnare colla sua orma anche i campi più inesplorati, maggior lode senza dubbio conseguirebbero i suoi scritti

qualora più calma vi apparisse l'indagine, più meditata l'elaborazione del materiale raccolto, più attento nell'ordinare e nell'esporre i fatti il magistero dell'arte.

5. Non nuovo alle scienze storiche è il C. Gioda, che in queste per lo appunto, per alcuni suoi lavori, si acquistò fama non immeritata.

Nel periodo utile pel conferimento del premio cade l'opera sua " *La vita e le opere di Giovanni Botero*, 3 vol. Milano, 1895 „. La Commissione ebbe a notarvi non pochi pregi in quella parte in cui con ricchezza di particolari, per quanto in gran parte già conosciuti, sono narrate le vicende della vita del Botero. Accurato e fedele le parve il riassunto che delle opere del Botero fece nella seconda parte del suo lavoro il Gioda, illustrandole con sagaci osservazioni; ed interessante la riproduzione della *quinta parte delle osservazioni universali*, inserite in fine dell'opera; ma fu pure d'avviso che questa, per la natura degli argomenti di cui principalmente discorre, sfuggisse in troppo gran parte al suo esame ed al suo giudizio.

6. Rilevanti sono parecchi lavori del Prof. G. Manfroni; rilevantissimo fra tutti l'ultimo " *Storia della marina italiana dalla caduta di Costantinopoli alla battaglia di Lepanto*. Roma, 1897 „. È questa la prima parte di un'opera di lunga lena a cui l'Autore attende da più anni e che abbraccierà, quando sia completa, tutta la storia della marineria italiana dal 496 fino ai giorni nostri. Profonda è la conoscenza che egli vi dimostra della storia politica nonchè delle fonti; e diligenti vi appaiono le ricerche negli Archivii. Con minor perizia invece vi si tratta degli ordinamenti marinareschi e delle operazioni militari marittime, essendo i primi, sopratutto, descritti con brevità soverchia, mentre avrebbero potuto, senza dubbio, fornir materia di ampia ed originale esposizione.

7. L'opera del Prof. C. Merkel, " *Adelaide di Savoia Elettrice di Baviera*. Torino, 1892 „, dai più competenti fu giudicata meritevole di molta lode, sia per la minuta e sottile analisi psicologica con cui l'Autore vi studia il carattere della Elettrice, sia per la copia dei nuovi documenti di cui si vale, sia ancora

per l'acume che vi spiega nell'esaminare le condizioni politiche dell' Europa, in quella parte, almeno, che più direttamente si riferiva al suo soggetto. Perciò in questa sua opera il Merkel non soltanto ha radunato un prezioso materiale, ma ancora ha saputo giovarsene con discernimento e sano criterio, contribuendo così a porre nella sua giusta luce la figura della Principessa. Qualche appunto, non del tutto infondato, potrebbe tuttavia farsi intorno alla distribuzione delle parti dell'opera, e potrebbe fors'anche taluno dubitare se pari alla cura ed alla diligenza con cui venne trattato sia l'importanza del tema.

8. Un vecchio argomento è certo quello che F. Nitti ha svolto nel suo volume " *Leone X e la sua politica secondo documenti e carteggi inediti*. Firenze, 1892 ", nè perciò può dirsi che esso torni inutile. Esso giova anzi a far viemeglio conoscere la mente, gli intendimenti, i costumi di quel famoso Pontefice e merita un luogo onorato accanto alle migliori pubblicazioni di tal genere. Infatti l'Autore con una esposizione, se non elegante, chiara bensì ed ordinata e che si distingue non meno per acutezza che per imparzialità di giudizio, narra per disteso le vicende della politica di Leon X, alle notizie già conosciute, attinte ad una varia e copiosa letteratura, aggiungendone di nuove con attento studio desunte da numerosi documenti già editi oltre che da inediti, tratti principalmente dall'archivio di Stato di Firenze. Non vi ha dubbio che per le dotte fatiche dell'Autore più completa riesca la figura storica di quel Papa, benchè forse una menda dell'opera possa ravvisarsi in ciò che essa mira, seguendo una tendenza diametralmente opposta a quella prima prevalente, a deprimere alquanto più del giusto la memoria di Leon X.

9. Dell'opera di E. Pais " *Storia d'Italia dai tempi più antichi sino alle guerre puniche*. Torino, 1894 " non potè la Commissione occuparsi che del primo volume, essendo stato pubblicato il secondo nel corrente anno.

Quel volume, che è consacrato alla storia della Sicilia, contiene cinque capi e sedici appendici, delle quali più d'una assume importanza monografica. Ed anche preso da solo parve alla Commissione che esso costituisse veramente un'opera d'alto

valore scientifico, concepita con larghezza di vedute e sorretta da una piena conoscenza di tutte le fonti latine e greche che in qualsiasi modo possano avere relazione col tema; frutto di profondi studi ed indagini condotte con rara indipendenza ed originalità di criterii e di conclusioni. Queste ultime sarebbe qui impossibile riassumere, neanche per sommi capi; basterà solo rilevare che l'Autore non si stette pago a discorrere (secondo apparirebbe dal titolo dell'opera) dell'antichissima storia di Sicilia, ma estese le sue ricerche anche all' Italia inferiore, e perfino, quando la natura dell'argomento lo consigliava, all' Italia media e superiore. Segue del resto il Pais il metodo storico preferito dal Mommsen: si fonda, cioè, quasi unicamente sulla testimonianza degli scrittori, assai parcamente ricorrendo ad altri mezzi. Quindi poco si occupa delle questioni archeologiche, meno ancora delle etnografiche. Il qual metodo non a tutti forse potrà piacere ugualmente; ma, checchè sia di ciò, singolar lode ed incoraggiamento merita certo l'Autore che con adatta preparazione ha arditamente affrontato un così arduo tema e l'ha svolto, nella prima sua parte, in maniera siffatta da dar buon affidamento per la riuscita della intera opera. Sicuramente non fanno difetto al Pais nè l'ingegno robusto ed originale, nè la lena, nè la dottrina, nè il fine acume critico, ottima dote, se per vaghezza di novità non ne abusi, dello storico.

10. Alti e meritati encomii riscosse, fin dal suo primo apparire, dalla critica italiana e straniera la pubblicazione del Senatore C.te P. D. Pasolini " *Caterina Sforza.* Roma 1893. „ — " *Nuovi documenti.* Bologna, 1897 „. Giudici gravi ed autorevoli non dubitarono di segnalarla come una delle più importanti fra quante videro la luce in Italia in questi ultimi decennii. L'opera invero, largamente illustrata da un ingente numero di documenti tratti da molti Archivii pubblici e privati d'Italia e dell'estero, condotta con metodo severamente scientifico, scritta con chiarezza, con eleganza e con ordine, non solo ritrae al vivo il carattere ed i casi della eroina del racconto, ma ancora lumeggia in mirabil modo l'ambiente in cui ella visse ed agì. La monografia è completa in ogni sua parte; e se anche si voglia ritenere superfluo qualche particolare, non del tutto esatto ogni

giudizio, non ugualmente provato ogni asserto, è pur sempre con un senso di ammirazione che si leggono queste pagine in cui, evocati dall'Autore, rivivono innanzi a noi colle loro grandezze, colle loro passioni, coi loro vizi due secoli dei più fulgidi della nostra storia civile.

11. Del Prof. A. Professione sono favorevolmente noti alcuni lavori, taluno dei quali d'indole scolastica. Fra quelli si raccomandava in particolar modo all'attenzione della Commissione la memoria intitolata " *Il ministero in Spagna ed il processo del Cardinale Giulio Alberoni.* Torino, 1897 ", un lavoro che è il risultato di accurate e faticose ricerche fatte in parecchie biblioteche ed archivii italiani e stranieri.

Egli è col sussidio di un così ricco materiale che il Professione potè in questa interessante monografia chiarir meglio certi fatti, svelare, fino nei dettagli, l'orditura dei tanti negoziati cui pose mano l'Alberoni, ricostruire insomma per intiero quel breve periodo storico, nel quale, in confronto alle altre, campeggiano, insieme con quella del protagonista, le figure di Filippo V e di Elisabetta Farnese.

12. Nell'opera del Prof. I. Raulich, di cui non venne però finora pubblicato che il primo volume " *Storia di Carlo Emanuele I, Duca di Savoia, con documenti degli archivi italiani e stranieri.* Milano, 1896 ", credette la Commissione di scorgere pregi e difetti non pochi nè lievi.

Attraente alla lettura, essa è il risultato di larghi spogli fatti negli Archivii di Venezia, Torino, Roma, ecc., ed intende, con lodevole studio, a mettere in rilievo, meglio che non si sia fatto finora, la persona e l'opera del successore di E. Filiberto.

Lodevole studio certamente, ma non potrebbe affermarsi, in modo assoluto, che l'effetto in tutto sia stato raggiunto: poichè manchevole appare nel lavoro così la storia delle condizioni interne, come la critica delle fonti; trascurati vi sono i particolari riferentisi alla persona del Duca nella sua giovanezza, dei quali l'Archivio torinese avrebbe potuto fornire all'Autore non esigua materia; e se ampie, come si disse, furono le sue indagini, non si potrebbe altresì con uguale sicurezza affermare che dappertutto siano riuscite esaurienti.

13. Il Prof. P. Santini ha avuto il merito di radunare una gran quantità di documenti dell'Archivio fiorentino, che servono mirabilmente a far conoscere il governo dei Consoli e quello del Podestà in Firenze, e di pubblicarli in un grosso volume dal titolo " *Documenti dell'antica costituzione del Comune di Firenze.* Firenze, 1895 ". Sebbene vi manchi ogni illustrazione paleografica e diplomatica e le ricerche non siano state estese (come sarebbe stato opportuno) anche agli archivii di altre città toscane, tuttavia l'opera è pregevolissima per la diligenza con cui fu condotta. Alla collezione serve quasi di complemento uno studio dallo stesso Autore pubblicato nell'*Arch. storico italiano,* v. 16, 1895, sull'antica costituzione del Comune fiorentino. Non è questo che il principio od un saggio, se così lo si voglia appellare, di una serie di studi che l'Autore si proponeva di pubblicare in seguito; ma un buon saggio, ad ogni modo, che rivela nel Santini critica acuta e larga cognizione dell'argomento, e da cui può trarre conforto di nuovi argomenti quella dottrina (anche da altri professata), che i primi ordinamenti comunali vuol riannodare con alcuna delle istituzioni proprie dell'alto Medio Evo.

14. Eccellente, sotto un certo aspetto, può dirsi l'opera maggiore di M. Schipa " *Il Ducato di Napoli.* Napoli, 1895 ", dove ne sono narrate le vicende fino al 1140, fino all'epoca cioè in cui quello fu distrutto.

Largo infatti il disegno con cui la storia fu concepita; ben profilati gli avvenimenti e disposti con arte tanto più ammirevole quanto più complicato è il periodo storico in cui quelli si svolsero. Difettano per contro le ricerche originali, poichè tutta l'opera è basata sugli insigni *Monumenta Ducatus Neapolitani* e su altre scritture dell'illustre Capasso.

15. Di C. Tivaroni la Commissione ha preso in considerazione il lavoro " *Storia critica del Risorgimento italiano.* Torino, 1888-1896 ", giudicandolo un'opera commendevole ed utile del pari. Commendevole infatti la cura con cui l'Autore vi ha con pazienza non poca raccolti da moltissimi lavori, varii per carattere e per tendenze, una gran mole di fatti, di dati e perfino di giudizii, commendevole l'intento che l'Autore si è pre-

fisso di mantenersi sempre imparziale e sereno; ed utile sicuramente per ogni lettore il trovar contenuta in uno spazio relativamente breve una sì ricca copia di materiali. Ma d'altra parte siffatti materiali non sempre appaiono ben fusi insieme e padroneggiati dall'Autore; laonde di sotto a certe manifeste dissonanze ed a qualche ripetizione troppo spesso si svela nell'opera il carattere di una compilazione, per quanto coscienziosa e diligente.

Ora, se tutte queste opere indistintamente stimò la Commissione degne di elogio, suo preciso còmpito era pur quello di indicare quali degne fossero anche di premio. Un còmpito ingrato per verità e reso più arduo dal fatto che trattavasi di scegliere fra lavori d'indole disparata fra di loro, sicchè considerazioni di diversa natura, e tutte gravi e legittime, potevano persuadere a far pendere da un lato piuttosto che dall'altro la scelta.

La Commissione ritenne a questo riguardo, che meno facile fosse l'errare quando il proprio giudizio avesse a determinarsi, non solo dall'aver riscontrato in un dato lavoro pregi scientifici di valore indiscutibile, ma bensì ancora dall'importanza del tema trattato, dall'ampiezza della esposizione, dalla originalità delle indagini e severità del metodo. Sotto questo punto di vista essa fu unanime nel riconoscere che uno dei premii dovesse spettare all'opera su Caterina Sforza del Conte Pasolini. E degna pure di premio con voto unanime fu ritenuta l'opera del Prof. E. Pais " Storia di Sicilia „; sennonchè parve alla minoranza che tale premio fosse da dividere, conforme all'art. 6 del Regolamento per l'assegnazione del premio Gautieri, fra questa e l'altra di V. Bersezio, di cui sopra s'è detto. La maggioranza, pure altamente apprezzando quest'ultimo lavoro, non potè essere di tale avviso.

Pertanto la Commissione, colla sicura coscienza di avere quanto più scrupolosamente per lei si poteva adempiuto al mandato affidatole, ha l'onore, egregi Colleghi, di sottoporre al vostro sovrano giudizio la proposta, che dei due premi di fondazione Gautieri, stabiliti pel corrente anno, venga assegnato l'uno al Senatore Conte Pier Desiderio Pasolini, e l'altro al Prof. Ettore Pais.

# CLASSE

DI

# SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

## Adunanza del 26 Giugno 1898.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE CARLE

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Socii: Claretta, Direttore della Classe, Peyron, Bollati di Saint-Pierre, Ferrero, Cognetti de Martiis, Graf, Brusa, Perrero e Nani Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale della precedente seduta, 12 Giugno 1898.

Si comunica dal Presidente una lettera di ringraziamento del Socio corrispondente Prof. Francesco Schupfer, per la parte presa dall'Accademia alle onoranze resegli nella ricorrenza del suo 35° anno di insegnamento.

Il Segretario offre in omaggio un opuscolo del Socio corrispondente Vittorio Poggi, *Di una tavola dipinta nel secolo XI* (Savona, 1898); ed il Socio E. Ferrero un articolo del Socio corrispondente Aristide Marre inserito nella " Rivista „: *Notes, reconnaissances, explorations* (1^er^ vol., 6^me^ livr.).

Viene accolta per l'inserzione negli *Atti* una nota del Professore Carlo O. Zuretti, *Sofocle nelle Rane di Aristofane*, presentata dal Socio S. Cognetti de Martiis.

Quindi il Prof. Carlo Cantoni, della R. Università di Pavia e Socio corrispondente dell'Accademia, legge la Commemorazione, da lui scritta, per incarico avuto dalla Presidenza, del compianto Socio Domenico Berti.

Questa Commemorazione verrà pure pubblicata negli *Atti*.

# LETTURE

## DOMENICO BERTI

Commemorazione letta dal Socio corrispondente CARLO CANTONI.

Sono oramai passati molti anni, da che io ricevetti nell'Università torinese la laurea dottorale in filosofia. Vicende diverse mi trassero lontano di qui, dove io fui iniziato agli studii filosofici da G. M. Bertini, da Domenico Berti, da G. B. Rayneri, uomini che il Piemonte e l'Italia ricordano con affetto e venerazione; benchè non per tutti la gloria sia stata pari al merito, sicchè noi possiamo giustamente dolerci che per alcuno di essi non si sia avverato il detto antico *gloria sequitur nolentem*. — Ma se G. M. Bertini non ebbe gloria pari al merito suo, tutti gli scolari suoi conserveranno una perpetua riconoscenza verso di lui che col suo insegnamento e con tutta la personalità sua lasciò in noi un'impronta benefica e incancellabile. non solo per l' altezza dell' ingegno e la rara dottrina. ma per quel puro e ardente amore della verità, che appariva in ogni sua parola, e per quella sua stessa profonda e severa malinconia che eccitava insieme affetto e venerazione.

Meno grande del Bertini per vigore speculativo e critico. il Rayneri seppe però congiungere ad una non comune larghezza di cognizioni filosofiche e scientifiche un'istruzione compiuta nelle questioni pedagogiche che già prima del 1848 avevano cominciato ad agitare le menti in Piemonte. Così il Rayneri col suo insegnamento e coll'opera sua potè rendere non pochi benefizii alle scuole e concorrere efficacemente alla riforma degli studii. Ma il suo merito principale fu quello di formare in Piemonte una schiera di valenti educatori, di buoni direttori e capi d'istituti scolastici, in un tempo in cui si credeva ancora che la scienza

dell'educazione valesse a qualche cosa nell'educare; nè si pensava, come molti pensano oggi, in cui è pur tanto vantata l'importanza della scienza, che l'arte educativa e didattica richieda meno d'ogni altra in chi la deve praticare il possesso della scienza relativa.

Tra i primi suoi scolari il Rayneri ebbe Domenico Berti che, nato nel 1820, era il più giovane dei tre che ho menzionati e fu l'ultimo a mancare dopo una vita più lunga e più ricca di vicende, ma anche più avventurata. Mentre gli altri due si erano quasi intieramente consacrati allo studio ed all'insegnamento, il Berti ci si presenta ne' suoi molteplici aspetti di storico, letterato, filosofo, insegnante, uomo politico e ministro. Egli appartiene così a quella schiera di uomini che seppero congiungere la trattazione e l'esercizio dei pubblici negozii cogli studii più severi, uomini di cui l'Italia porge splendidi esempi in ogni periodo di libertà. Ma più numerosi che in tutte le altre parti di essa sorsero, durante la prima metà di questo secolo, in Piemonte; e mi basterà ricordare insieme al nome del Berti quelli anche più celebri del Gioberti, del Balbo, del D'Azeglio; che se la schiera di tali uomini va ora sempre più assottigliandosi, forse ciò viene da che la politica odierna è meno adatta all'indole scientifica.

Uomo politico e giunto nella vita pubblica agli onori ed agli uffici supremi, il Berti ebbe già del suo vivente biografie ed apologie che certo io non ripeterò; poco si disse de' suoi meriti scientifici e filosofici e son quelli invece che in questo luogo debbono essere rammentati, ed io farò quanto sta in me per rammentarli degnamente e corrispondere in qualche modo alla fiducia in me riposta da questa insigne Accademia nel darmene il grave incarico; ma nell'adempierlo io non potrò lasciare totalmente in disparte l'uomo ed il politico, essendo nel Berti troppo intrecciato il pensiero e l'azione, perchè questa si possa scindere da quello.

Il nome di Domenico Berti è legato colle prime riforme introdotte nelle scuole del Piemonte, riforme che precedettero le politiche, si accompagnarono ad esse e le seguirono. Il Berti aveva appena compiuti i suoi studii universitarii, quando verso il 1846 l'Aporti venne in Piemonte, suscitandovi un grande entusiasmo per l'istituzione degli asili e delle scuole miranti

all'educazione ed all'istruzione del popolo; ed il Berti che, specialmente per l'impulso ricevuto dall'insegnamento del Rayneri, aveva già a quelle scuole rivolto il pensiero, prese viva parte a questo movimento e ad esso consacrò i primi anni della sua attività didattica e letteraria. Insegnò il *Metodo*, come allora si diceva, a Novara ed a Casal Monferrato, ed il suo insegnamento levò tanto grido, che uomini insigni, quali il Boncompagni e Cesare Alfieri si recarono appositamente a Novara per udirlo. Poco dopo, cioè nel 1849, egli pubblicava uno scritto intitolato *Del Metodo applicato all'insegnamento elementare*, libro che egli dedicò al suo maestro Rayneri e che, se non contiene concetti molto peregrini ed originali, ci è prova però del suo amore all'istruzione popolare e dell'ardore col quale si era dato a studiare tuttociò che la concerne.

Egli esamina in questo libro le varie dottrine che in quel tempo erano più in voga, quelle del Pestalozzi, dell'Aporti, del Rosmini, del Lambruschini, ecc. ; con uguale competenza e sicurezza si addentra nelle questioni teoriche e filosofiche, come nelle questioni più minute e più pratiche; riconosce giustamente come la pedagogia e la metodica si fondino sulla psicologia, e tenta di svolgere alcuni principii di questa per dimostrare tale fondamento; ma dobbiam riconoscere che non è la psicologia, ed in genere la filosofia pura e teoretica, quella in cui meglio si riveli l'ingegno e la dottrina del Berti; ciò che attira di più la sua mente è la filosofia nelle sue applicazioni e nelle sue manifestazioni storiche.

Ma egli non si arrestò all'istruzione popolare; colle nuove leggi che si andavano in quei primordii della nostra vita costituzionale proponendo e discutendo sorgeva la grave questione della libertà d'insegnamento, ed egli la discusse con profondità e indipendenza di pensiero in alcuni articoli pubblicati nel 1850 dalla *Rivista italiana* e dalla *Rivista contemporanea.*

Certo egli non sostiene una libertà assoluta d'insegnamento e vuole imporle certi freni e certe norme; ma in lui, col crescer degli anni, l'amore e la fede nella libertà, lungi dall'intiepidirsi, vennero sempre crescendo; benchè della libertà riprovasse vivamente gli abusi. In uno scritto intitolato *Della libertà d'insegnamento e della legge organica sull'insegnamento del 4 ottobre 1848* egli si dichiara sostanzialmente favorevole a questa legge, nella

quale era bensì sancita la libertà nella Chiesa e nei privati d'insegnare, ma con certe condizioni. Ecco i principii fondamentali propugnati dal Berti:

La Chiesa ha il diritto d'insegnare, perchè ne ha il dovere; lo Stato ha il diritto d' insegnare, perchè ne ha parimenti il dovere; e così il padre di famiglia, così il privato; ma anche questo diritto, come tutti i diritti astratti, dev'essere regolato nel suo esercizio; e la regola sono la giustizia ed il bene pubblico. " Noi " abbiamo bisogno „ scrive il Berti riassumendo le sue idee " che un insegnamento " libero, nazionale, tutelato " e diretto dal Governo, venga preparando gli animi ad un " miglior avvenire..... la Chiesa insegni nell' ordine suo, il " diritto nei padri di famiglia sia rispettato... lo Stato pro- " mova con ogni mezzo questa forte e nazionale educazione. Il " resto alla Provvidenza ed al tempo „.

Questa sua fiducia nella libertà si mostrò ancor più viva, quando il ministro Lanza, per prevenire i pericoli di un'istruzione reazionaria della gioventù nelle scuole medie, aveva proposta una legge che impediva ai giovani istruiti nei Seminarii di presentarsi agli esami pubblici per poter proseguire nelle carriere laiche. In due lettere del dicembre 1855 e gennaio 1856 indirizzate al Boncompagni, allora presidente della Camera, il Berti combatte le proposte del Lanza; perchè egli voleva che si riconoscessero come validi per entrare nell' Università gli studii comunque fatti, cioè nelle scuole pubbliche o private, nei Seminarii o nella scuola paterna, purchè i giovani provassero con buoni e severi esami di aver acquistata l'istruzione sufficiente; perciò il Berti sostiene " doversi abolire tutti quei " provvedimenti che vincolano la libertà dei padri di famiglia, " dei privati e dei Comuni e nuocciono così alla scienza come " all'educazione „.

Nè le idee che egli fin d'allora sosteneva dimenticò, quando fu chiamato al Ministero di Pubblica Istruzione; e coll'intento di rinforzare gli studii senza sopprimere la libertà, egli istituì appunto nel 1877 gli esami di licenza liceale.

A questa fede nella libertà il Berti non s'inspirò soltanto nel trattare le questioni sulla pubblica istruzione, ma anche le politiche e le sociali alle quali ben presto fu tratto da una naturale inclinazione. Una delle prime, alla quale egli

rivolse con molto fervore la sua attenzione, concerne un punto fondamentale dei Governi liberi, cioè il sistema elettorale. Egli ne trattò in una rivista da lui stesso fondata, il primo periodico italiano a fascicoli, com'egli dice, che si occupasse di politica, la *Rivista Italiana*: e fin d'allora manifestò un'idea alla quale rimase sempre fedele, quella cioè che non si può dare il suffragio soltanto alle classi abbienti, ma che esso va esteso anche alle classi popolari. Quand'egli quindi si staccò dalla Destra, a cui apparteneva, nel sostenere il progetto Zanardelli per l'allargamento del suffragio elettorale, non faceva un'apostasia, come gli fu rimproverato, ma restava fedele ad una sua antica convinzione, com'egli stesso dimostrava nel suo scritto molto posteriore che ha per titolo: *Le classi lavoratrici ed il Parlamento* (1855). — Ma insieme all'allargamento del suffragio egli voleva anche come necessario accompagnamento una riforma per la quale fossero alleggeriti gli aggravii alle classi bisognose. La tendenza a favorire queste, a sollevarle coll'istruzione e alleviarne i mali e le strettezze con dei provvedimenti sociali si mostra già chiarissima nei primordii della vita politica del Berti; e questa tendenza lo condurrà poi assai più tardi, quando sarà fatto ministro di Agricoltura e Commercio, a disegnare pel primo in Italia una legislazione sociale che, sebbene con troppo stento ed incertezza, pur si viene attuando.

Poco tempo dopo, nel 1850, il Berti affrontò un'altra questione ancor più ardua in uno scritto che ha la modesta apparenza di una rassegna bibliografica, e che alzò in quel tempo molto grido: voglio dire l'articolo pubblicato nella *Rivista Italiana* e riprodotto poi negli *Scritti varii* sul libro di Luigi Carlo Farini: *Lo Stato Romano*. È mirabile in quell'articolo la sicurezza e la temperanza e insieme la libertà di pensiero, colle quali il Berti, assai giovane ancora, discusse una questione così grave e così complicata, come era allora la questione romana. Tra quelli da cui dissentiva, pur professando verso di loro la massima venerazione, egli nomina il Balbo, il Capponi, il Gioberti ed il Mamiani. Noi vogliamo dare un breve cenno del modo con cui egli risolveva il terribile problema, perchè ci farà conoscere le idee e i sentimenti del Berti sovra un punto importantissimo della vita degli individui e dei popoli, voglio dire sulla religione. Nel risolvere infatti la questione romana

il Berti non si restringe a considerazioni puramente politiche, ma, come si richiedeva in un filosofo e come era naturale inclinazione del suo spirito, egli tratta l'argomento specialmente sotto l'aspetto morale e religioso.

Le idee da lui esposte nel 1850 possono parere comuni oggi dopo tante pubblicazioni e tante e sì gravi vicende, ma esse conservano ancora la freschezza di una profonda e ragionata persuasione. Il Berti si dichiara risolutamente contrario anche in politica all'utilitarismo: i mali dell'Europa non sono, dic'egli, l'effetto del socialismo che si va diffondendo, ma derivano dall'egoismo e dalle dottrine utilitarie che lo giustificano. Come fondati essenzialmente sull'utilitarismo il Berti considera tanto quei governi assoluti che hanno per principio di *dominare colla forza e di corrompere col piacere* quanto il Gesuitismo. Il torto del Papato è di essersi dato in braccio a questo e alle dottrine utilitarie del Dispotismo, abbandonando le idee evangeliche, ai progressi delle quali si deve se l'Assolutismo non ha condotto l'Europa ad una nuova barbarie. Finchè il Papato seguirà il sistema utilitario e gesuitico, osserva il Berti, ogni conciliazione col liberalismo sarà impossibile; quando poi tornasse alle vere dottrine cattoliche, riconoscerà spontaneamente che non ha alcuna ragione di conservare il potere temporale. Nè si dica che questo è necessario per l'indipendenza del Papa, la quale è anzi in ragione inversa del suo dominio temporale. Il Berti dunque combatte non solo il potere temporale, ma tutta la politica papale, quella che il Gladstone chiamerà poi col nome di *Vaticanismo;* e la combatte non già per ostilità o per indifferenza verso la religione, ma per la causa stessa di questa. Egli anzi, seguendo in ciò il Gioberti di cui accettava non poche idee e in politica e in filosofia, non esita a dichiarare che dalla vera fede religiosa, come nemica dell'utilitarismo, l'Europa deve principalmente aspettare la sua salute; ma *la fede religiosa,* egli dice, *deve unirsi alla libertà, che è il grande elemento conservatore d'ogni umana associazione.*

In queste parole noi abbiamo il programma di tutta la vita politica del Berti e ad un tempo la spiegazione dei giudizii varii e contradditorii che furono dati sopra di lui. Coloro i quali considerano il liberalismo come la negazione d'ogni idea-

lità religiosa lo giudicavano un clericale; e in questo giudizio erano confermati anche dal riconoscere in lui una certa inclinazione al misticismo e il desiderio di trasfondere questo negli scolari e negli amici, conversando con loro, tantochè per celia, ma sempre in senso buono, alcuni lo chiamavano *fra Domenico*: anzi sembra che di questa sua naturale inclinazione desse qualche indizio anche alla Camera, poichè si narra che il Cavour, il quale di lui pur faceva una grande stima, esclamasse un giorno nell'udire un suo discorso: *ma qui si fa la predica*. Altri con maggior ragione, se non intieramente con ragione, chiamavano il Berti un radicale sia per il suo vivo attaccamento alla libertà, sia per le sue idee democratiche e per la mira costante che egli dimostrava ne' suoi scritti a promuovere l'educazione ed il miglioramento delle classi inferiori. In realtà egli era, per dirlo con linguaggio moderno, un conservatore democratico, avverso sinceramente alle dottrine che vogliono sconvolgere i fondamenti morali ed economici della moderna società, ma profondamente persuaso che tali fondamenti non possono star saldi senza la libertà ed una conveniente partecipazione delle stesse classi popolari alla cosa pubblica e l'accordo di queste colle altre classi.

L' ingegno e il sapere di cui aveva dato prova il Berti nelle sue pubblicazioni dovevano ben presto procurargli il dovuto compenso. Nel 1852 egli era nominato professore di filosofia morale in questa Università e poco dopo il collegio di Savigliano lo inviava al Parlamento. E così egli veniva gravato dai doveri di tre uffici diversi, quelli dell'uomo politico, dell'insegnante e dello scienziato, doveri che il Berti per molti anni adempì con uno zelo ed un'attività esemplari.

Il Berti insegnò successivamente la filosofia morale e la filosofia della Storia nell'Università di Torino e la Storia della filosofia in quella di Roma. Nei due primi insegnamenti, nei quali io ebbi la fortuna di essergli scolaro, egli non soleva seguire un metodo scolastico nè un ordine rigoroso; trattava liberamente di quegli argomenti a cui le sue particolari inclinazioni lo traevano, e dalle sue lezioni traspariva l'apostolo di un'idea. Però egli si dimostrò molto atto ad insegnare alcune parti della storia della filosofia, allo studio delle quali egli fu spinto dalle sue stesse tendenze mistiche: voglio dire quelle parti che abbracciano i periodi delle lotte e delle persecuzioni religiose.

perchè in essi più vivamente si manifesta il carattere e la forza delle dottrine e delle credenze religiose.

Cattolico e credente, desideroso anzi di diffondere intorno a sè la fede che lo animava, egli però la nutriva e professava a modo suo: non voleva una fede imposta, in ciò concorde col suo amico e collega venerato G. M. Bertini, di cui però non partecipava i dubbii angosciosi. Questo ci spiega il perchè, malgrado le sue credenze, egli nutrisse una grande simpatia per tutti i ribelli, per gli eretici, per i perseguitati. Da ciò i suoi studii amorosi sul Rinascimento italiano, su Giordano Bruno, su Campanella, su Galileo, su Pomponacci. Un altro sentimento però lo traeva a questi studii ed era il suo sentimento patriottico. Gli pareva che il Rinascimento fosse l'epoca più splendida per le lettere, la scienza, la civiltà del nostro paese, e nello studio di essa provava un'intima compiacenza. Splendida e calorosa è la descrizione che egli ce ne dà nella sua *Prolusione al Corso di Storia della filosofia* che egli lesse nel 1872 nell' Università di Roma. Come un vanto di quel tempo nota che in esso gli scienziati, i letterati, i filosofi, mentre attendevano agli studii, non aborrivano dalla pratica degli affari pubblici, e molti anzi si resero ugualmente segnalati per il loro valore letterario e per il politico. Lo studio di quei filosofi corrispondeva pienamente all'inclinazione del suo spirito; ciò che più lo attraeva era di esaminare una dottrina in relazione al carattere di un personaggio storico, e quella e questo in relazione co' suoi tempi. Ora, a soddisfare questa sua inclinazione era meravigliosamente adatto il nostro Rinascimento: quei filosofi non hanno importanza solamente per i loro scritti e per le loro dottrine, come i più dei filosofi posteriori, come Cartesio, Malebranche, Spinoza, Hume, Kant; la vita e specialmente la morte del Bruno, il processo di Galileo, la prigionia del Campanella sono fatti storici che eccitano l'interesse e l'attenzione dello studioso in grado non minore delle loro dottrine filosofiche o scientifiche.

Perciò il Berti, sebbene fosse perfettamente in grado di comprendere e penetrare le dottrine di quei pensatori, si rivolse piuttosto a determinare il posto e l'importanza che essi hanno nella storia. Per tal rispetto i numerosi lavori del Berti sul nostro Rinascimento portarono alla storia di questo un ricco contributo. Alla larga comprensione del soggetto egli

aggiungeva uno studio minuto e diligente dei particolari, una critica acuta ed imparziale, l'ardore nel ricercare nuovi documenti per schiarire, illustrare e rettificare i fatti.

Ma questa ricerca di documenti nuovi, che era stata inspirata al Berti dal suo amore del vero e quindi dal desiderio di andare al fondo dei fatti storici, specialmente di quelli più controversi o più oscuri, divenne in lui, com' egli stesso dice in una sua lettera al Gorresio, *una vera passione*: per raccoglier documenti nuovi *non so cosa farei*, scrive egli, *ma è altresì singolare che una volta raccolti e disposti li lascio giacere colla speranza di metterne insieme altri*. Perciò in molti lavori che egli aveva preparati si lasciò prevenire da altri storici. Ciò non ostante noi dobbiamo a quel suo amore di ricercare e pubblicare documenti nuovi dei lavori importanti; fra i quali è da mettersi per primo la sua *Vita di Giordano Bruno*, ch'egli pubblicò per la prima volta nel 1868, e di cui fece poi una 2ª edizione nel 1889 *notabilmente accresciuta*. È questa forse la migliore pubblicazione che il Berti abbia fatto sui filosofi del Rinascimento. È un lavoro compiuto, quanto alla vita del filosofo, al suo carattere, ai tempi in cui visse ed al posto che egli occupa nella storia. Il Berti segue il Bruno in tutte le peripezie della sua vita fortunosa, compulsando tutti i documenti che la riguardano, tra i quali sono importantissimi quelli che concernono la prigionia ed il processo subiti dal Bruno a Venezia e che furono pubblicati dal Berti stesso per la prima volta. Sono documenti che fanno conoscere il Bruno ed i suoi tempi meglio di qualsiasi illustrazione storica.

Di un altro infelice perseguitato si occupò amorosamente il Berti ne' suoi studii e nelle sue ricerche e fu Tommaso Campanella, del quale pubblicò un carteggio interessantissimo, ed in tre commoventi articoli, inseriti nella *Nuova Antologia*, narrò le dolorose vicende avute prima, durante e dopo il carcere.

Importanti per la storia di una grande questione scientifica ne' suoi rapporti colla religione e colla Chiesa sono le pubblicazioni del Berti relative a Copernico ed a Galileo.

Nel 1873 l'Università di Roma volle celebrare con una solenne commemorazione il IV centenario della nascita di Copernico e ne fu dato incarico al Berti, il quale fece uno splendido discorso che egli, dopo averlo ampliato e corredato, secondo

il suo costume, di nuovi ed importanti documenti, pubblicò nel 1876 col titolo: *Copernico e le vicende del sistema copernicano in Italia nella seconda metà del secolo XVI e nella prima del XVII.* Già in questo scritto appariva chiaro il vivo interesse che egli aveva preso alla storia e alle vicende di Galileo e al suo processo.

Nel suo scritto il Berti mette bene in chiaro quanto Copernico dovesse all'Italia, dove ebbe i suoi maestri ed i suoi precursori, non che il più grande seguace del suo sistema, Galileo. Venendo a parlare di questo in particolare, il Berti si studia di chiarire la questione, che in linguaggio moderno diremmo *pregiudiziale*, agitatasi nel processo fatto a Galileo tra lui ed i teologi che lo processavano. Galileo sosteneva che la questione concernente il moto della terra era una questione affatto estranea alla religione, e che non poteva sopra di essa invocarsi la testimonianza della Bibbia, la quale, secondo la sua massima, doveva esser tenuta fuori di tutte le ricerche e di tutte le dispute della scienza. Il Berti ci mostra assai bene con quanto coraggio e vigore Galileo sostenesse la dottrina copernicana contro i suoi giudici che volevano elevare a dogma la dottrina contraria, e con quanta chiaroveggenza egli li ammonisse dei gravi pericoli che facevano correre alla religione disconoscendo i diritti assoluti della scienza e arrogandosi la facoltà di decidere intorno a cose puramente scientifiche.

Prima ancora della Commemorazione di Copernico, anzi ancor prima del '70, il Berti si era occupato del Processo fatto a Galileo dal S. Ufficio di Roma, cercando di vedere e di esaminare gli atti originali. La cosa non poteva essere molto facile a lui, implicato nella politica; pure gli riuscì, e tra il 1869 ed il 1871 potè aver copia di importanti documenti inediti concernenti quel processo, ch'egli pubblicò nel 1876 in Roma col titolo: *Il Processo originale di Galileo Galilei pubblicato per la prima volta da Domenico Berti.* Questa pubblicazione suscitò vivaci polemiche che il Berti sostenne con molto vigore: il processo fu pubblicato da altri per intiero, ed il Berti, che nel frattempo aveva potuto riscontrare gli atti originali, fece su questi nel 1878 una nuova edizione del Processo *accresciuta e corretta.*

Il libro del Berti non contiene soltanto i documenti che concernono i due processi subiti da Galileo, ma ancora una

minuta narrazione dei fatti che precedettero il primo processo, terminato colla condanna di Copernico e coll'ammonizione fatta a Galileo nel 1616, ed il secondo, terminato colla condanna di Galileo nel 1633. In questo ed in altri scritti che concernono Galileo è da lodarsi la perfetta sincerità ed imparzialità del Berti. Egli stesso scrive giustamente a questo proposito in un articolo pubblicato dalla *Nuova Antologia*, che *la storia religiosa dev'essere scritta criticamente collo stesso metodo col quale si scrivono tutte le altre storie*; e di tale metodo ci dà qui uno splendido esempio poichè, malgrado la sua fede profondamente religiosa, non esita ad affermare " essere provatissimo " che non hanno valore storico o critico i molti scritti che si " pubblicarono ai nostri tempi colla pretensione di dimostrare " che il S. Ufficio non intese proibire la dottrina copernicana. " ma le idee teologiche con cui Galileo cercò di interpretarla „. Non è Galileo, soggiunge il Berti, che abbia giudicato di cose teologiche, ma sono i teologi che giudicarono di cose scientifiche; tantochè venne fatto a Galileo obbligo *speciale ed assoluto di non tenere o difendere in modo alcuno la dottrina copernicana, " ut prorsus tolleretur tam perniciosa doctrina „*.

E come è franco e risoluto nell'appurare e chiarire i fatti, così non lo è meno nel giudicarli. Mentre rileva la somma importanza degli scritti di Copernico e di Galileo intorno al moto della terra, tanto da affermare che essi hanno operato nella società umana un mutamento più profondo che non la scoperta del Nuovo Mondo e la stessa Riforma, egli osserva poi che la condanna inflitta a Galileo dal S. Ufficio tolse all'Italia, che più ne doveva godere, quasi tutti i benefici effetti di quegli scritti. Nel concludere la sua bella *Introduzione* storica al Processo di Galileo il Berti descrive con severe ma giuste parole i gravi danni prodotti all'Italia da quella condanna.

" L'Italia — scrive il Berti — dopo il meraviglioso periodo " di una civiltà vigorosa e tutta domestica del secolo decimo- " terzo, dopo il secondo periodo di una civiltà meno casalinga, " ma sua ancora, perchè latina, nel secolo decimoquinto, si " vide arrestata in sul principio di un terzo non meno splen- " dido periodo. Le vessazioni e le proibizioni scemarono ga- " gliardia e spontaneità e universalità alla nostra mente. lo " stile divenne incerto, indeterminato; ed interdetto il trattare

“ di governo, di scienza e di religione, ci volgemmo a cose fri-
“ vole e di poco conto.
“ Alle grandi accademie costituite coll' intento di rinno-
“ vare e promovere gli studî speculativi e di filosofia naturale,
“ sottentrano le piccole non aventi scopo di sorta. Ne scapi-
“ tarono la operosità intellettuale, l' amore per le ricerche e
“ per la verità obbiettiva, la grandezza dei sentimenti e la no-
“ biltà del carattere. Niuna cosa tanto nuoce ad un popolo
“ quanto l'obbligo di esprimere solo per metà il pensiero o di
“ velarlo.
“ La nazione in cui questa condizione di cose si avvera di-
“ viene intellettualmente inferiore alle nazioni cui è dato di
“ spaziare liberamente nelle vaste regioni dello scibile. La sua
“ coltura si fa ristretta, priva di originalità, vaporosa, ombra-
“ tile. Nascono abitudini servili e di dissimulazioni; scompaiono
“ i grandi libri, le grandi persone, i grandi propositi. Il che
“ spiega come dopo circa tre secoli la speculazione in Italia
“ provi ancora grandissima fatica a riaversi dal colpo con cui
“ fu percossa nella persona di Galileo „.

Queste parole ci mostrano come il Berti ne' suoi lunghi e diligenti studii sul processo di Galileo non fosse mosso soltanto dal desiderio di risolvere una questione storica, ma anche da un alto intento morale e civile.

Noi abbiam veduto come fin dal principio della sua carriera il Berti sia dominato dal pensiero di accordare la fede religiosa coll'amore della scienza e della patria. Però una delle condizioni principali di tale accordo è che la religione non sia d'ostacolo ai progressi del sapere, ammetta cioè la libertà della scienza. Ora, nessun fatto storico è più atto a dimostrare la necessità di tale condizione, i danni e pericoli gravissimi che sorgono mancando questa, quanto il processo di Galileo.

L'intento civile e morale del Berti appare ancor molto chiaramente negli scritti che non trattano un soggetto filosofico o scientifico, ma concernono la storia letteraria o politica. Su questi scritti non possiamo fermarci a lungo; ma non si avrebbe una chiara idea della grande e molteplice attività del Berti, se non dessimo un cenno anche di essi e specialmente de' più importanti, quali sono le due bellissime monografie su *Cesare Alfieri* (1877) e su *Cavour avanti il 1848* (1886) e gli scritti su Gioberti e Vittorio Alfieri.

In tutte queste pubblicazioni il Berti dà prova di conoscere mirabilmente la storia del Piemonte dal 1815 in poi e specialmente la storia della promulgazione dello Statuto, i precedenti e i primordii della nostra libertà. Le informazioni e i documenti che egli seppe raccogliere e pubblicare intorno alle vicende di quel tempo e ai personaggi che vi operarono, sono molto importanti e pieni d'interesse.

Ma, a parte il merito storico, un altro pregio più intrinseco va segnalato in questi scritti del Berti, ed è il profondo sentimento morale e l'amore vivissimo della patria, che da tutte quelle pagine traspirano. Egli è, al pari di Kant, penetrato dal pensiero che ciò che più vale e fa nel mondo è la forza del volere morale, da cui principalmente dipende ogni vera grandezza, sia scientifica, sia politica. Parlando dei meriti di Copernico e di Galileo egli dice che " l'esempio di questi due " uomini prova che la scienza è in gran parte opera morale " e che presso i varii popoli essa è in ragione del loro amore " per la verità „. Negli scritti sopra Vittorio Alfieri, sull'Ornato, su Cesare Alfieri, su Cavour mette sempre in rilievo l'importanza del volere. Mentre tanti storici e biografi si studiano di presentarci i fatti e gli avvenimenti come opera del fato o come prodotti di un meccanismo storico superiore alla volontà dell'uomo, il Berti mette sempre in gran rilievo il valore e la forza della volontà individuale. Egli ammira tale forza specialmente in Vittorio Alfieri ed in Camillo Cavour, e la monografia intorno a questo, nella quale egli ne lumeggia così bene il carattere e le vicende giovanili ed il modo con cui seppe prepararsi ai grandi fatti che lo attendevano, è dedicato dal Berti ai *giovani italiani*, perchè questi conoscano *i virili propositi, gli studii larghi e profondi di Camillo Cavour e la gagliarda educazione di sè stesso alla vita pubblica*.

La biografia su Cesare Alfieri, così pregevole per finezza di osservazioni psicologiche, per serenità di giudizii ed efficacia di stile, è tutta impregnata di alti concetti morali suggeriti all'autore tanto dal soggetto stesso quanto dal sentimento proprio. Splendido è il ritratto che il Berti ci fa di Cesare Alfieri e tale che onora l'uno e l'altro: " In quest'uomo — scrive il Berti " — vi ha perfetta armonia tra l'interno e l'esterno, tra il pen- " siero e l'opera. Nelle congiunture più difficili egli sta saldo

“ e sempre si dà a vedere sotto un solo aspetto. Retto nel giu-
“ dizio, puro negli intendimenti, osservatore della giustizia, mo-
“ desto, riservato, ad alta dignità di sentire unisce singolare
“ bontà d'animo. Ne' suoi affetti sono uguali il re ed il popolo.
“ Ama la libertà per istinto, per abitudine, per larga coltura...
“ In lui tutto era vero: modi, atti, parole, la stessa fisonomia
“ stava mallevadrice della verità del suo animo „.

A questa ben colorita descrizione il Berti aggiunge più innanzi un nuovo tratto e, cogliendo l'occasione per segnalare il carattere comune ai principali uomini politici del Piemonte in quel tempo e per ribadire il suo concetto morale, scrive: “ Ce-
“ sare Alfieri tutto inteso alla patria ed al principe non mirava
“ a guadagni come non vi miravano molti suoi illustri coetanei
“ che si segnalarono nel nostro Risorgimento. Forse da questa
“ virtù più che dall'ingegno trasse gagliardia il piccolo Pie-
“ monte, ed è per questa virtù, capace di esplicazione infinita,
“ che principe e stato trovarono sangue, danaro e nobiltà di
“ opere il giorno che procedettero concordi alla instaurazione
“ della gran patria italiana „.

E questa medesima virtù il Berti celebra con commoventi parole anche nel Gioberti, nello scritto dedicato a questo col titolo di *Vincenzo Gioberti riformatore politico e ministro*, nel quale alla franca parola con cui espone i difetti del grand'uomo, si accompagna l'ammirazione più viva per le singolari qualità del suo ingegno e del suo carattere e la venerazione più profonda per le sue virtù. Gioberti, dice il suo biografo, non fu e non sapeva essere un ministro costituzionale, non sapeva tollerare le opposizioni e fu spesso ingiusto nel giudicare de' suoi avversarii; ma egli fu un gran patriota, amò l'Italia sovra ogni cosa, per essa visse e pensò, e fu un uomo virtuoso. “ La sua vir-
“ tuosa parsimonia — scrive il Berti — e lo sprezzo del danaro
“ lo rendettero invincibile. E disse quel che volle, come volle
“ e quando volle. Allorchè cosiffatte virtù, le quali mantengono
“ gli uomini veramente liberi, vengono meno, essi sono obbli-
“ gati a servire mendicando sotto una forma od un'altra. Quanti
“ non sono mendichi in Italia! Medesimamente non curò gli
“ onori ed i titoli e si tenne lontano da ogni ombra di mac-
“ chinazioni e di raggiri. L'animo suo fu così alto che anche i
“ suoi più accaniti avversarii non ne mettono in dubbio l'inte-
“ grità ...

Ma in questo medesimo scritto il Berti difende francamente gli uomini di stato piemontesi che dopo l'infelice successo delle due guerre del '48 e del '49 tennero il governo di questo paese, e che dal Gioberti erano stati aspramente accusati di municipalismo e considerati come cagione principale della rovina d'Italia. Quest'accusa è falsa, dice il Berti, poichè " Tutti i Ministeri " del Vecchio Piemonte, nati sotto gli ordini costituzionali, in" cominciando da quello di Cesare Balbo che fu il primo e ter" minando con quello di Camillo Cavour che fu l'ultimo, si fecero " tutti propugnatori della politica nazionale ".

Questo scritto, come tutti quelli che trattano di cose e uomini piemontesi, ci mostra quanto vivo fosse nel Berti l'amore per il natìo Piemonte, amore che però nell'animo suo si accordava e fondeva con quello della patria comune. Così in quegli scritti ciò ch'egli cerca specialmente di far conoscere sono le relazioni varie del Piemonte coll'Italia, cioè tanto le relazioni politiche quanto le scientifiche e le letterarie. — Parlando dell'Alfieri, che, secondo l'affermazione del D'Azeglio, avrebbe rivelata l'Italia al Piemonte, osserva esser ancor più vero ch'egli aveva rivelato il Piemonte all'Italia. E a far meglio conoscere la parte avuta dal Piemonte nella letteratura italiana egli nell'Accademia della Crusca, di cui era membro, lesse nel 1879 un discorso molto interessante sugli *Accademici piemontesi*, riprodotto poi negli scritti varii col titolo: *I Piemontesi e la Crusca*. In esso il Berti ci dà un elenco completo di tutti i Piemontesi che appartennero alla Crusca sia nel suo primo periodo che va dal 1582 al 1783, sia nel secondo che viene dal 1811 ai nostri giorni. Di ognuno di quegli accademici ci dà, quando gli è possibile, qualche notizia, e sopra alcuni specialmente del secondo periodo si ferma lungamente a dimostrare l'opera loro nel coltivare e promovere lo studio della lingua italiana.

Anche l'ultima sua pubblicazione originale, fatta nel 1893, è consacrata ad una antica e grande istituzione piemontese, divenuta poi italiana, voglio dire quella sull'*Ordine Mauriziano*, ch'egli con gentile pensiero dedicava ai Reali nell'occasione in cui si celebrava il venticinquesimo anniversario delle loro nozze. Fin dal 1889, morto Cesare Correnti, il Re aveva chiamato il Berti all'alto ufficio di Primo Segretario, posto che egli aveva ben meritato con una vita spesa costantemente in servizio della

patria e del Re. Ma, finchè gli bastarono le forze, egli non tenne l'alto ufficio come un posto di riposo; anzi esso gli fu occasione ed eccitamento a nuovi studii sulla storia del Piemonte e della Dinastia, storia colla quale quella dell' Ordine è strettamente connessa. Il Berti nella sua pubblicazione ci espone le vicende e le trasformazioni dell'Ordine, ci dà molte notizie biografiche intorno agli uomini che vi occuparono diversi uffici e specialmente intorno a' suoi predecessori nel Primo Segretariato; mostra come anche l'Ordine fin dal tempo di Carlo Emanuele I e per merito di questo abbia contribuito all'italianizzazione del Piemonte, e come le ultime riforme, specialmente introdotte dal Cibrario, abbiano allargati assai gli intenti e l'opera dell'Ordine; cosicchè questo non mira soltanto alla pura beneficenza, ma anche alla diffusione dell'istruzione popolare e cerca di promovere o di incoraggiare il culto delle scienze, delle lettere e delle arti.

Ma l'attività del Berti non si arrestò ancora: benchè oppresso dall'età e dai malanni, pubblicava ancora nel 1895, due anni prima di morire, la corrispondenza di Cavour colla contessa di Circourt e compiva, senza poterla pubblicare, una *Vita di Carlo Alberto avanti del Regno.*

La morte lo rapiva il 22 aprile del 1897, quando già la mente era stanca e la penna gli era caduta di mano; egli moriva dopo aver nobilmente e vigorosamente compiuto il suo dovere d'uomo e di cittadino. In quel suo breve ma interessante scritto su Luigi Ornato aveva celebrata la virtù del lavoro; ed egli aveva col suo lavoro compiuta un'opera che avrebbe onorata la vita di più uomini. Aveva affermato, ricordando le parole dell'Ornato, che le nazioni si rifanno col lavoro e che il rifacimento nazionale è nelle mani di ciascuno di noi, perchè ciascuno ha in sè una forza perenne di risurrezione. E di ciò volle porgere nella sua vita uno splendido esempio. Ma essa ci dimostra pure come talvolta la virtù ed il merito siano dal mondo riconosciuti e ne abbiano il dovuto compenso. Uscito dal popolo il Berti seppe conseguire i più alti gradi nella scienza e nella vita pubblica, divenire due volte ministro, primo segretario dell'Ordine Mauriziano, senza mai deviare dal suo sentiero, senza piegarsi ad alcuno, senza nulla chiedere e nulla nascondere de' suoi pensieri e de' suoi sentimenti. E, caso più raro ancora,

egli ottenne i sommi gradi e i sommi onori senza eccitare attorno a sè nè odio nè invidia.

Forse il segreto di così rara fortuna stava nella sua singolare bontà, nell'animo suo privo d'ogni acredine verso chichessia, in quel suo fare sereno e patriarcale con cui trattava ognuno.

Eletto per la prima volta deputato sin dalla IV legislatura nel 1850, cioè appena compiuta l'età prescritta, egli era uno dei più vecchi rappresentanti di questo antico Piemonte, ed un vivo rammarico sorge in tutti noi, che egli non sia vissuto tanto da partecipare al glorioso cinquantennario, che questa città ha testè così degnamente festeggiato.

Niuno forse meglio di lui vi avrebbe potuto rappresentare la generazione piemontese del '48 nelle sue più alte e nobili aspirazioni, niuno certo avrebbe meglio di lui potuto rammemorare quei tempi, quegli uomini, quelle opere, che egli co' suoi scritti aveva saputo con tanto amore, dottrina e veracità illustrare. Egli avrebbe potuto dire quale grande fortuna sia stato l'acquisto dell'unità e della libertà e quale rovina sarebbe per l'Italia la loro perdita, egli che dell'unità d'Italia e della sua libertà era stato costante sostenitore; ma rammentando le virtù ed i sacrificii, ai quali era dovuta la nostra risurrezione, egli avrebbe anche ripetuti i suoi severi ammonimenti e ricordato alla nostra gioventù che, *quando si vuole la vita piana, levigata, facile, la scienza senza lo studio, la ricchezza senza il lavoro, lo scadimento è inevitabile.*

Il Berti traeva queste solenni parole dai ricordi di un altro illustre piemontese, Luigi Ornato; e con esse io voglio porre termine alla mia commemorazione, augurandomi che non restino senza frutto per la futura generazione italiana.

## *Sofocle nelle " Rane „ di Aristofane;*

Nota del Prof. C. O. ZURETTI.

*Habent sua fata libelli*, ed anche le opinioni hanno i loro destini, sorgendo, tramontando, risorgendo con alterna vicenda e per cause varie, fra le quali non ultima questa, che si bada spesso non alla sentenza in sè, ma a chi la pronuncia: ond'è necessario che tanto più si impugni una non retta opinione, quanto è maggiore l'autorità di chi la professa, quanto è maggiore il consenso che tale autorità può conciliare a idee meno conformi al vero. È il caso di insistere sull' ἄμφοιν ὄντοιν φίλοιν, φίλτερον τἀληθές, dacchè sono due filologi di grido, il van Leeuwen ed il von Wilamowitz-Möllendorf, che sostengono una tesi diametralmente opposta all'opinione comune la quale va caldamente propugnata. *Diu est ex quo perspicere mihi visus sum*, dice il van Leeuwen (1), *initium fabulae nostrae scribendae viro Sophocle fecisse comicum, et in calce dissertationis meae inauguralis anno 1876 thesin posui eo pertinentem. Eadem nunc est Wilamowitzii sententia.* Ed il Wilamowitz (2), conforme al suo costume, mostra una convinzione ferma ed assoluta, esente da qualsiasi dubbio, contentandosi di affermare: *man braucht sich aber nur die ganze fabel des stückes, das auf ein duell zwischen Aischylos und Euripides angelegt ist, zu überlegen und vollends die dürftige und gezwungene weise, wie Sophokles in den Hades eingeführt, für den gang der Komödie aber bei seite gestellt wird,*

(1) Aristophanis *Ranae*. Cum prolegomenis et commentariis edidit J. van Leeuwen. Lugduni Batavorum, apud A. W. Sijthoff, mdcccxcvi, p. vi, n. 3.

(2) U. von Wilamowitz-Moellendorf, *Euripides Herakles*, Berlin, Weidmannsche Buchhandlung, 1889, I, p. 2 e 3.

*zu erwägen, um zu erkennen, dass dies ein vom dichter aus not wider seinen ersten plan eingeführtes motiv ist, mit anderen worten, dass er den plan zu seinem drama entworfen hat, als Sophokles noch lebte.*

Non conosco gli argomenti del van Leeuwen, ed è non improbabile che nel luogo che egli cita enunciasse soltanto la tesi senza accennare a quale ordine di idee egli volesse richiamarsi per sostenerla; ma quanto è detto dal Wilamowitz parrebbe decisivo, date almeno le sue parole. Però nel breve cenno del dotto e geniale professore, ora Berolinense, non poche cose si suppongono provate, che non sono, e da premesse si deducono conseguenze nè in alcun modo logicamente necessarie nè corroborate dalla riprova dei fatti; anzi dalle affermazioni stesse del Wilamowitz risulta una prova contraria a quanto egli sostiene. Sicchè, pur col debito rispetto all'autorità sua ed alla autorità dell'erudito Olandese, è pregio dell' opera investigare la questione, che finora, a quanto sappiamo, fu piuttosto toccata che svolta, ed agli argomenti già prima addotti per l'opinione comunemente accettata, altri aggiungere, i quali contribuiscano a convalidarla.

La base sulla quale si appoggia l'affermazione del Wilamowitz è l'osservazione che a Sofocle nelle *Rane* è assegnata una parte troppo esigua. Non si può e non si vuole negare che la parte sia poco estesa; ma si deve notare che l'importanza di una parte non si giudica unicamente dall'estensione, chè non in tutte le contingenze il medesimo personaggio in egual misura contribuisce e partecipa all'azione sia nella vita, sia nel drama. Un esempio chiarissimo ci è fornito anche dai nostri romanzi storici, nei quali ordinariamente persone importantissime hanno piccola parte; nei quali spesso l'estensione della parte è, direi, inversamente proporzionale all' importanza storica dei personaggi: ciò è ovvio altresì nei drami del teatro Greco. Sicchè si dovrebbe intendere che la parte assegnata a Sofocle nelle *Rane* sia troppo inferiore a quella che avrebbe potuto e dovuto avere, e che si riscontri in ciò un altro di quei difetti nell'economia del lavoro, che più di un critico si compiace di mettere in luce per questa comedia di Aristofane Ma in ciò i critici hanno torto ed i loro giudizi sono troppo informati a norme di arte posteriore e più matura: e quanto a

Sofocle si deve affermare che, dato il piano delle *Rane*, nè poteva nè doveva avervi parte più estesa, perchè appunto le *Rane*, come ben dice il Wilamowitz, hanno a fondamento un duello fra Eschilo ed Euripide, nel quale la parte di Sofocle è necessariamente secondaria, è tutt'al più quella dell' ἔφεδρος (v. 792) e perciò poco estesa: il che non vuol dire poco importante.

Tale posizione è mirabilmente adatta a Sofocle εὔκολος μὲν ἐνθάδ', εὔκολος δ' ἐκεῖ (v. 82), a Sofocle che nè a fatti nè a parole, neppure nel tumulto infernale, che scompigliava perfino Plutone, mai non smentisce la sua tranquillità e solo dichiara di rimanere al suo posto, se Eschilo vince, e di gareggiare nel caso contrario con Euripide; laddove al pensiero della lotta Eschilo ἔβλεψε γοῦν ταυρηδὸν ἐγκύψας κάτω (v. 804). Dato il carattere, e, per così dire, il temperamento di Sofocle, il poeta Coloneo nelle *Rane* è perfettamente a posto, anche nella rinuncia amichevole, a favore di Eschilo, del trono della tragedia; d'altronde se anche fosse stato uno spirito battagliero, in un duello fra Eschilo ed Euripide la parte sua sarebbe pur sempre stata accessoria. Ma la parte assegnata a Sofocle non è soltanto adatta all'uomo, ma è convenientissima altresì all'artista che molto prese e fece suo dell'arte Eschilea e molto pure prese e fece suo dell' arte Euripidea; e questo bene sel sapea Aristofane che dell'arte Euripidea era grande e fine conoscitore ed imitatore: ne veniva che Sofocle non si trovava in contrapposizione nè all'uno nè all' altro poeta, ma piuttosto ne contemperava in felice equilibrio gli elementi. Laonde in una lotta per assicurare il primato all'uno o all'altro tipo dell'arte tragica, i campioni naturalmente designati non potevano essere che Eschilo ed Euripide, e Sofocle tanto meno poteva venir messo in lotta col poeta Salaminio quanto era più recente l'omaggio che alla memoria di Euripide egli aveva tributato col prendere il lutto egli stesso e col farlo prendere a' suoi attori, quando giunse ad Atene la notizia della morte del poeta. A questo omaggio, non si deve dimenticare, sono immediatamente posteriori le *Rane,* le quali con esso non potevano mettersi in contraddizione, assegnando a Sofocle una parte decisamente avversa ad Euripide.

A queste ragioni un' altra se ne aggiunge particolarmente

importante e nelle *Rane* e per Aristofane, poeta eminentemente civile e politico. La gran contesa poetica, e qui si appalesa il fine giudizio di Aristofane, non è decisa e risolta con criterii artistici, ma con criterio civile e politico, nel quale la superiorità di Eschilo era incontestata, potendo contrapporre alle teorie di Euripide sia i principii cui informò la sua vita, sia la sua vita stessa di Μαραθωνομάχος. Ma per la politica Sofocle non poteva farsi innanzi, perchè (Ione in *Ateneo* 604, a) τὰ μέντοι πολιτικὰ οὔτε σοφὸς οὔτε ῥεκτήριος ἦν, ἀλλ' ὡς ἄν τις εἷς τῶν χρηστῶν 'Αθηναίων: tutti poi rammentano la nota riprensione fatta al poeta Coloneo da Pericle. Quando a ciò si aggiunga che Aristofane " non disponendo di più che tre attori, doveva limitare il numero dei personaggi „ (1), si può comprendere che Sofocle nelle *Rane* non compaia nel primo piano del quadro, ma nello sfondo, che la parte a lui assegnata sia poco estesa; il che, ripeto, non vuol dire poco importante.

Sofocle non viene neppure mai sulla scena, ma soltanto si espone brevemente quello che ha fatto, quello che farà; però la posizione nel quale egli è messo costituisce un serio pericolo per Euripide prima ancora che la lotta sia decisa, e risolta questa i vantaggi che nell'*Ades* sarebbero stati dal trionfo assicurati ad Eschilo tornano tutti a favore di Sofocle, che nell'assenza di Eschilo deve occupare il trono della tragedia e conservarlo ad Eschilo. Sofocle non viene neppure mai sulla scena, ma la parte sua è paragonabile a quella di Achille sotto la tenda, di quell'Achille del quale tanto maggiormente appare l'importanza, quanto minore è il suo intervento diretto nell'azione. Quale maggiore importanza di questa? Anzi a questo proposito giova rammentare l'artificio dell'Alfieri, che in molte tragedie fa giungere il protagonista sulla scena soltanto dal secondo atto in poi, pur risultandone l'importanza e la grandezza sino dal primo atto, nel quale il protagonista non interviene direttamente all'azione.

La parte di Sofocle è dunque adattissima al piano delle *Rane*, al carattere ed all'importanza del poeta, alle esigenze esterne

(1) Le Rane di Aristofane tradotte in versi italiani da A. Franchetti, con introduzione e note di D. Comparetti. Città di Castello, S. Lapi, tipografo editore, 1886, p. xxxii.

e materiali del teatro Greco: da tutto ciò si deve dedurre che essa nelle *Rane* è dovuta ad aggiunta posteriore al concepimento primitivo del lavoro? Essendo ancor vivo Sofocle, come avrebbe potuto Aristofane far dir da Eschilo che l'arte tragica non è morta con lui, ma è morta con Euripide? (vv. 868-9). Era facilmente prevedibile, data l'avanzata età di Sofocle, che presto il poeta sarebbe mancato ai vivi; ma, data l'ammirazione degli Ateniesi per Sofocle, l'affermare, vivo Sofocle, che l'arte tragica era morta con Euripide, era cosa impossibile. Rimarrebbe per taluno un facile appiglio nell'ipotesi, e se ne sono fatte tante, che anche questi versi, che stanno così bene, là dove sono messi, siano tra le altre, una delle abili aggiunte che Aristofane in causa della morte di Sofocle avrebbe fatto al piano primitivo delle *Rane*. Ma sarebbe argomentazione strana quella che dalla coerenza e dalla omogeneità delle parti deducesse che qualche elemento è posteriore: soltanto nel caso opposto si potrebbe avere un punto di partenza per accampare una tale ipotesi, alla quale manca d'altronde un qualsiasi fondamento.

Ed invero non può concepirsi le comedie delle *Rane* senza il presupposto della morte di Sofocle, che è perno e fondamento dell'invenzione e dell'esecuzione; perchè sarebbe inconcepibile che Dioniso scendesse all'inferno per ricondurre Euripide, finchè Sofocle, vivo ancora e produttivo non ostante la tarda età, poteva mitigare il πόθος e del dio e del pubblico: qui sta anzi la spiegazione della tragicomedia che Aristofane ci dà nella prima parte delle *Rane*, e qui si appalesa il nesso fra la prima parte e la seconda. Soltanto la morte di Sofocle toglieva definitivamente al teatro Ateniese i suoi grandi tragici e faceva nascere un senso di sgomento per l'avvenire, che non avrebbe più, come il passato, creati capolavori della tragedia: la tragedia era ben morta oramai. A questo sentimento si ispira il principio delle *Rane*, s'ispira l'azione della comedia, si ispira la conclusione: se ci fosse stata la speranza di un buon poeta tragico Dioniso non sarebbe neppure disceso all'inferno. Così tutta la comedia appare, qual'è, omogenea e coerente, ed i critici al più possono dolersi dell'ampiezza della prima parte, che è pur tanto gustosa e non difforme dal libero procedimento della musa comica pre-Menandrea, possono al più supporre interpolazioni, le quali però debbono credersi assai limitate anche per l'intima

coerenza della prima parte, sia che venga considerata negli elementi onde risulta, sia che venga studiata in quanto concerne l'intimo rapporto colla seconda. E ciò risulta particolarmente dalla costanza della parodia Euripidea, che anche nella prima parte delle *Rane* è sparsa a piene mani, e rivela appunto l'ampia conoscenza che Aristofane aveva delle tragedie del Salaminio e il suo consueto comportarsi, quale appare da altre comedie, verso il perseguitato poeta, e prelude alla gara della seconda parte, fondata appunto sulla conoscenza e sull' esame dei drami Euripidei. Così il duello fra Eschilo ed Euripide è ben preparato e viene novità gradita e conveniente al pubblico ed al lettore.

Che Aristofane dato il tema — duello poetico e retorico fra Eschilo ed Euripide — fosse capace di trarne partito anche in altro modo, che potesse svolgerlo anche in forma conciliabile coll'essere tuttora Sofocle in vita, non vorrei io negare al poeta, che, pur ripetendosi, si vantava, ed a ragione, della novità de' suoi spedienti e delle sue invenzioni; ma non questa è la questione che può farsi per le *Rane*, le quali invece ci mostrano come Aristofane trattasse quell'argomento, data la circostanza della recente morte di Sofocle. Ma non si può opporre che appunto la recente morte di Sofocle sia fatto contrario all'opinione di chi impugni la tesi del van Leeuwen e del Wilamowitz, dovendosi supporre, conforme alla nostra sentenza, tra la morte di Sofocle e la rappresentazione delle *Rane* un troppo breve spazio di tempo perchè Aristofane potesse e concepire e compiere l'opera sua, mentre quel medesimo lasso di tempo sarebbe stato sufficiente ad introdurre modificazioni nella comedia.

Aristofane, come ci dimostra anche il numero delle sue comedie, superò in fecondità i comici contemporanei, anzi giunse perfino per una medesima festa a far rappresentare due comedie, una a nome suo, l'altra da un prestanome: ciò indica in lui grande potenza e rapidità di lavoro, che d'altronde in certi periodi della vita è abbastanza frequente nei poeti comici di ogni letteratura, che non disdice ma piuttosto si conforma alle esigenze della comedia greca *antica*, per la quale la caricatura personale esigeva elementi non ancora sfruttati e perciò non solo recenti, direi, ma freschissimi. Dalla morte di Sofocle,

nella seconda metà del 406, alla rappresentazione delle *Rane* nel gennaio del 405, nulla si oppone a che scorgiamo uno spazio di parecchi mesi, sufficienti perciò sia alla concezione ed alla esecuzione della comedia, sia alle pratiche ufficiali ed ai preparativi antecedenti la pubblica rappresentazione. Se questo però, che pur è possibile, non ci si volesse concedere, qualunque argomento contrario desunto dal breve lasso di tempo fra la morte di Sofocle e la rappresentazione delle *Rane*, non potrebbe venir addotto efficacemente, dacchè si poserebbe anch'esso soltanto sopra di una possibilità, laddove l'altra possibilità, favorevole alla nostra tesi, sarebbe almeno confortata dalla opportunità e dalla coerenza della parte di Sofocle coll'azione e collo svolgimento delle *Rane* non solo, ma altresì dalle allusioni che si trovano nella comedia alla battaglia delle Arginuse, settembre del 406. Da queste il tempo della composizione delle *Rane* verrebbe limitato agli ultimi tre mesi del 406 e neppure interi, deducendone il tempo necessario per il concorso ed i preparativi per la rappresentazione. Ora nelle *Rane* il duello fra Euripide ed Eschilo è giudicato da Dioniso, che discende all'inferno: la seconda parte delle *Rane* presuppone necessariamente la prima, come sorta in concezione unica colla seconda per quanto ampiamente e liberamente svolta; la prima parte ci conduce alla chiusa del 406, alla quale si riduce la seconda, non soltanto per l'intima unione colla prima, ma altresì per nessi che la collegano ad Alcibiade.

Nè si può credere che quanto concerne Sofocle, le Arginuse, Alcibiade sia dovuto a posteriore introduzione, favorita od occasionata dalla seconda rappresentazione, perchè i tentativi fatti per dimostrare un qualsiasi rimaneggiamento delle *Rane* sono tutti falliti, e noi dobbiamo credere che questa appunto e non altra fosse la sostanza e la forma delle *Rane* sino dalla prima rappresentazione. Sicchè intorno alle *Rane* si può credere che morto Euripide, morto Sofocle, perduta la speranza di altro grande poeta tragico, sorgesse in Aristofane l'idea di svolgere in comedia il ritorno a questa vita di uno dei grandi poeti defunti: il contrasto si presentava spontaneo fra Eschilo ed Euripide, tra i quali il poeta non poteva non preferire il primo — per decidere chi dovesse tornare in terra ci voleva un giudizio ed un giudice, Dioniso, che scende all'Ades. E la

comedia risulta appunto della discesa di Dioniso all'Ades, del contrasto fra Eschilo ed Euripide. In tutto questo la posizione di Sofocle abbiamo veduto quale poteva essere: ci voleva una forte e spiccata individualità che non si inchinasse ad Euripide, ma lo combattesse ad oltranza, e tale Sofocle non poteva essere. Tale concezione prende forma e colore allo scorcio del 406.

Non ritengo opportuno insistere sulla connessione fra la prima e la seconda parte delle *Rane*, anzi non cito neppure le comedie e le tragedie antiche nelle quali il disegno appaia risultante di due parti, e mi accontento invece di un'ultima considerazione. È nostro dovere cercar di capire i prodotti dell'arte antica, ma la nostra conoscenza ha molti e molti limiti e nulla è forse tanto difficile quanto investigare la genesi e la gestazione di opere letterarie — in tali investigazioni è molto facile eccedere tanto più, quanto minori e in numero ed in qualità sono i mezzi onde disponiamo. Qui per le *Rane* si tratterebbe in fondo di studiare dalle *Rane*, e non da altro, le *intenzioni* di Aristofane; quanta cautela sia necessaria, è di per sè palese, ed io a questo proposito non ho potuto scacciare dalla mia mente un confronto, di coloro cioè che hanno tentato di ricondurre i poemi Omerici allo stato primitivo, distinguendone e smembrandone le parti, con fatica ammirabile sì, ma con mirabile disaccordo ne' risultati: il peggio è che il disaccordo non dissuaderà altri dal tentare una simile impresa. Ma dai soli *Promessi Sposi* sarebbe possibile stabilire che il Manzoni fece la sua famosa revisione, che anzi, come dimostra un autografo, ci fu un abbozzo non in tutto conforme al disegno della stessa prima edizione? Dalla sola *Divina Comedia* si può fissare il tempo della composizione dei singoli canti, la maniera della revisione che pur Dante dichiara di curare? È molto se qua e là si può mettere in rilievo o supporre qualche mutamento, qualche intenzione non attuata. Per citare un ultimo esempio, intimamente collegato anche alle ricerche Omeriche, è noto che pel *Kalewala* si potrà decidere quanto sia dovuto alla poesia popolare raccolta oralmente e quanto all'opera del Lönnrot, soltanto quando saranno pubblicate appunto le carte del Lönnrot stesso: anche pel *Kalewala* l'opera del raccoglitore ha dato una certa uniformità a tutte le parti, sicchè dall'opera in sè non è più possibile scorgere le connessure. E non sarebbe possibile

scorgerle neppure nelle *Rane*, e se queste presentano esuberanza di materia non sarà male richiamare alla mente la sovrabbondanza dei poemi cavallereschi e, coll'Ariosto, ripetere sia pei poemi Omerici, sia per le comedie di Aristofane:

Mettendolo Turpin anch'io lo messo (1).

---

(1) Ecco l'opinione del Kaibel in Pauly-Wissowa Realencyclop: Sowohl die Frösche wie die Musen standen unter dem Eindruck des eben erfolgten Todes des Sophokles (cfr. Phrynich fr. 31 Kock). Aber dieser schmerzliche Verlust hat A. nicht das Thema an die Hand gegeben.

*L'Accademico Segretario*
Cesare Nani.

# INDICE

## DEL VOLUME XXXIII

TORINO — VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

DISTRIBUZIONE DELLE SEDUTE

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1897-98

divise per Classi

| Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali | Classe di Scienze morali, storiche e filologiche |
|---|---|
| 1897 - 21 Novembre | 1897 - 28 Novembre |
| » - 5 Dicembre | » - 12 Dicembre |
| » - 19 » | » - 26 » |
| 1898 - 2 Gennaio | 1898 - 9 Gennaio |
| » - 16 » | » - 23 » |
| » - 30 » | » - 6 Febbraio |
| » - 13 Febbraio | » - 20 » |
| » - 27 » | » - 6 Marzo |
| » - 13 Marzo | » - 20 » |
| » - 27 » | » - 3 Aprile |
| » - 17 Aprile | » - 24 » |
| » - 1 Maggio | » - 8 Maggio |
| » - 15 » | » - 22 » |
| » - 29 » | » - 12 Giugno |
| » - 19 Giugno | » - 26 » |

## SOMMARIO



### Classi unite.



### Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.



### Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.



Tip. Vincenzo Bona — Torino

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXIII, DISP. 2ª, **1897-98**

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1898

# SOMMARIO

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.



## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.



Tip. Vincenzo Bona — Torino

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXIII, DISP. 3ª, **1897-98**

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1898

## SOMMARIO

### Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.



### Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.



Tip. Vincenzo Bona — Torino

# SOMMARIO

## Classi unite.



## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.



## Classi Unite.



## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.



Tip. Vincenzo Bona — Torino

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXXIII, Disp. 5[a], **1897-98**

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1898

## SOMMARIO

### Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.



### Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.



Tip. Vincenzo Bona — Torino

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXXIII, Disp. 6ª, **1897-98**

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1898

## SOMMARIO

### Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.



### Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.



Tip. Vincenzo Bona — Torino.

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXXIII, Disp. 7ª, **1897-98**

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1898

# SOMMARIO

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.



## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.



Tip. Vincenzo Bona — Torino.

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

---

Vol. XXXIII, Disp. **8ª, 1897-98**

---

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1898

## SOMMARIO

### Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.



### Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.



Tip. Vincenzo Bona — Torino

## SOMMARIO

### Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.



### Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.



Tip. Vincenzo Bona — Torino.

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXXIII, Disp. **10a**, **1897-98**

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1898

## SOMMARIO

### Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.



### Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.



Tip. Vincenzo Bona — Torino

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXIII, DISP. IIa, **1897-98**

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1898

# SOMMARIO

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.



## Classi unite.



## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.



Tip. Vincenzo Bona — Torino

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

---

Vol. XXXIII, Disp. 12a, 1897-98

---

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1898

## SOMMARIO

### Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.



Tip. Vincenzo Bona — Torino

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXIII, DISP. 13ª, 1897-98

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1898

## SOMMARIO

### Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.



### Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.



Tip. Vincenzo Bona — Torino

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

---

Vol. XXXIII, Disp. **14ª, 1897-98**

---

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1898

# SOMMARIO

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.



## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche



Tip. Vincenzo Bona — Torino

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

## DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXXIII, Disp. 15ª, 1897-98

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1898

# SOMMARIO

## Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.



## Classi Unite.



## Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.



Tip. Vincenzo Bona — Torino.